R. P. R.



# BIBLIOTECA CENTRALĂ

# UNIVERSITARA

DIN

BUCURESTI

Cota 78792

Nr. Inventar 109192 Anul 1956

Sectia Sepaget Nr. 11

Ein vollständiges Verzeichnis der Sammlung "Aus Natur und Geifteswelt" befindet fich am Schluß diefes Bandes.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3

# Künstlerischer Wandschmuck

für haus und Schule. Sarbige Künstlersteinzeichnungen

Gerade Werfe echter heimalkunit, die einfache Motive ausgestalten, bieten nicht nur dem Erwachsenen Wertvolles, sondern sind auch dem Linde verständlich. Sie eignen sich deshalb besonders für das deutsche haus und können seinen schwicken Schmid bilden. Der Verluch hat gezeigt, daß sie sich ur vornehm ausgestatteten Kämmen ebensogut zu behaupten vermögen, wie sie das einfachste Wohnzimmer schmidden.

naben den hohen Wert der Bilder anerkannt, mehrere Rogierungen haben des Unter-

nehmen durch Antauf und Empfehlung unteritürt.



Schwarzwaldtaune. Von Waller Conz. Größe 100-70 cm., Preis 6 Mark. Ohne Glas gerahmt 14 Mark. Mit Glas gerahmt 19 Mark. Paliende Rahmenfarbe dunkelrot.

"Es läßt sich kaum noch etwas zum Ruhme dieser wirklich lünsilerischen Steinzeichnungen jagen, die nun schon in den weitesten Kreisen des Dolfes allen Beisall gesunden und — was ausschlägegeend ist — von den auspruckvollsten Kunstfreunden ebenso begehrt werden wie von sennen es längst ein vergeblicher Wunsch war, das heim wenigktens mit einem fardigen Original zu schwieden. Was sehr selten vorkommt: dier vegegnet sich wirklich einmal des Dolfes Luft am Beschanen und des Kenners Freude an der künstlichen Wiedergabe der Außenweit." (Unnt für Alle All.)

....Alf und jung war begeistert, geradezu glüdfich ilder die Kraft maleriicher Wirtungen, die hier für verhällnismäßig billigen Preis dargeboten wird. Endlich einmal eiwas, was dem öden Oldrudbilde mit Erfolg gegenübertreien kann."

(Diarrer Raumann in her Billen

Katalog mit ca. 150 farbigen Abbildungen unentgelflich und posifrel vom Derlag,

Perlag von B. G. Teubner in Leipzig.

# kühstlerischer Wandschmuck

für haus und Schule. Farbige Künftlersteinzeichnungen

Größere Blätter: Bildgröße 100×70 cm und 75×55 cm № 5. — und № 6. —

richienen find ca. 75 Blätter, barunter

Baniger, Abend,
Bergmann, Seerolen.
Bergmann, Seerolen.
Biele, hilmengrab — Im Stahlwerth, Krup,
Conz, Schwarzwaldtamie.
Detimann, Dulfanwerft bef Stettlin.
Du Bois-Reymond, Att. andidy, (Aftropolis
Cichrobt, Droben jiehet die Kapelle.
Stlentigher, Krähen im Schnee.
Genzmer, Dolfsiled.
Georgi, Ernte — Pflügender Bauer,
Heder, Am Meerestirand.
Hein, Im Wasgenwald — Am Webliub,
Hoch, Sijderboote — Heligher — Kiefer,
Kampmann, Nondanfgang.
Kampmann, Abendrot — Herbitabend.
Manoldt, Cichen.
Leiber, Sonntagsitise.

Kleinere Blätter:

Bildgröße 41×30 cm. Erfdienen find ca 30 Blätter, je 1/2 2.50, darunter; Bedert, Sächjildse Dorfftraße. Bendrah, Aus alter Zeit – Si. Marien in

Danzig — Jafobstirche in Chorn — Ordensburg — Marienwerder — Die Marienburg — Ruine Rheden. Siele: Chriftmartt — Einjamer hof. Daur; Beichnette Höben — Kapelle.

hein, Das Cal.

Hildenbrand, Was der Mond erzählt. Kampmann, Herbitjürme — Seierabend

Orilieb, Herbfiluft. Deget, Am Stadttor.

Strich Chapell, Blühende Kajtanien

Strick - Chapell, theuernte.

v. Dolfmann, Frühling auf der Weide, Zeising, Dresden Serbst in der Eifel Leinwandungpe m. 10 Kl. n. Wahl 18, 28,— Kartonmappe m. 8 Blätt, n. Wahl 18, 12,—

#### Wand : Friese:

Bilbyröße 105×44 cm je A 4.—

— Wir wollen die goldene Brüde bauen — Schlaraffenland — Schlaraffenleben — Anglein 3. Wacht — Englein 3. Huf.

herrmann, Im Moor — Aschenbrödel — Rottapphen.

Rahmen v. M. 2. - bis . M. 17. - lant Hataleg.

Unter, thengrieden.
Manhaet, Nordjeeidyll.
Manjágád, Winternacht.
Ortif, Riibezahl — Hänlel und Gretel.
Orto, Chriftus u.Albodem, Maria u. Martho
Paczla, Reigen.
Roman, Paeftum — Röm. Campagna
Saccht, Cinfame Weide.
Sajumerec, Waldwiese — Wintexabend.
Sajumerec, Waldwiese — Wintexabend.
Sirán, Chapell, Lieb Helmalland ad
— Herbit im Kand — Dorf in Dünen —
Srühlingsgäste — Mondracht.

#### Bunte Blätter:

Kleinfte Künftlerfteinzeichnungen.

Blattgröße 33×23 cm. Erschienen sind ca. 20 Blätte

je // 1.—, darunter Danishusie

Biet, Verigneit.
Dank, An Meer,
Sitenficher, Am Waldesrand.
Gläid, Morgenhome im hochgebirge.
hildenbrand, Stilles Gäßchen.
Kantomann, Baumblitte — Bergdorf
Knapp, Unter dem Apfelbaum.
Matthaci, In den Marfigen.
Schrechter. Bergafulfägiger.

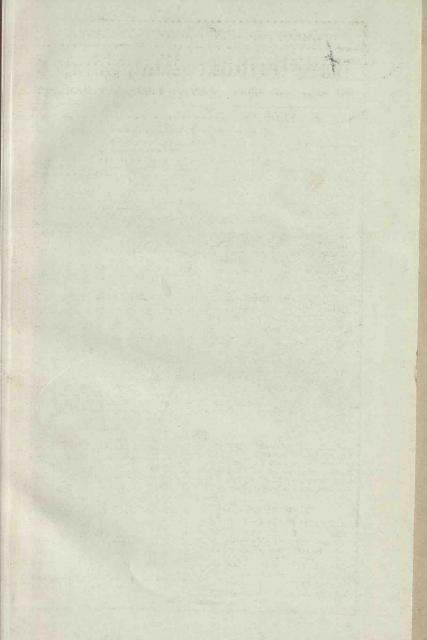
director; Bergiolöfichen.
M. L.80
M. Airniferrahmen.
M. A. —
M. A. —
einwandmappe mit 10 Blätfern nach
Waß

M. 12

Porträts: Größe 60×50 cm .16. 3.

Rampf, Kaifer Wilhelm II, Bauer, Kleines Schillerbild, Größe 19×29 om. Preis 1 .K., in Jurnierrahmer 2. C. in mediciner Palarier

bis M. 17.—3u d. fleineren M. 2.— bis g.—







Die "Melancholie" von Dürer.

78792 Naher und Geisteswelt
Aus Natur und Geisteswelt

Sammlung wissenschaftlich=gemeinverständlicher Darstellungen 170. Bandchen

Fro. 88921.

226608

# Mathematische Spiele

Don

Dr. W. Ahrens

in Magdeburg

Mit einem Titelbild und 69 Siguren im Text

109192



Derlag von B. G. Teubner in Leipzig 1907
B. G. Teubner

9953

pc 67/01

Das, sollte ich mennen, ließe sich wohl aus ber Ersahrung barthun, daß auch bey Bielen, die nie den Ramen Mathematik gehört haben, eine große Menge von Bergnügungen mathematisch ist. Alle Spiele, die ungleich voll von Rachdenken, in langer Ordnung vom Edach die tief unter daß Bochen hinunter gehen, vergnügen, weil man bey ihnen rechnet, und Fontenelle hat sie längst für eine natürliche Algebra erklärt.

A. G. Käftner. "Über den Werth der Mathematik, wenn man fie als einen Zeitvertreib betrachtet," Ges. schönwissensch Werke, III, Berlin 1841, p. 83.

B.C.U. Bucuresti
C109192

# Vorwort.

Das vorliegende Büchelchen gibt eine Auswahl von mathematischen Spielen und zwar solche, die mir einerseits besonderes Intereffe zu verbienen ichienen, andererfeits fich für biejenige Darftellung eigneten, welche ich mir für biefes Buch vorgefest hatte. Um nämlich niemanden, auch ben ber Mathematik völlig Unkundigen, von der Lekture auszuschließen, habe ich nirgends irgend welche mathematische Renntnisse beim Lefer vorausgesett. Die burch biese Rucksicht bedingte Darstellung gestaltete sich zwar an einzelnen Stellen etwas breiter, mahrend an anderen wenigen Stellen auf ftrenge Beweisführung verzichtet werben mußte Ich hoffe jedoch, daß man biefe Mängel nicht als erhebliche empfinden, fie vielmehr als burch ben gewonnenen Borteil entschuldigt ansehen wird. Wem trop biefer im weitesten Sinne popularen Darftellung mangels ausreichenber allgemeiner logischer Schulung die Lektüre Schwierigkeiten verursacht, bem kann nur ber Rat gegeben werben, welchen ein berühmter frangösischer Mathematiker einem Anfänger gegeben haben foll: "Gehen Sie nur weiter, junger Mann, die Uberzeugung wird schon nachkommen." Selbstverständlich hat D'Alembert, bem bies Wort zugeschrieben wird, bamit nicht einem Umberspringen von einer Frage zur anderen, von einem Rapitel zum anderen bas Wort reben wollen, sondern ber Lefer wird gut tun, neben bem obigen Bort folgenden damit burchaus verträglichen Ausfpruch eines beutschen Gelehrten zu beherzigen: "Man muß nie benten, biefer Sat ift mir ju fchwer, ber gehort für große Gelehrte, ich will mich mit ben andern hier beschäftigen; bas

ist eine Schwachheit, die leicht in eine völlige Unthätigkeit ausarten kann. Man muß sich für nichts zu gering halten."

Um das Mitarbeiten des Lesers mehr zu beleben, habe ich einige fortlausend durch das Buch numerierte Fragen beigegeben, die durchweg so einsach sind, daß der Leser, der mit Berständnis gefolgt ist, sie selbständig wird beantworten können. Die am Schlusse gegebenen Antworten sollen daher mehr der Beruhigung des Lesers als einem Bedürsnis dienen. Literaturnachweise erschienen bei dieser Behandlung des Stosses nicht angebracht; wer sie sucht, wer zugleich eine gründlichere und umfassendere Behandlung dieses ganzen Gedietes einschließlich seiner Beziehungen zu rein mathematischen Fragen und eine strengere mathematische Darstellung wünscht, sei auf meine im gleichen Berlage erschienenen "Mathematischen Unterhaltungen und Spiele" verwiesen.

Magbeburg, ben 12. Mai 1907.

Afrens.

# Inhaltsverzeichnis.

Ginleitung	1
Rapitel L. Wettspringen	The second second
Rapitel II. Das Bof-Puggle oder Fünfzehnerspiel	8
§ 1. Geschichte und Beschreibung bes Spiels	8
§ 2. Lolung der Aufgabe	9
8 3. Die mathematische Theorie des Sniels	13
proport mit Cuytunitin	18
Rapitel III. Solitär- oder Ginstedlerspiel	21
§ 1. Spielregel. Notation .	21
§ 2. Aufgaben bei teilweise besettem Brett	22
8 4. Lyeutte des Optels.	24 27
§ 5. Das französische Spielbrett (37 Felber)	30
Rapitel IV. Wanderungsspiele	33
§ 1. Guleriche Banderungen. (Die Pregelbruden bei Königs-	00
Derg)	33
8 2. Pamilionice Wanderungen. (Eine Rundreise durch die	
beutschen Universitätsstädte)	37
Kapitel V. Pnadische Spiele	47
§ 1. Die Reihe der Botengen der Rahl 2	47
8 2. Eine prattische Anwendung der Reihe der Kotenzen	
s 3. Erraten gedachter Zahlen und Gegenstände	54
§ 4. Der Lucassche Turm	57 59
Kapitel VI. Per Baguenandier	
	64
Rapitel VII. Wim	69
§ 1. Beschreibung des Spiels und Stiggierung seiner Theorie	69
§ 2. Begründung der Theorie des Spiels	72

#### Inhaltsverzeichnis.

§ 3. Das praktische Spiel	Seite
§ 4. Eine andere Ginkleidung bas Suite	79
Ranital VIII	81
ger Kollellprung	84
§ 1. Definition. Geschichte. Borbemerkungen	
§ 2. Beispiele von Rösselsprüngen. § 3. Einige Methoden zur Risburg ben Werten	84
§ 3. Einige Methoden zur Bilbung von Röffelsprüngen	86
§ 4. Magische Rösselsprünge	88
Rapitel IX. Magische Quadrate	95
§ 1. Ginleitung § 2. Das neunzellige Oughunt	97
§ 2. Das neunzellige Quadrat . § 3. Allgemeine Wethode für ungeroderlies D.	97
§ 3. Allgemeine Methode film man in	98
§ 3. Allgemeine Methode für ungeradzellige Quadrate	100
Beantwortung ber Areas	107
Beantwortung der Fragen	112
Allegrammers and algues dots been all lear	

# Einleitung.

Mit "Spiel" pflegen wir eine Beschäftigung zu bezeichnen, die wir nicht eines bestimmten nüglichen Zweckes wegen, sondern lediglich zu unserer Unterhaltung, unserem Bergnügen, unserer Zerstreuung, unserer Erbauung entweder selbst vornehmen oder von anderen vornehmen lassen. Wir sprechen so von dem "Spiel" der Kinder, dem "Spiel" des Musikers, dem "Spiel" auf dem Theater usw.

Daß das Spiel oft auch einen bildenden Wert, selbst einen bebeutenden bildenden Wert hat, widerspricht unserer Definition durchaus nicht; man darf vielmehr, wie dies geschehen ist, in gewissem Sinne die Wissenschaft selbst als ein "Spiel" bezeichnen. — Das vorliegende Büchelchen enthält nur Spiele und erwartet vom Leser, daß er mitspielt. Ein Teil der darin behandelten Spiele ersordert, obwohl dies keineswegs ein Erfordernis des Spiels an sich ist, dei praktischer Aussührung die Beteiligung von mindestens einer zweiten Person und kommt dann zumeist auf einen Wettstreit zwischen den beiden Spielenden hinaus.

Während dem Spielenden an sich ein bestimmtes Ziel nicht vorzuschweben braucht, ist dies bei vielen Spielen und bei den im vorliegenden Buche behandelten ausschließlich der Fall. Die Erreichung dieses Ziels kann, wie bei den reinen Glücksspielen, lediglich vom Zufall abhängen, sie kann aber auch bedingt sein durch manuelle Fertigkeiten oder durch eine geistige Leistung, sowie auch durch Zusammenwirken dieser verschiedenen Faktoren. Die "mathematischen" Spiele bilden im ganzen wohl den schroffsten Gegensatzu den reinen Glücksspielen, obwohl auch bei ihnen die Einwirkung der Mächte des Zusalls nicht vollständig ausgeschlossen zu sein braucht.<sup>1</sup>) Wir werden als

<sup>1)</sup> Bei dem Rim-Spiel (Kap. VII) 3. B. werden die Spieler die Bestimmung der Ansangsstellung dem Zusall überlassen. Falls beide Spieler die mathematische Spieltheorie sehlersrei handhaben, hüngt der Ansgang des Spiels lediglich von der Ansangsstellung ab und das Spiel ist dann sogar ein reines Glückswiel.

"mathematisch" nämlich ein Spiel bezeichnen, das zu seinem Betrieb eine geistige Tätigkeit erfordert, bei der Methoden und Schlußweisen nach Art der in der Mathematik üblichen zur Unwendung gelangen ober boch bei verftandigem Spielbetrieb gelangen müffen. Der mathematische Charakter des Spiels wird um so vollkommner sein, je mehr solche mathematischen Elemente das ganze Spiel für sich allein beherrschen. Die mathematische Behandlung eines Spiels ist natürlich — ebenso wie auch die Mathematik felbst - nicht unbedingt an eine bestimmte technische Sprache, dargestellt durch Zeichen, Formeln, eine bestimmte Terminologie usw., gebunden. Diese Dinge sind vielmehr stets nur aus Kücksichten geistiger Ökonomie geschaffen und daher allerdings bei den schwierigeren Fragen der mathematischen Wissenschaften bem menschlichen Geifte, ber bie berborgenen Wahrheiten nicht unmittelbar zu erkennen vermag, sondern zu ihnen nur an der Hand geistiger Krüden vorzu= bringen in der Lage ift, absolut unentbehrlich, ja bisweilen fonnen zwedmäßige Festsetzungen in diesen Außerlichkeiten ausschlaggebend für die gange weitere Entwickelung bes betreffenden Wiffenschaftsgebietes fein. Für bie hier behandelten Materien, welche ausschließlich von der allerelementarften Art find, fällt bies Moment jedoch fort, so bag wir hier, ohne uns einen erheblichen Zwang anzutun, von einer technisch-mathematischen Darftellungsweise absehen können.

Es sei gestattet, das Wesen eines mathematischen Spiels an einem Beispiel zu erläutern, wosür wir das bereits soeben (in Ann.) zitierte Nim-Spiel wählen wollen: Eine relativ einsache Theorie, die, wenn auch ohne die Kunstsprache des Mathematisers darstellbar, von ausgeprägt mathematischem Charakter ist, lehrt, daß es ein unbedingt zum Siege führendes Versahren gibt, durch das in der großen Mehrzahl der Fälle der anziehende Spieler sich sogar bereits mit dem ersten Zuge den Sieg sichern kann. Die Kenntnis dieser Theorie verschafft daher dem Spielenden gegenüber einem der Theorie unkundigen Gegner, mag dieser an sich in dergleichen Spielen nicht ungeübt und selbst scharssinnig sein, zunächst eine Überlegenheit, welche der einer mit den modernsten Feuerwassen ausgerüsteten Truppe gegenüber einem Hausen mit Pseil und Bogen bewassert Wilden gleichkommt.

Dabei sind es durchaus nicht gerade die kompliziertesten Spiele, die vom mathematischen Standpunkte das größte Interesse

verdienen; benn eine abschließende, alle überhaupt möglichen Falle umfaffende Theorie ift für folche Spiele, unter benen bas Schach als bas wohl tompliziertefte und jedenfalls bilberreichfte obenan fteht, faum bentbar und wird insbesondere für bas Schach auch schwerlich jemals gewonnen werben, wir meinen eine Theorie, welche genau für jebe nur bentbare Position ben absolut beften Bug angeben wurde und welche etwa als Refultat ergeben würde, daß der Anziehende ftets fiegen muß oder, was wohl wahrscheinlicher ift, die Partie — auch bei absolut forrettem Spiel bes Gegners - ftets unentschieden machen fann. Zwar hat man verschiedentlich versucht, auch die Mathematit ber Schachtheorie bienftbar zu machen, jedoch wird man diese Bersuche als miglungen ansehen dürfen, soweit es sich um die "Theorie" in bem oben erläuterten Ginne handelt. Denn was foll man überhaupt unter einer "mathematischen" Behandlung ber Schachtheorie verfteben? Gine folche mußte fich von der Schachtheorie im gewöhnlichen Sinne dadurch untericheiden, baß fie alle bei einer gegebenen Stellung überhaupt nur mög= lichen Buge in ben Bereich ihrer Ermägungen goge; bies über= fteigt aber menschliches Können überhaupt. Ift boch, um nur ein Beispiel anzusühren, die Bahl aller verschiedenen nach 2 Bügen (2 von jeber Seite) möglichen Positionen bereits größer als 70 000, wenn auch die meiften dieser Rombinationen mehr ober minder fehlerhafte Büge enthalten werden. Borläufig erscheint es jedenfalls gang aussichtslos, durch Benutung spezifisch mathematischer Silfsmittel ober Denkprozesse eine Abkurgung biefes Berfahrens zu erreichen. Bielmehr wurde, wenn man etwa an die Stelle ber einfachen und übersichtlichen Bangarten ber Figuren, bes Mat usw. fomplizierte Formeln segen und mit biefen gewiffe Rechnungs - Algorithmen ausbilben wollte, wie teilweise versucht ift, Arthur Schopenhauer nur Recht bekommen mit seinem bekannten Unsspruch, bag ber Mathematiker einem Menfchen gliche, ber fich feine gefunden Beine abschneibe, um sich statt beren hölzerne ansetzen zu laffen — so unberechtigt bies Wort bes mathematikerfeindlichen und wenig mathematikverftändigen Philosophen auch sonft ift. Gine vollständig er= schöpfende Berücksichtigung aller nur möglichen Kombinationen würde dem prattifchen Schachspieler auch einen unverhaltnismäßigen Aufwand an Beit und Rraft bedeuten, vielmehr icheibet fein tattischer Blid eine große Bahl offenbar fehlerhafter ober

wertloser Züge von vornherein aus und läßt ihn seine ganze Rraft benjenigen zuwenden, die im Bereich bes Möglichen liegen und deren Konsequenzen daher so weit wie möglich zu verfolgen sind: er gleicht einem Wanderer, der auf seiner Wanderschaft eine große Stadt passiert und sich ein Bild von dieser verschafft, indem er der Flucht der Hauptstraßen folgt, Lage und Aussein anderer sich vornimmt, die Stadt nicht früher zu verlassen, als bis er jebe, auch die offenbar unbedeutenbste Strafe paffiert und jedes einzelne Saus betrachtet hat, hierbei allerdings vielleicht einmal eine Merkwürdigkeit entbeckt, welche bem ersteren ent= gangen, andererseits aber von Zeit zu Zeit sich in Sackgaffen festrennt und einen unverhältnismäßig viel längeren Aufenthalt nehmen muß oder überhaupt ganz hängen bleibt. Daß mit einer erschöpfend mathematischen Theorie das Interesse an dem Schachspiel in ber hauptsache aufhören ober doch wenigstens einen anderen Charafter annehmen würde, da der Reiz gegen-wärtig gerade darin besteht, daß durch die unermeßlich große Bahl von Kombinationen einer abschließenden Behandlung vorgebeugt ift, fei hier nur beiläufig bemerkt.

Ein Beispiel eines Spiels, das gleichfalls — wenigstens in Deutschland — auf den 64 Feldern des Schachbretts gespielt wird und für das eine abschließende Theorie existiert, ist das unter dem Namen "Schaf und Wolf" bekannte. Für dieses unvergleichlich viel einfachere und nicht im entferntesten fo abwechselungsvolle Spiel läßt sich unter Berücksichtigung aller überhaupt möglichen Fälle zeigen, daß und wie der Führer der als "Schafe" bezeichneten Steine steits gewinnen muß, ein Beweis, den man führt, indem man eine erschöpfende Liste aller nur möglichen Fälle in zwedmäßig sustematischer Unordnung aufstellt und für jeden Fall den resp. die richtigen Züge angibt. Vom Standpunkt des Mathematikers bietet dies Berfahren jedoch kein besonderes Interesse, da keinerlei der Mathematik besonders eigentümliche Schlußweisen dabei zur Anwendung kommen, das Versahren vielmehr einer Art von Statistik sast mehr ähnelt als einem mathematischen.

#### Rapitel I.

# Wettspringen.

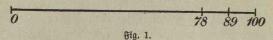
Den Reigen wollen wir eröffnen mit einem ganz besonders einfachen Spiel, dem folgenden:

Eine Person A nennt eine beliebige Zahl, jedoch höchstens 10; eine zweite Person B nennt darauf eine größere Zahl, die mindestens um 1 und höchstens um 10 größer ist als die von A genannte. Dann nennt wieder A eine Zahl, die mindestens um 1 und höchstens um 10 größer ist als die zuvor von B genannte und so abwechselnd fort. Sieger ist derjenige, der gerade 100 erreicht. Läßt sich der Sieg erzwingen und gegebenenfalls: wie und für wen von beiden?

Man kann dem Spiel natürlich auch folgende anschaulichere Einkleidung etwa geben:

Zwei Knaben A und B, von denen jeder höchstens 10 fuß weit zu springen vermag, wollen in abwechselndem Sprunge eine gegebene Bahn von 100 fuß Länge zurücklegen und dabei folgende Regeln beobachten: Jeder muß jedesmal mindestens 1 fuß weit springen. A bezinnt und B springt alsdann von der Stelle aus, bis zu der A gekommen ist, dieser wieder von der Stelle ab, bis zu der B kam usw. (Hierbei wird jedoch, wenn die Sprungweite sich nach Bruchteilen von fuß mißt, nur die nächst kleinere ganze Zahl gerechnet, z. B. statt  $5^3/_4$  f. nur 5 f.) Sieger ist derjenige, der gerade das Ende der Bahn erreicht.

Nach wenigen Versuchen bemerken die Spieler, daß der Zielpunkt 100 mit Sicherheit für benjenigen erreichbar ift, der



zuvor auf 89 gelangt ist (s. Fig. 1). Denn wenn der eine, sagen wir A, gerade bis 89 gekommen ist, so trennt den Gegner B vom Ziel noch eine Distanz, welche seine maximale Leistungssähigkeit noch um 1 Fuß übersteigt. B selbst kann also mit dem nächsten Sprunge das Ziel nicht erreichen; andererseits ist er aber nach der Spielregel verpslichtet, mindestens 1 Fuß weit zu springen. Mag er nun dis 90, 91, 92 . . . oder im äußersten Falle bis 99 springen, in sedem Falle kann A mit dem nächsten Sprunge das Ziel erreichen.

Ist nun das Ziel 100 von 89 aus mit Sicherheit zu erreichen, so ist 89 wieder von 78 aus sicher zu erreichen, und so geht dies offenbar fort durch Stusen von je 11, also durch 67, 56 . . dis 12 und schließlich 1. Hieraus folgt, daß der Sieg erzwungen werden kann und zwar von demjenigen, der bei dem Spiel beginnt. Er muß nur zuerst 1 Juß weit springen, beim nächsten Male auf 12 kommen, dann auf 23 usw.

bis 78, 89 und schließlich 100.

Difenbar läßt sich das Spiel auch dann, wenn für die Länge der Sprungbahn, sowie für die maximale und minimale Sprungweite der beiden Spielenden andere Zahlenwerte festgesetzt werden, entsprechend durchführen. Die Distanz der Stusen, nach welchen man fortzuschreiten hat, um den Sieg zu erzwingen,
— in unserem Falle 11 — ist, wie leicht zu sehen, stetz ebenso groß wie die maximale und minimale Sprungweite des einzelnen zusammengenommen<sup>1</sup>) (in unserem Falle 10+1=11). Ist daher die Länge der Sprungbahn zusällig ein Vielsaches dieser Stusendistanz, so kann also der Sieg von dem beginnenden Spieler (A) nicht mehr erzwungen werden, wohl aber alsdann von dem zweiten Spieler (B). Ist z. B. die Bahn 99 Fuß lang und im übrigen alles wie in dem obigen Falle, so mag A beginnen, wie er will: B kann mit seinem ersten Sprunge auf 11 gelangen, mit seinem zweiten auf 22, . . mit seinem neunten auf 99 und damit also siegen.

Frage 1: Die Länge ber Sprungbahn beträgt 200 Fuß, im übrigen alles wie im ersten Falle oben. A glaubt irrtümlicher=

<sup>1)</sup> Bgl. hierzu eventuell die bei Auflösung von Frage 4 (am Ende des Buches) gemachten Ausführungen.

weise, zunächst wieder (wie im ersten Falle) auf 1 springen zu müssen; wie muß B fortsahren, um den Sieg zu erzwingen?

Frage 2: Wer kann den Sieg erzwingen, wenn der magi= male Sprung des einzelnen 8 Fuß beträgt, als Minimum wieder 1 Fuß festgeset ist und die Bahn 90 Fuß lang ist, und wie ist zu versahren?

Frage 3: Wer kann ben Sieg erzwingen, wenn ber maxis male Sprung 17 dm., ber minimale 1 dm. und die Bahnlänge 150 dm. beträgt?

Frage 4: Wer kann den Sieg erzwingen, wenn der magi= male Sprung 10 Juß beträgt, das Minimum auf 3 Juß fest= gesetzt wird und die Bahn 182 Juß lang ist?

Frage 5: Der maximale Sprung sei 9 Fuß, der minimale 2 Fuß, die Bahnlänge 100 Fuß. Als Sieger gilt dersjenige, der den Gegner zwingt, zuerst das Ziel zu erreichen oder auch zu überschreiten. Der kann den Sieg erzwingen?

<sup>1)</sup> Bei dieser Frage allein soll also zwischen dem Erreichen und Überschreiten des Ziels kein Unterschied gemacht werden, während z. B. bei Frage 4 dieser Unterschied wesentlich ins Gewicht fällt.

#### Rapitel II.

# Das Boß-Puzzle oder Fünfzehnerspiel.

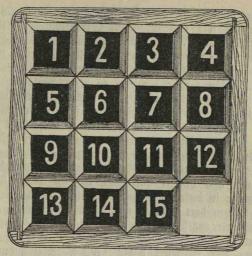
# § 1. Geschichte und Beschreibung des Spiels.

Diese Spiel soll nach einer Angabe die Ersindung eines taubstummen Amerikaners sein. Bald nach seiner Ersindung (1878) verbreitete es sich über die ganze zivilisierte Welt, in den Ländern englischer Junge "Fisteenth Puzzle", in Deutschland "Boss-Puzzle" oder auch "Fünfzehner=Spiel" und in Frankreich "jeu du taquin" (Neckspiel) genannt, und wurde in der ersten Zeit überall mit solchem Eiser gespielt, wie wohl kaum ein anderes Geduldspiel je zuvor. So wird z. B. von Hamburg erzählt, daß man dort die kleinen Kästchen mit den 15 Holzklöhchen selbst in den Pserdebahnwagen erblischen und unruhige Hände darin schieben sehen konnte, daß die Prinzipale in den Handelskontoren über das Puzzlesieber ihrer Angestellten in Verzweislung gerieten und durch Anschläge das Spielen während der Bureauzeit auss strengste verbieten mußten, daß große Turniere veranstaltet wurden usw.

Die Ginrichtung des Spiels ift folgende:

In einem quadratischen Kasten besinden sich 15 mit den Zahlen 1—15 numerierte Steine, während ein weiterer (16.) Platz frei gelassen ist, um ein Verschieben der Steine untereinander zu ermöglichen. Die 15 Steine sind in willkürlicher Ordnung hineingelegt, und die Aufgabe besteht darin, die in der nachstehenden figur 1 angegebene Stellung durch Verschieben der Steine herbeiszusühren.

In vielen Fällen ist es, wie wir sehen werden, unmöglich, die geforderte Stellung, die wir die "normale" nennen wollen,



Big. 1.

herbeizuführen; wir werden alsdann sagen, die Aufgabe sei "unlösbar". Ob die Aufgabe lösbar ober unlösbar ist, wird lediglich von der Anfangsstellung abhängen. Wie entscheiden wir nun, ob bei irgend einer uns gegebenen Ansangsstellung die Aufgabe lösbar ober unlösbar ist und wie erhalten wir im ersteren Falle die Lösung?

## § 2. Sofung der Aufgabe.

Bevor wir die am Ende von § 1 aufgeworfenen Fragen zu beantworten suchen, bemerken wir zunächst noch, daß wir die "Pläze" oder "Felder" des Brettes auch durch die Zahlen 1—16 entsprechend der Figur 1 unterscheiden wollen, so daß also z. B. mit "Plaz 4" beständig der Plaz bezeichnet wird, den in Fig. 1, also in der normalen Stellung, der Stein 4 einnimmt, und "Plaz 16" der äußerste Plaz unten rechts heißt, der in Fig. 1 gerade leer ist. Ferner wollen wir die wagerechten Neihen kurz "Zeilen", die lotrechten kurz "Kolonnen" nennen und erstere von oben nach unten als erste, zweite, dritte, vierte und letztere ebenso, von links nach rechts gerechnet, unterscheiden.

Wir benten uns nun eine beliebige Anfangsftellung und versuchen, ob wir aus ihr burch Berschieben ber Steine bie normale Stellung (Fig. 1) erhalten können. Zu bem 3weck wollen wir folgendermagen verfahren: Bunachft bringe man ben Stein 1 auf Plat 1, falls er nicht etwa schon zufällig bort fteht, und fodann, ohne 1 wieber ju verschieben, ben Stein 2 auf Plat 2. Dies beides ift, wie leicht erkannt wird, burch verhältnismäßig wenig Verschiebungen stets zu erreichen. — Sobann tann man, ohne an ber erften Beile etwas zu verichieben, leicht bie Steine 3 und 4 in bas von ber britten und vierten Kolonne eingenommene achtfelbrige Gebiet bringen, falls fie fich nicht schon in diesem Gebiet befanden. Auf jeden Fall burfen wir also hinfort annehmen, daß die Steine 3 und 4 sich nunmehr in diesem achtfelbrigen Gebiet und zwar auf irgend welchen Blagen bort befinden und bag bas leere Feld gleichfalls biesem Gebiete angehört. Wenn nun bie Steine 3 und 4 nicht etwa bereits zufällig auf ihren normalen Pläten ichon stehen, so konnen wir fie leicht dahin bringen lediglich burch Ber= schiebungen innerhalb unseres achtfelbrigen Gebietes. Es wird nicht erforderlich sein, dies für alle möglichen Stellungen durch= zuführen, sondern wir dürfen uns barauf beschränken, bas Bringip des zu beobachtenden Berfahrens an bem Beispiel eines besonders ungunftigen Falles darzulegen, nämlich desjenigen, bei bem ber Stein 3 auf Blat 4 und Stein 4 auf Blat 3 fteht. Unfer achtfelbriges Gebiet foll also etwa so beschaffen sein, wie es Fig. 2 zeigt.

Wir werden alsdann bei allen Berschiebungen, die wir an Fig. 2 vornehmen, die Steine 6 und 14 unberührt stehen lassen, da wir ihrer nicht bedürsen, werden uns also freiwillig auf das Gebiet der oberen 6 Felder, das uns ausreichende Bewegungsfreiheit gewährt, beschränken. Wollten wir uns aller-

Fig. 2.

bings auf die obersten 4 Felber allein beschränken, so würde, worauf wir noch zurücksommen werden, es uns nicht gelingen, die Steine 3 und 4 an ihre normalen Pläte zu bringen. Aus Fig. 2 leiten wir nun leicht die Stellung Fig. 3 her, indem wir alle 5 Steine des sechsseldrigen Gebietes zweimal, den Stein 5 sogar dreimal,

8	5
3	
4	12
6	14
~.	

Fig. 3.

8	5
4	3
12	i
6	14

im umgekehrten Drehungsfinne des Uhrzeigers derschieben. Durch Verschieben innerhalb der 4 mittleren Felder erhält man aus Fig. 3 leicht Fig. 4. Nun verschiebt man die 5 Steine des sechsfeldrigen Gebietes im Uhrzeigersinne

4 8	4 8
72 5	3
3	5 12
6:14	6 14
Fig. 5.	Fig. 6.

🔾, so baß Stein 4 auf Blat 3 fommt; man erhält so Fig. 5 und bringt nun durch Verschiebungen innerhalb ber mittleren 4 Felber ben Stein 3 auf Platz 7 (Fig. 6). Die jetzige Stellung ber Steine 3 und 4 (Fig. 6) ist nun eine typische; fie ift, wie aus unserem, fogar noch besonders ungunftig gewählten Falle erhellen dürfte, stets zu erreichen, und aus ihr kann man nun sofort ben Stein 4 auf Plat 4 bringen und ben Stein 3 nachziehen auf Plat 3. Damit ift bann auch bie gange erfte Beile bes Spielkaftens in Ordnung gebracht und an ihr wird hinfort nichts mehr geanbert. — Wefentlich bei biefem Berfahren war, daß wir ein fechsfelbriges Rangiergebiet mit einem leeren Felbe gur Berfügung hatten: fo war es uns möglich, nicht nur bie 5 Steine bes fechsfelbrigen Gebietes ber Reihe nach zu verschieben, sondern außerdem innerhalb biefes fechsfelbrigen Gebietes wieder in einem vierfelbrigen Ge= biete mit 3 Steinen und einem leeren Felbe Berichiebungen vorzunehmen. Erft burch die Verbindung diefer beiden Arten von Berschiebungen wird es möglich, wesentliche Beränderungen in bie Stellung hineinzubringen. Mußte man fich lediglich auf ein vierfeldriges Gebiet beschränken, fo würde bei allen Ber= schiebungen bas Bild im wesentlichen ftets basselbe bleiben.

Genau ebenso, wie die erste Zeile, läßt sich nun auch die zweite in Ordnung bringen, wobei man sich mit allen Verschiedungen auf das Gediet der untersten drei Zeilen beschränkt, also die Steine der ersten Zeile nicht mehr berührt, um die dort hergestellte normale Ordnung nicht wieder zu stören. Zusnächst werden dabei natürlich die Steine 5 und 6 leicht auf ihre normalen Pläze gebracht und alsdann hat man in dem Gediet der 6 Felder 7, 8, 11, 12, 15, 16 (s. Fig. 1) in entsprechender Weise zu operieren, wie wir dies oben an den Figuren 2—6 dargelegt haben. Wir dürsen nämlich die obigen

Ausführungen ohne weiteres auf unseren jetigen Fall übertragen: zwar steht uns jest nur ein sechsfeldriger Rangierplat zur Berfügung, jedoch führten wir ja oben mit freiwilliger Selbstbeschränkung gleichfalls alle Operationen auf einem fechs= felbrigen Gebiet aus und zeigten, bag biefes zu genügen vermag. So bringen wir also jett bie Steine 7 und 8 auf ihre nor= malen Blate und haben bamit bie beiben erften Beilen in Ordnung.

In ben beiben letten Zeilen bringt man nun gunächft Stein 13 auf Plat 9 und Stein 9 auf Plat 10 in gang analoger Beife, wie wir oben für die Steine 3 und 4 die entsprechende typische Stellung ber Fig. 6 herbeiführten; nur haben wir jett in den zwei letten Zeilen zu operieren, mabrend es oben die zwei letten Rolonnen waren. Darauf gieht man die Steine 13 und 9 auf ihre normalen Blate. Es bleibt uns bann noch das sechsfelbrige Rangiergebiet ber Bläte 10, 11, 12, 14, 15, 16; wir bringen auf ihm die Steine 10 und 14 - wieber in ber bargelegten Beise - auf ihre normalen Bläte und haben dann nur noch mit einem vierfelbrigen Gebiet gu tun, auf dem die Steine 11, 12, 15 stehen. Durch Ber= ichieben biefer brei Steine fann man naturlich erreichen, bag

2	3	4
6	7	8
10	12	11
14	15	
	6	2 3 6 7 10 12 14 15

15 auf feinen normalen Plat gelangt und zugleich das leere Feld rechts unten fich befindet. Die Steine 11 und 12 werden dabei dann entweder auf ihre normalen Plate fommen ober ber Stein 12 fommt auf Blat 11 und Stein 11 auf Plat 12. Im ersteren Falle ist die Aufgabe gelöft; im letteren Falle haben wir die Stellung ber Fig. 7. Wir konnen unser Resultat so aussprechen.

Satt 1: Mus jeder beliebigen Unfangsftellung läßt fich jedenfalls entweder die normale Stellung (Fig. 1) ober die der Fig. 7 herleiten.

Auf die Frage, ob auch beides zugleich möglich ift, nämlich daß eine Anfangsstellung sich sowohl in die normale Stellung wie in die der Fig. 7 überführen läßt, wollen wir vorläufig noch feine abschließende Antwort geben, sondern uns jest damit beansigen, daß das eine von beiden in jedem Falle erreichbar ift.

## § 3. Die mathematische Theorie des Spiels.

Wir wollen uns nun eine bestimmte Ansangsstellung, z. B. die der Fig. 8, denken. Wir wollen die Zahlen dieser Figur vor=

lesen und zwar in der Reihenfolge, die wir beim Lesen üblicherweise stets beobachten, d. h. in jeder Zeile von links
nach rechts gehend und die Zeilen von
oben nach unten durchlausend. Wir bemerken dann, daß Stein 1 bereits auf
seinem normalen Platz steht; dagegen
steht der nächste Stein, 4, wie wir sagen
wollen, "vor" zwei anderen Steinen,
die bei normaler Stellung aller Steine



bor ihm kommen würden, nämlich vor den Steinen 2 und 3. Bir haben also bei Stein 4, wie wir fagen wollen, zwei Berftoge gegen die Rangordnung. Entsprechend haben wir bei Stein 7, ber vor ben Steinen 3, 5, 2, 6 ftebt, 4 folche Berftoge; bei Stein 13 3. B., ber vor 11, 10, 2, 12, 6 ftebt, 5 Berftoge ufm. Wir erhalten so im ganzen 0+2+4+5+1+1+2+6+6+5+3+2+0+1=38 Berstöße gegen die Rangordnung. Dieje Gefamtzahl aller Berftoge fagt uns nun, ob wir die normale Schlufftellung ber Fig. 1 erhalten konnen oder nicht: ift nämlich die fo erhaltene Bahl, wie in unserem Falle, eine gerade Bahl (hier 38), so ift die normale Schluß= ftellung ber Gig. 1 zu erhalten; die Aufgabe ift alfo lösbar. Ift die betreffende Bahl bagegen eine ungerade, so erhält man die normale Schlußstellung nicht und die Aufgabe ift unlösbar. Boraussetzung ift babei ftets, bag bas leere Felb fich anfänglich rechts unten, also auf Plat 16, befand. Unftatt der unbequemen Bezeichnung "Berftoge gegen die Rangordnung" wollen wir, wie in der Mathematik gebräuchlich, "Inversionen" fagen. Wir sprechen alsbann bas Kriterium, bas wir für bie Lösbarkeit ber Aufgabe soeben und zwar vorläufig ohne Begründung angegeben haben, so aus:

Ariterium: Die notwendige und hinreichende Bebingung dafür, daß eine vorgelegte Stellung mit dem leeren Felde auf Blat 16 in die normale Schlußstellung (Fig. 1) übergeführt werden kann, ift die, daß die An= zahl aller Inversionen für die gegebene Anfangs: stellung eine gerade Zahl ist.

Für die Richtigkeit dieses Ariteriums der Lösbarkeit wollen wir jetzt den Beweis erbringen und legen uns zu dem Zweck zunächst solgende Frage vor: "Wie ändert sich durch Schieben eines Steins die Anzahl der Inversionen?" Die Antwort ist sehr leicht, wenn der Stein in horizontaler Richtung geschoben wird; denn alsdann ändert sich die Anzahl der Inversionen für die betressende Stellung offenbar gar nicht. — Wie ist es dagegen, wenn der Stein in vertikaler Richtung geschoben wird? Diese Verschiedung bedeutet, daß der Stein in der Kangordnung um 3 Plätze vorrückt oder zurücktritt, je nachdem er vertikal nach oben oder nach unten geschoben wird. Die 3 Steine, welche er so überspringt, sei es vorz, sei es rückwärts, mögen die Nummern a, d, c tragen, während der Stein, der geschoben wird, die Kummer x haben soll. (a, d, c, x sind also Zahlen im Gediet von 1 bis 15). Es sind alsdann solgende Fälle zu unterscheiden:

1) x ist größer als jebe ber Zahlen a, b, c; 2) x ist kleiner als jebe ber Zahlen a, b, c;

3) x ist größer als zwei von den Zahlen a, b, c und kleiner als die dritte:

4) x ist größer als eine von den Zahlen a, b, c und kleiner als die beiden anderen.

Im ersten der 4 Fälle entstehen, wenn der Stein x vor die Steine a, b, c rückt, 3 neue Inversionen, weil die Zahlen a, b, c alle kleiner als x sind; springt x hinter a, b, c, so verschwinden dagegen 3 Inversionen von den vorher vorhandenen. Jedenfalls ändert sich also die Anzahl aller Inversionen durch die Verschiedung von x um 3: entweder sie wird um 3 größer oder um 3 kleiner.

Im zweiten der 4 Fälle ist es ganz entsprechend; auch hier ändert sich die Anzahl aller Inversionen um 3, wird um 3 kleiner oder um 3 größer.

Im britten Falle entstehen, wenn x vor die kleineren Bahlen — es seien etwa a und b — rückt, zwar zwei neue Inversionen, jedoch verschwindet gleichzeitig von den früheren Inversionen eine, weil x ja auch vor die größere Zahl e rückt. Der Gesamteffekt ist also der, daß die Anzahl aller Inversionen um 1 größer wird. Rückt x hinter die Zahlen a, b, c, so wird

die Anzahl aller Inversionen um 1 kleiner. In jedem der beiden Unterfälle ändert sich also die Anzahl aller Inversionen um 1.

Im vierten Falle andert fich, wie im britten, gleichfalls

bie Anzahl aller Inversionen jedenfalls um 1.

Wir sehen so, daß durch das Schieben eines Steins die Anzahl aller Inversionen sich nur um 3 oder um 1 ändern kann, sei es daß sie um soviel größer oder um soviel kleiner wird. Dies Resultat sprechen wir so aus:

filfssat: Durch bas horizontale Berschieben eines Steins ändert sich die Anzahl aller Inversionen gar nicht, durch bas vertikale Berschieben bagegen

ftets um eine ungerade Bahl (1 ober 3).

Bir benken uns nun ben leeren Plat auch mit einem Stein besetzt, nämlich mit einem singierten Stein 16. Wir können alsdann sagen, daß ein einzelner Zug, nämlich daß Schieben eines Steins auf den leeren Nachbarplatz, immer in einer Vertauschung des Steins 16 mit einem benachbarten Stein besteht. Stand nun, wie wir dies zunächst annehmen wollen, unser Stein 16 zu Ansang auch auf Feld 16, so muß, damit dies zu Ende wieder der Fall ist, die Anzahl solcher Vertauschungen offenbar eine gerade sein; denn jeder Zug, sei es in horizontaler, sei es in vertikaler Richtung, muß durch einen anderen, genan entgegengesetzt gerichteten wieder gleichsam annulliert werden, soll Stein 16 wieder an den alten Platz zurückstehen. Die Anzahl der Züge, welche eine Stellung in eine andere mit demselben seeren Felde überführen, ist also steiß gerade, und zwar ist offenbar sowohl die Anzahl alser horizontalen Züge, für sich genommen, gerade wie auch die Anzahl alser vertikalen Züge.

Wir resumieren: Von einer Anfangsstellung zu einer Schlußstellung führt, wenn beide das leere Feld auf Platz 16 haben, eine gerade Zahl horizontaler und eine gerade Zahl bertikaler Jüge. Die ersteren verändern die Anzahl der Inversionen gar nicht, die letzteren dagegen jedesmal um eine ungerade Zahl (s. Hilfssat), insgesamt also, da diese Züge selbst in gerader Zahl vorkommen, um eine gerade Zahl. Eine Ansfangsstellung kann daher in irgend eine andere Stellung — immer unter der Voraussetzung, daß bei beiden das leere Feld auf Platz 16 ist — höchstens dann übergeführt werden, wenn die Anzahl ihrer Inversionen sich um eine gerade Zahl unters

icheibet, und sicher bann nicht, wenn biefe Differenz ungerabe ift. Run ift die Anzahl der Inversionen für die normale Schlußftellung (Fig. 1) = 0, für die Schlußstellung ber Fig. 7 bagegen = 1 (Stein 12 steht vor 11). Hieraus folgt, beiläufig gesagt, baß sich die Stellung der Fig. 7 nie in die normale Stellung überführen läßt und daß ebensowenig das umgefehrte möglich ift. Bor allem feben wir aber jest, daß eine gegebene Stellung in die normale Schlufftellung höchftens bann übergeführt werden fann, wenn für die gegebene Stellung die Anzahl ber Inverfionen gerade ift. Diese Bedingung ift also notwendig für bie Überführung in die normale Stellung; fie ift aber auch hinreichend. Denn zugleich folgt aus bem Borftebenden, daß eine Anfangsftellung mit gerader Inversionenzahl in die Stellung Fig. 7 (mit ungerader Inversionenzahl) nicht übergeführt werden kann. Da nun aber jede Stellung entweder in die normale Schlußstellung ober in die der Fig. 7 fich überführen läßt, wie oben gezeigt war (Sat 1), fo folgt, daß bei gerader Inversionen= zahl eine gegebene Stellung ftets in die normale Schlußstellung übergeführt werben tann. — Umgekehrt laffen fich alle Stellungen mit ungerader Inversionenzahl ftets in die Stellung Fig. 7 überführen; benn in die normale Stellung konnen fie nicht gebracht werden, eine ber beiben Schlufftellungen (Fig. 1 ober Fig. 7) ist aber sicher stets möglich. In diesen Fällen — ben "unlösbaren" — ift also die Schlußstellung der Fig. 7 ftets zu erreichen und auch nur in diesen. — Damit ift bas oben (S. 13) angegebene Kriterium in vollstem Umfange bewiesen und zugleich die am Ende von § 2 offen gelaffene Frage bahin beantwortet, daß niemals ein und diefelbe Stellung sowohl in bie normale Schlufftellung wie in die ber Fig. 7 übergeführt werden fann, fondern ftets nur bas eine von beiden möglich ift.

Frage 6: Ift die Aufgabe Fig. 9 lösbar ober unlösbar?

5	16	7	8
1	2	3	4
9	10	13	14
15	12	11	
19 1	Fig	. 9.	The State of

Als Beispiel werbe noch betrachtet diesenige Anfangsftellung, welche sich aus der normalen Stellung ergibt, wenn man die Zahlen der einzelnen Zeilen, statt von links nach rechts, von rechts nach links schreibt und das leere Feld wieder unten rechts annimmt (s. Fig. 10). Die Anzahl der Inversionen ist ungerade (in jeder der drei oberen Zeilen — 6, in der untersten — 3), also läßt sich die Stellung Fig. 10 in die normale Stellung nicht übersühren, wohl aber in die Schlußstellung Fig. 7.

Boraussetzung bei allen vorstehenden Erörterungen war stets, daß das leere Feld auch bei der Anfangsstellung sich auf

4	3	2	1
8	7	6	5
12	11	10	9
15	14	13	

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Fig. 10.

Fig. 11.

Plat 16 befand. Liegt uns eine andere Anfangsstellung vor, so werden wir durch einsache Verschiedungen zunächst bewirken, daß Plat 16 das leere Feld wird. So werden wir z. B. bei der Stellung der Fig. 11 die Steine 1, 2, 3, 7, 11, 15 der Reihe nach verschieden, um Plat 16 leer zu bekommen. Für diese neue Stellung zählen wir alsdann 9 Inversionen; die Anfangsstellung Fig. 11 ist also nicht in die normale, sondern in die Schlußstellung Fig. 7 übersührbar.

daher, von der zweiten Stellung ausgehend, ben umgekehrten ARus 170: Ahrens, Mathem. Sviele.

Weg gehen und ben Stein 16 zuerst mit s, dann mit r und so fort vertauschen und führen so die zweite Stellung in die erfte über. Daraus folgt bann 3. B., bag bie Stellung Fig. 7 fich sowohl in die Stellung Fig. 10 wie in die von Fig. 11, welche beibe ihrerseits in die erstere übergeführt werden konnten, überführen läßt. Da nun alle Stellungen mit ungeraber Inversionenanzahl fich in die Stellung Fig. 7 überführen laffen und diese lettere wieder sowohl in die von Fig. 10 wie die von Fig. 11, so läßt fich also jebe Stellung mit ungeraber Inversionenanzahl sowohl in die Stellung Fig. 10 wie in die von Fig. 11 überführen. — Ferner folgt aus diesem Bringip ber Umtehrung der Überführungen, bag jede beliebige Stellung mit gerader Inversionenanzahl sich in jede beliebige andere Stellung von gleichfalls gerader Inversionenanzahl überführen läft und daß die Stellungen mit ungerader Inversionenanzahl untereinander sich ebenso verhalten. Wir fassen diese Resultate folgendermaßen zusammen:

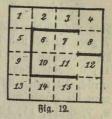
Sat 2: Alle Stellungen, welche — bei einem leeren Felbe auf Plat 16 — eine gerade Anzahl von Inversionen ausweisen, bilden für sich eine Gruppe, so daß von irgend zwei dieser Stellungen die eine in die andere übergeführt werden kann; sie sind alle insbesondere in die normale Stellung überführbar. Ebenso bilden alle Stellungen, welche — bei einem leeren Felde auf Plat 16 — eine ungerade Anzahl von Inversionen ausweisen, eine zweite Gruppe ineinander überführbarer Stellungen; alle Stellungen dieser Gruppe lassen sich in die Stellung der Fig. 10 und ebenso in die der Fig. 11 überführen. Eine Stellung der einen Gruppe kann niemals in eine der anderen übergeführt werden; die Stellungen der zweiten Gruppe sind daher insbesondere niemals in die normale Stellung überzuführen.

## § 4. Das Buggle mit Schranken.

Künstlich erschwert man sich das Spiel, wenn man zwischen einzelnen Feldern Schranken aufführt. Die Schranken können natürlich so errichtet werden, daß keine Aufgabe mehr lösbar

ist. Sie können andererseits aber auch so errichtet werden, daß alle Aufgaben, die zuvor lösbar waren, es auch jetzt trot ber

Schranken noch sind. Ein solches Buzzle-Brett ist z. B. das in Fig. 12 dargestellte, wo die ausgezogenen Linien die Schranken darstellen sollen. Eine Anfangsstellung, die auf dem Brett ohne Schranken sich in die normale Stellung überführen ließ, gestattet dies also auch jetzt noch, und dasselbe gilt bezüglich der Schlußstellung Fig. 7. Man bemerke nämlich zunächst, daß



man alle Steine um je einen Blat verschieben fann, wenn man bie Berichiebungen in folgender Reihenfolge vornimmt (f. Fig. 12): 15, 14, 13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 10, 11, 12. Aber auch innerhalb diefer Reihe läßt fich bie Beranberung vornehmen, bağ ein Stein in biefer Reihe um 2 Blate vorwarts ober rudwarts fpringt. Soll g. B. 4 in biefer Reihe hinter 8 und 7 gurudtreten, so wird man die ganze Reihe fo lange verschieben, bis auf bem quabratischen Rangierplat im Innern, wo jest 6, 7, 10 und 11 fich befinden, die Steine 7, 8 und 4 fteben, mahrend man burch einfaches Berichieben der Steine von den Pläten 11 und 12 ben vierten Plat leer macht. Bringt man bann 4 von Plat 7 nach Plat 11 und schiebt nun die Steine von Blat 8, 4, 3 . . . . nach, bis ber leere Plat wieder zwischen ben Steinen 15 und 12 sich befindet, so ift bas Biel erreicht, bag nämlich an bie Stelle ber obigen Reihe jest: 15, 14, 13, 9, 5, 1, 2, 3, 8, 7, 4, 6, 10, 11, 12 getreten ift. - Cbenfo läßt fich ein Stein in biefer Reihe leicht zwei Plate nach vorwärts bringen.

Durch solche Playänderungen um je 2 Pläze nach vorn ober nach hinten läßt sich nun schließlich dasselbe erreichen wie durch die Verschiebungen auf dem schrankenfreien Brett; dies mag an einem Beispiel gezeigt werden: Die entsprechende Reihe für die Ansanzsstellung der Fig. 8 (S. 13) z. B. wäre, wenn wir, was offendar gestattet ist, 6 einen Play nach rechts schieben:

12, 2, 15, 3, 1, 4, 7, 9, 14, 8, 5, 13, 11, 10, 6.

Läßt man 15 zwei Plätze vorrücken, darauf 14 sechs, dann 13 acht, dann 9 vier, so erhält man:

15, 12, 14, 13, 2, 9, 3, 1, 4, 7, 8, 5, 11, 10, 6.

Rückt dann 12 zwölf Plätze zurück, darauf 5 vier vor und 2 vier zurück, so hat man:

15, 14, 13, 9, 3, 5, 1, 2, 4, 7, 8, 11, 10, 12, 6,

Nun rückt 3 vier Plätze zurück, dann 4 vier Plätze zurück, dann 7 zwei zurück und dann 11 vier zurück — und man erhält die Ordnung: 15, 14, 13, 9, 5, 1, 2, 3, 8, 7, 4, 10, 12, 11, 6. Kückt dann noch 6 zwei Plätze vor, darauf 10 zwei zurück, 12 gleichfalls zwei zurück und 4 zwei vor, so bekommt man die gewünschte Ordnung: 15, 14, 13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 10, 11, 12. Allerdings ist dies Verfahren äußerst umständlich in der praktischen Aussührung; denn jedes Vorrücken oder Zurückgehen um je zwei Plätze erfordert ein Verschieben aller Steine der Reihe, damit eben die betreffenden Steine, deren relative Kangordnung geändert werden soll, zunächst übershaupt nur auf den Kangierplatz gelangen.

#### Rapitel III.

# Solitär- oder Einsiedlerspiel.

### § 1. Spielregel. Aotation.

Über den Ursprung des Spiels ist Sicheres nicht bekannt. Jedenfalls besitzt es bereits ein beträchtliches Alter, wosür z. B. ein Brief Leibniz' aus dem Jahre 1716 als Zeugnis beigebracht werden kann, ein Umstand, durch den das Reichspatentamt jedoch nicht abgehalten wurde, dem Spiel im Jahre 1887 ein deutsches Reichspatent zu erteilen.\(^1\) — Unter den verschiedenen Formen, in denen das Spiel auftritt, überwiegt in Deutschland die eines Kastens, dessen Deckel 33 Löcher ausweist, durch welche Holzpsschen, dessen beisen wird. Die Löcher sind symmetrisch und zwar so, wie Fig. 1 dies zeigt, angeordnet.

Die verschiedenen Löcher werden wir durch eine ähnliche Notation, wie sie surch eine ähnliche Notation, wie sie surch eine such seine Schachbretts üblich ist, unterscheiden und dementsprechend auch jedes Loch sortan quadratisch darstellen, so daß wir auch beliebig von "Löchern" und "Feldern" sprechen werden. Wir tragen in jedes Loch gleich seine Notation ein (s. Fig. 2), wobei die erste Zisser immer die

a de la companya de l

Fig. 1.

Vertikalreihe oder "Kolonne" und zwar von links nach rechts gerechnet, die zweite die Horizontalreihe oder "Zeile", von unten nach oben gerechnet, angibt.

Die einzige Spielregel besteht darin, daß, wenn von 3 in horizontaler oder vertikaler Reihe gelegenen

<sup>1)</sup> Klaffe 77, Nr. 42919.

Cöchern 2 benachbarte mit einem Pflock versehen sind, während das dritte leer ist, alsdann der Pflock aus dem entsernteren der beiden besetzten Cöcher in das leere gesteckt werden darf, wobei aus dem anderen

		37	47	57		
		36	46	56		
15	25	35	45	55	65	75
14	24	34	44	54	64	94
			43			
	Name and Address of the Owner, where the Owner, which is the Owner, whi	-	4,2		_	
		31	41	51		

(mittleren) besetzten Coch, das hierbei übersprungen wird, der Pflock herausgezogen und beiseite gelegt werden muß.

Diese Operation, welche stets das Verschwinden eines Pflockes und für einen anderen eine Platzänderung zur Folge hat, nennen wir kurz einen "Zug", so daß also, wenn zu Anfang z. B. nur das Loch 44 leer ist, nur einer der 4

"Büge"  $\frac{24}{44}$ ;  $\frac{46}{44}$ ;  $\frac{64}{44}$ ;  $\frac{42}{44}$  möglich ift, wo in dieser auch weiterhin stets gebrauchten Bezeichnung der Züge in Form von Brüchen der Zähler das Loch angibt, aus dem ein Pslock sortgenommen, und der Nenner dassenige, in das er gesteckt wird. Zähler und Nenner eines solchen Bruches stimmen natürsich immer entweder in den ersten oder in den letzten Zissern überein, während die beiden nicht übereinstimmenden Zissern sich um 2 unterscheiden; die zwischen den beiden letzteren liegende Zahl und die im Zähler und Nenner gleicherweise vorkommende geben zusammen dann das Loch, über das hinweggesetzt wird, aus dem also ein Pssock verschwindet, in unserem obigen Beispiel bezw. 34; 45; 54; 43.

Die Aufgabe des Spiels besteht gewöhnlich darin, aus 32 besetzen Söchern der Reihe nach alle Psiöcke bis auf einen fortzuschaffen, wobei das zu Anfang leere Coch vielfach das mittlere (44) ist, jedoch auch ein anderes sein kann, und wobei das dem letzen Psiock verbleibende Coch zumeist auch vorgeschrieben ist.

Selbstverständlich brauchen aber zu Ansang nicht alle 32 Löcher besetzt zu sein, sondern etwa nur ein Teil des Bretts, z. B. so, daß die Pflöcke eine bestimmte Figur, ein Quadrat, ein Kreuz oder dgl. bilden, wobei die Aufgabe im übrigen sonst dieselbe ift, also in Entsernung aller Pflöcke bis auf einen besteht.

## § 2. Aufgaben bei teilweise besehtem Brett.

Um in das Wesen des Spiels zunächst etwas einzusühren, besprechen wir eine Anzahl von Aufgaben, in denen nur ein Teil des Brettes besetzt ist und verlangt wird, die Pslöcke dis auf einen zu entsernen. Die in den verschiedenen Figuren mit ihrer Notation angegebenen Felder sind zu Ansang besetzt, der übrige, leere Teil der Bretter kann nach Fig. 2 leicht hinzugedacht werden.

I. Das Kreuz aus 9 Pflöcken.



Fig. 3.

Löfung:  $\frac{43}{41}$ ;  $\frac{45}{43}$ ;  $\frac{24}{44}$ ;  $\frac{44}{42}$ ;  $\frac{64}{44}$ ;  $\frac{41}{43}$ ;  $\frac{43}{45}$ ;  $\frac{46}{44}$ .

II. Das Dreied.

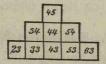


Fig. 4.

Löfung:  $\frac{53}{55}$ ;  $\frac{55}{35}$ ;  $\frac{33}{53}$ ;  $\frac{63}{43}$ ;  $\frac{44}{42}$ ;  $\frac{35}{33}$ ;  $\frac{23}{43}$ ;  $\frac{42}{44}$ 

III. Das Kreuz.

		47		
		46		
25	35	45	55	65
1460		44		Fin
	Page 1	43		
	32	42	52	
	31	41	51	

Fig. 5.

Lösung:  $\frac{31}{33}$ ;  $\frac{51}{53}$ ;  $\frac{43}{63}$ ;  $\frac{41}{43}$ ;  $\frac{33}{53}$ ;  $\frac{63}{43}$ , von hier die Figur der Aufgabe I.

IV. Die Phramide.

			49	1000		
		36	46	56		
	25	35	45	55	65	
14	24	34	44	54	64	74

Fig. 6.

**L**öfung:  $\frac{55}{53}$ ;  $\frac{74}{54}$ ;  $\frac{53}{55}$ ;  $\frac{55}{57}$ ;  $\frac{57}{37}$ ;  $\frac{35}{33}$ ;  $\frac{14}{34}$ ;  $\frac{33}{35}$ ;  $\frac{36}{56}$ ;  $\frac{44}{46}$ ;  $\frac{56}{36}$ ;  $\frac{25}{45}$ ;  $\frac{37}{35}$ ;  $\frac{35}{55}$ ;  $\frac{65}{45}$ .

Selbstverständlich sind aber keineswegs alle Aufgaben dieser Art lösdar; wir beschränken uns in dieser Hinsicht darauf, nur auf den einsachen Fall hinzuweisen, daß anfänglich nur 3 Felder von der in Fig. 7 angegebenen gegenseitigen Lage besetzt sind, gleichgültig wo auf dem Brett diese Figur liegt. Der Leser erkennt dei einem Bersuch sosort, daß man nur einen Pflock fortbringen kann, also zwei übrig bleiben müssen.

#### § 3. Vonbesehtes Brett.

Gewöhnlich besteht die Aufgabe bei unserem Spiel jedoch, wie schon oben gesagt, darin, daß zu Ansang alle 32 Pflöcke in den Löchern stecken, während ein beliedig vorgeschriebenes Loch, von uns weiterhin als das "Ansangsloch" bezeichnet, leer ist, und nun der Reihe nach alle Pflöcke dis auf einen entsernt werden sollen, welch' letzterer dann in einem gleichfalls vorgeschriebenen Loch, weiterhin kurz "Schlußloch" genannt, stecken bleiben soll.

Es sollen für diese Aufgabe — wir wollen sie die "Hauptaufgabe des Spiels" nennen — hier jett eine Reihe von
speziellen Fällen, unterschieden durch "Ansangs-" und "Schlußloch", besprochen werden. Diese Aufgaben mag der Leser hier
vorläusig nur als willkürlich aus einer großen Zahl herausgegriffene Beispiele ansehen; der nächste Abschnitt wird uns jedoch zeigen, daß unsere Auswahl keine willkürliche, sondern
vielmehr so getroffen war, daß mit den jett folgenden 16 Fällen
im grunde genommen die Gesamtheit aller überhaupt lösbaren
Fälle der "Hauptaufgabe des Spiels" erschöpft ist.

I. Anfangsloch: 44; Schlußloch: 44.

 $\frac{64}{44}; \; \frac{56}{54}; \; \frac{44}{64}; \; \frac{52}{54}; \; \frac{73}{53}; \; \frac{75}{73}; \; \frac{43}{63}; \; \frac{73}{53}; \; \frac{54}{52}; \; \frac{35}{55}; \; \frac{65}{45}; \; \frac{15}{35}; \; \frac{45}{25}; \; \frac{37}{35}; \; \frac{57}{37};$ 

 $\frac{34}{36}; \frac{37}{35}; \frac{25}{45}; \frac{46}{44}; \frac{23}{43}; \frac{31}{33}; \frac{43}{23}; \frac{51}{31}; \frac{52}{32}; \frac{31}{33}; \frac{14}{34}; \frac{34}{32}; \frac{13}{33}; \frac{32}{34}; \frac{34}{54}; \frac{64}{44}$ 

II. Anfangsloch: 44; Schlußloch: 74.

Wie I, nur ftatt des letten Zuges:  $\frac{54}{74}$ .

III. Anfangsloch: 74; Schlußloch: 74.

Der erste Zug von II ift durch  $\frac{54}{74}$  zu ersehen.

IV. Anfangsloch: 74; Schlußloch: 47.

 $\frac{54}{74}; \; \frac{52}{54}; \; \frac{44}{64}; \; \frac{73}{53}; \; \frac{74}{54}; \; \frac{54}{52}; \; \frac{51}{53}; \; \frac{31}{51}; \; \frac{32}{52}; \; \frac{43}{63}; \; \frac{51}{53}; \; \frac{63}{43}; \; \frac{34}{32}; \; \frac{13}{33}; \; \frac{15}{13};$ 

 $\frac{43}{23}; \frac{13}{33}; \frac{32}{34}; \frac{56}{54}; \frac{75}{55}; \frac{54}{56}; \frac{57}{55}; \frac{37}{57}; \frac{36}{56}; \frac{45}{65}; \frac{57}{55}; \frac{65}{45}; \frac{24}{44}; \frac{44}{46}; \frac{25}{45}; \frac{45}{47};$ 

V. Anfangsloch: 74; Schlußloch: 14.

Bunächst die ersten 24 Züge von IV, dann  $\frac{34}{36}$ ;  $\frac{55}{35}$ ;  $\frac{57}{55}$ ;

 $\frac{25}{45}$ ;  $\frac{55}{35}$ ;  $\frac{36}{34}$ ;  $\frac{34}{14}$ 

VI. Anfangsloch: 54; Schlußloch: 54.

 $\frac{56}{54}, \frac{75}{55}, \frac{54}{56}, \frac{74}{56}, \frac{53}{54}, \frac{73}{55}, \frac{43}{53}, \frac{43}{53}, \frac{51}{53}, \frac{63}{43}, \frac{33}{53}, \frac{41}{43}, \frac{53}{33}, \frac{23}{43}, \frac{31}{33}, \frac{43}{23}, \frac{31}{23}, \frac{31}{23}$ 

 $\frac{13}{33}; \ \frac{15}{13}; \ \frac{25}{23}; \ \frac{34}{32}; \ \frac{13}{32}; \ \frac{32}{34}; \ \frac{45}{25}; \ \frac{37}{35}; \ \frac{57}{37}; \ \frac{34}{36}; \ \frac{37}{35}; \ \frac{25}{35}; \ \frac{56}{36}; \ \frac{44}{46}; \ \frac{36}{56}; \ \frac{56}{54}$ 

VII. Anfangsloch: 54; Schlußloch: 57.

Der lette Zug von VI ift burch  $\frac{55}{57}$  zu ersetzen.

VIII. Anfangsloch: 57; Schlußloch: 57.

Der erste Zug von VII ist durch  $\frac{55}{57}$  zu erseben.

IX. Anfangsloch: 54; Schlußloch: 24. Die ersten 27 Züge von VI, alsdann  $\frac{56}{54}$ ;  $\frac{54}{34}$ ;  $\frac{46}{44}$ ;  $\frac{42}{24}$ .

X. Anfangsloch: 57; Schlußloch: 24. Der erste Zug von IX ist zu ersehen burch  $\frac{55}{57}$ .

XI. Anfangsloch: 57; Schlußloch: 51.

Bunächst die ersten 6 Züge von X; die 24 folgenden leiten sich aus den entsprechenden von VI durch Spiegelung an der horizontalen Mittellinie her; der letzte Zug ist  $\frac{58}{51}$ .

XII. Anfangsloch: 24; Schlußloch: 24.

 $\begin{array}{c} \underline{44}, \ \underline{36}, \ \underline{15}, \ \underline{34}, \ \underline{37}, \ \underline{57}, \ \underline{56}, \ \underline{45}, \ \underline{37}, \ \underline{57}, \ \underline{36}, \ \underline{45}, \ \underline{37}, \ \underline{32}, \ \underline{32}, \ \underline{33}, \ \underline{32}, \ \underline{33}, \ \underline{33}, \ \underline{32}, \ \underline{33}, \ \underline{31}, \ \underline{31}, \ \underline{51}, \ \underline{52}, \ \underline{43}, \ \underline{32}, \ \underline{33}, \ \underline{32}, \ \underline{33}, \ \underline{34}, \ \underline{31}, \ \underline{31}$ 

XIII. Anfangsloch: 55; Schlußloch: 55.

 $\frac{58}{55}, \frac{78}{58}, \frac{75}{78}, \frac{65}{68}, \frac{52}{54}, \frac{78}{58}, \frac{54}{58}, \frac{51}{58}, \frac{51}{58}, \frac{31}{51}, \frac{32}{52}, \frac{43}{68}, \frac{51}{58}, \frac{63}{48}, \frac{45}{65}, \frac{57}{55}, \frac{65}{45}, \frac{35}{45}, \frac{47}{35}, \frac{55}{35}, \frac{25}{45}, \frac{37}{35}, \frac{45}{25}, \frac{15}{35}, \frac{13}{15}, \frac{23}{25}, \frac{34}{36}, \frac{15}{35}, \frac{36}{34}, \frac{33}{58}, \frac{34}{54}, \frac{53}{55}$ 

XIV. Anfangsloch: 55; Schlußloch: 52. Der lette 8ug von XIII ist zu ersetzen burch  $\frac{54}{52}$ .

XV. Anfangsloch: 52; Schlußloch: 52. Der erste Zug von XIV ist zu ersetzen durch  $\frac{54}{52}$ .

XVI. Anfangsloch: 52; Schlußloch: 25. Die 28 ersten Züge von XV, bann  $\frac{43}{23}$ ;  $\frac{44}{24}$ ;  $\frac{23}{25}$ .

Selbstverständlich kann es für jede der vorstehenden Aufgaben noch andere und zumeist sogar recht viele andere Lösungen

geben. Die von uns angegebenen erheben keinen Anspruch barauf, einen Vorzug vor anderen zu besitzen. Ihre Auswahl war nur durch systematische Gesichtspunkte bestimmt, und unter den sonst existierenden Lösungen werden sich gewiß viel elegantere vorsinden. Sehr viel besser gegliedert und daher übersichtlicher ist z. B. solgende Lösung für Aufgabe I:

 $\frac{42}{44}; \frac{63}{43}; \frac{51}{53}; \frac{43}{63}; \frac{23}{43}; \frac{44}{42}; \frac{31}{33}; \frac{41}{43}; \frac{43}{28} \parallel \frac{13}{33}; \frac{34}{32}; \frac{15}{13}; \frac{25}{23}; \frac{13}{33}; \frac{32}{34} \parallel \frac{73}{53}; \frac{54}{52}; \frac{75}{73}; \frac{65}{63}; \frac{73}{53}; \frac{52}{54} \parallel \frac{45}{65}; \frac{57}{55}; \frac{37}{57}; \frac{54}{56}; \frac{57}{55}; \frac{65}{45}; \frac{46}{44}; \frac{44}{24}; \frac{36}{34}; \frac{24}{44}; \frac{36}{24}; \frac{24}{24}; \frac{36}{24}; \frac{36}{$ 

wobei die durch 2 vertikale Striche markierten Stellen sich nach den jeweiligen Konfigurationen als natürliche Einschnitte in dem Gange der Lösung darstellen.

## § 4. Theorie des Spiels.

Auf die Theorie des Spiels foll hier nicht weiter einge= gangen werben, als daß wir ihre wichtigften Resultate — ohne mathematische Begründung — angeben. Bu bem 3mede befi= nieren wir zunächft als "fongruente" Felber zwei Felber von ber Art, bag von bem einen ju bem anbern ein übergang möglich ift durch ein- ober mehrmaliges aberspringen von je amei in horizontaler oder vertitaler Richtung liegenden Felbern. Rongruent sind so 3. B. die Felder 15 und 45, da man von 15 gu 45 burch überspringen von zwei zwischengelegenen Felbern (25 und 35) gelangt; ebenso ift 42 zu 45 kongruent und besgleichen 42 zu 15 (45 ift Zwischenftufe für biefen letteren Übergang). Ferner foll jedes Feld auch als mit sich felbst kongruent angesehen werben. - Die mathematische Untersuchung lehrt nun, bag auf unserem Brett ber 33 Felber eine Löfung für die im vorigen Baragraphen erörterte "Sauptaufgabe" bes Spiels höchftens bann möglich ift, wenn Anfangs = und Schlugloch fo bor= geschrieben murben, bag fie "tongruent" in bem an= gegebenen Sinne find.

Die soeben angegebene Vorbedingung für die Lösbarkeit der Hauptaufgabe, nämlich die Kongruenz von Anfangs- und Schlußfeld, ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend; d. h. immer, wenn sie erfüllt ist, ist auch die Hauptaufgabe lösbar, und das Shstem der 16 in § 3 gegebenen Beispiele birgt bereits für alle möglichen Fälle, in denen die Hauptaufgabe überhaupt lösbar ist, wenigstens je eine Lösung in sich. Dies erkennt man solgendermaßen: Man beachte zunächst, daß die Figur des Bretts dei Drehung um einen oder mehrere rechte Winkel mit sich selbst zur Deckung kommt, und serner, daß sie in bezug auf die horizontale und die vertikale Mittellinie shmmetrisch ist, so daß also dei Spiegelung an einer dieser die eine Hälfte des Brettes mit der anderen sich decken würde. Man sieht so, daß die bei diesen Spiegelungen und Drehungen zusammenfallenden Felder offendar für unsere Aufgabe äquivalent sind, wonach sich solgende Gruppen von unterseinander äquivalenten Feldern ergeben:

- 1) 13; 15; 37; 57; 75; 73; 51; 31.
- 2) 14; 47; 74; 41.
- 3) 25; 36; 56; 65; 63; 52; 32; 23.
- 4) 24; 46; 64; 42.
- 5) 35; 55; 53; 33.
- 6) 34; 45; 54; 43.
- 7) 44.

Gibt also z. B. Nr. II in § 3 eine Lösung für 44 als Ansangs- und 74 als Schlußloch, so läßt sich danach sofort eine Lösung für die Aufgabe: "44 Ansangsloch, 14 Schlußloch" angeben, da die Ünderung nur einer Spiegelung an der vertikalen Mittellinie entspricht. Ebenso ergibt sich z. B. aus Nr. VII (54 Ansangsloch, 57 Schlußloch) sofort eine Lösung für "45 Ansangs- und 75 Schlußloch", da die Änderung einer Bierteldrehung in der umgekehrten Drehungsrichtung des Uhrzeigers operbunden mit nachfolgender Spiegelung an der vertikalen Mittellinie, entspricht.

Sodann erhält man aus der Lösung für Anfangsloch a und Schlußloch b sofort eine Lösung für Anfangsloch b und



Fig. 8.

Schlußloch a, indem man das Lösungsschema der ersteren Aufgabe umkehrt, d. h. die Brüche in umgekehrter Reihenfolge (vom hinteren zum vorderen Ende) liest. Daß in der Tat diese Beziehung stattsindet, soll hier unter Berzicht auf einen allgemeinen Beweiß nur an dem Beispiel eines besonders einsachen Spielbrettes plausibel

gemacht werden, nämlich an dem der Fig. 8, das wir, um eben einen möglichst einsachen Fall zu haben, einmal für einen Moment unserem gewöhnlichen Spielbrett substituieren wollen. Es sei A als Ansangs, E als Schlußloch vorgeschrieben; die Lösung der Hauptaufgabe ist alsdann:  $\frac{E}{A}$ ;  $\frac{D}{B}$ ;  $\frac{A}{E}$ . Rehren wir nun die Reihenfolge der 3 Brüche um, schreiben also:  $\frac{A}{E}$ ;  $\frac{D}{B}$ ;  $\frac{A}{A}$ , so ist dies die Lösung der Hauptaufgabe sür den Fall: E Ansangs und A Schlußloch. Zwei Aufgaben, welche in dieser Beziehung der reziproken Vertauschung von Ansangs und Schlußloch zueinander stehen, wollen wir "reziproke" nennen.

Man sieht nun zunächst, daß unter den 16 Lösungen des § 3 sieben enthalten sind, in denen das Ansangsloch zugleich Schlußloch ist, und zwar sind diese 7 so gewählt, daß jede der obigen 7 Gruppen von Feldern (S. 28) einen Repräsentanten hierfür gestellt hat, wie solgende Zusammenstellung zeigt:

Nr. der Gruppe von Feldern	Das aus der Gruppe ausgewählte Feld	Nr. der betr. Aufgabe in § 3
1	57	VIII
2	74	III
3	52	XV
4	24	XII
5	55	XIII
6	54	VI
7	44	I

Die Hauptaufgabe bei gleichem Anfangs und Schlußloch ist somit durch die Lösungen des § 3 für alle 33 Felder erschöpfend gelöst. So bleiden also nur die Fälle, in denen Anfangs und Schlußloch verschieden sind, wodei wir zunächst wiederholen, daß Anfangs und Schlußloch stets, damit überhaupt Lösungen existieren, "kongruent" in dem angegedenen Sinne sein müssen. Nun sieht man, daß alle zu Feld 44 (Gruppe 7) kongruenten Felder gerade in Gruppe 2 stehen, und diese Felder von Gruppe 2 sind auch unter sich kongruent und besigen kongruente Felder in den anderen 5 Gruppen nicht. Die Gruppen 2 und 7 bilden also eine gewisse Gemeinschaft in der Art, daß wenn das Ansangsloch dieser Gemeinschaft entsnommen wird, auch das Schlußloch ihr entnommen werden

muß, wofern die Hauptaufgabe überhaupt lösbar sein soll. Offensbar ergeben sich innerhalb dieser Gemeinschaft nur folgende wesentlich verschiedene Fälle von Aufgaben (bei ungleichem Anfangs und Schlußloch):

Anfangsloch	Shlußloch
44	74
74	47
74	14

Diese Aufgaben sind aber in § 3 unter II, IV, V be= handelt. Rechnet man dazu noch die Nummern I und III für bie Falle eines gleichen Anfangs= und Schlufloches, jo umfaffen also die Nummern I-V alle wesentlich verschiedenen Fälle, welche innerhalb ber von ben Felbergruppen 2 und 7 gebilbeten Ge= meinschaft vorkommen können. Für jeben anderen Fall läßt fich aus einem biefer 5 die Löfung fofort bedugieren burch bie Begiehungen der Symmetrie (Drehungen und Spiegelungen) und ber Regiprozität (Bertauschung von Anfangs- und Schlugloch). - Entsprechend bilben die Gruppen 1, 4 und 6 eine Gemeinicaft: zwar ift nicht jedes Feld biefer Gemeinschaft jedem anderen fongruent, aber jedes ju einem Felde biefer Gemeinschaft tongruente Feld gehört wieder ber Gemeinschaft an. Die verichiebenen Falle, die fich innerhalb diefes Gebietes ergeben, find in § 3 durch die Rummern VI-XII erledigt. Schließlich bilben die Gruppen 3 und 5 eine britte Gemeinschaft, ber in § 3 bie Lösungen XIII-XVI zugehören.

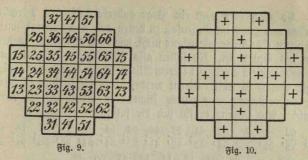
Frage 7: Gib eine Lösung an für den Fall: 14 Anfangsloch, 41 Schlußloch.

Frage 8: Gib eine Lösung an für den Fall: 52 Anfangsloch, 55 Schlußloch.

Frage 9: Gib eine Lösung an für den Fall: 46 Anfangsloch, 13 Schlußloch.

# § 5. Das frangösische Spielbrett (37 Felder).

Wir wollen noch einige Worte über das in Frankreich übliche Spiel mit 37 Löchern in der Anordnung der Fig. 9 sagen. Hier ist die Hauptaufgabe des Spiels bei vollbesetztem Brett und einem beliebigem Anfangsloche nicht mehr unbedingt lösbar, sondern nur dann, wenn



das Anfangsloch eines der in Fig. 10 mit einem Kreuz versehenen 16 Felder ist. Diese 16 Felder gehören 3 versschiedenen Gruppen an im Sinne unserer obigen Ausführungen auf S. 28. Als Repräsentanten dieser 3 Gruppen können wir betrachten die Felder 13, 42 und 45. Ist zunächst 18 Ansangsloch, so ergibt sich für die Hauptaufgabe etwa folgende Lösung:

Schlußloch ift hier also 45. Hätten wir als letzten Zug — statt  $\frac{43}{45}$  — gewählt:  $\frac{44}{42}$ , so wäre 42 Schlußloch geworden. Nehmen wir von diesen beiden Lösungen, von denen die eine 45, die andere 42 als Schlußloch ausweist, die reziproten, so erhalten wir zwei Lösungen, beide mit 13 als Schlußloch, und mit 45 bezw. 42 als Ansangsloch. 45 und 42 waren aber unsere Repräsentanten der beiden anderen Gruppen von Ansangsseldern, so daß für diese hiermit zugleich die Existenz von Lösungen bewiesen ist. Es ist damit also gezeigt, daß die in Fig. 10 mit Kreuzen versehenen 16 Felder als Ansangslöcher möglich sind, d. h. daß, wenn eins dieser 16 Felder Ansangsloch ist, während das Schlußloch nicht vorgeschrieben sein soll, die Hauptausgabe sedensalls eine Lösung besitzt. — Auf einen Beweis dasür, daß die übrigen 21 (in Fig. 10 seeren) Felder als Ansangslöcher überhaupt nicht möglich sind, verzichten wir hier.

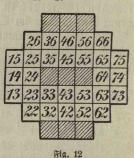
Es mag hier noch ein Baar anderer Aufgaben betrachtet werden und zwar im Gegenfat zu benen bes § 2 einmal folche, bei benen eine beftimmte Figur nicht, wie bort, Ausgang, sonbern Biel bes Spiels ift. Es follen alfo zunächft als erfte Aufgabe bei vollbesetztem Brett mit leerem Mittelfeld die Pflode der Spielregel gemäß so weit entfernt werben, daß die in Fig. 11 burch die Schraffierung angegebene Figur bes Buchstaben E übrig bleibt. Als Lösung ergibt fich die folgende:

 $\frac{42}{44}, \frac{62}{42}, \frac{54}{52}, \frac{73}{53}, \frac{52}{54}, \frac{41}{43}, \frac{22}{42}, \frac{43}{41}, \frac{34}{32}, \frac{54}{34}, \frac{56}{54}, \frac{75}{55}, \frac{54}{56}, \frac{74}{54}, \frac{46}{44},$ 

 $\frac{26}{46}; \frac{34}{36}; \frac{15}{35}; \frac{14}{34}; \frac{13}{38}; \frac{47}{45}; \frac{66}{46}; \frac{45}{47}.$ 

	26	46	56	66	1
15	25			65	
14	24	87777	100	64	_
13	23	43	53	63	73
	22	42	52	62	





Mis zweites Beispiel foll behandelt werden die Aufgabe, bei vollbesettem Brett und leerem Mittelfelb alle Löcher bis auf die in Fig. 12 schraffierten zu leeren. Lösung:

 $\frac{42}{44}, \frac{22}{42}, \frac{34}{32}, \frac{13}{32}, \frac{54}{33}, \frac{56}{34}, \frac{56}{56}, \frac{36}{56}, \frac{34}{36}, \frac{32}{34}, \frac{41}{43}, \frac{62}{42}, \frac{43}{41}, \frac{54}{52}, \frac{73}{53}, \frac{52}{54},$ 

 $\frac{15}{35}, \frac{26}{46}, \frac{34}{36}, \frac{14}{34}, \frac{46}{44}, \frac{75}{55}, \frac{66}{46}, \frac{54}{56}, \frac{74}{54}, \frac{37}{35}, \frac{56}{36}, \frac{35}{37}$ 

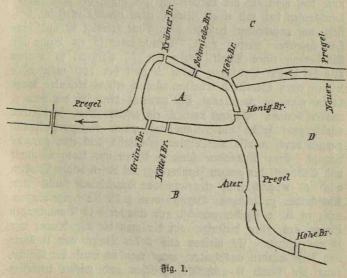
### Kapitel IV.

# Wanderungsspiele.

# § 1. Enlersche Wanderungen.

(Die Pregelbruden bei Ronigsberg.)

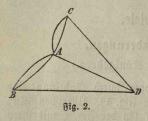
Der Pregel bilbet bei Königsberg durch Gabelung eine Insel, welche "Kneiphof" heißt (A in Fig. 1). Über den Fluß führen an dieser Stelle im ganzen 7 (in der Fig. 1 mit ihren Namen bezeichnete) Brücken, davon 5 auf die Insel selbst, wozu als sechste und siehente die "Holzbrücke" und die "Hohe Brücke" (s. Fig. 1)



Anus 170: Ahrens, Mathem. Spiele.

hinzutreten. In den dreißiger Jahren des achtzehnten Jahrhunderts wurde nun die Frage aufgeworfen, ob es möglich sei, die 7 Brücken hintereinander, jede aber nur einmal, zu passieren, eine Frage, die auch den großen Mathematiker Leonhard Euler interessiert und zu weitergehenden Untersuchungen angeregt hat.

Die Königsberger Aufgabe ift nicht lösbar, wie man leicht folgendermaßen erkennt: Ersegen wir die Gebiete A, B, C, D durch Punkte und die Brücken durch Linien, so



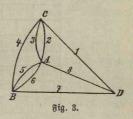
erhalten wir das Diagramm der Fig. 2. Wir können unsere Aufgabe dann so aussprechen: Die 7 Linien der Fig. 2 sind hintereinander zu durchlausen und zwar jede eins, aber auch nur einmal; dabei dürsen die Punkte A, B, C, D besiedig oft passiert werden. Nun münden in A 5 Linien, in B deren 3

und ebenso in C und D je 3, also in jedem der 4 Punkte jedenfalls eine ungerade Anzahl von Linien. Man benke sich nun, daß man auf der Wanderung jede Linie, die man gerade burchlaufen hat, mit einem Zeichen, etwa einem Querftrich, versieht, um anzudeuten, daß die betr. Linie erledigt ift und binfort gemieden werden muß. Wenn man fo im Laufe ber Wanderung einen Bunkt, sagen wir A, paffiert, so werben also bei biefem Durchgang burch A zwei der bort mundenden Linien einen Querftrich erhalten, nämlich erftens biejenige, langs beren man zu A gelangt ift, zweitens bie, auf ber man A wieder verläßt. Paffiert man A ein zweites Mal, so scheiden wieder zwei folche Linien aus; zusammen bei zwei Durch= gangen burch A also vier Linien, jedenfalls ftets eine gerade Anzahl. Eine Ausnahme hiervon bilben nur Ausgangspunkt und Endpunkt ber gangen Banderung; bei diefen beiben Bunkten wird es möglich sein, eine ungerade Anzahl von Linien gum Ausscheiden zu bringen. Beginnt man z. B. die gange Wanderung in B, fo icheibet zunächst nur eine ber 3 in B munbenben Linien aus, eben biejenige, auf ber man bie Wanderung bon B aus antritt. Es bleiben also 2 der Linien von B übrig und diese murben ausscheiden, wenn man im Laufe der Wanderung ben Buntt B nochmals erreichen und wieber verlaffen

würde. — Ebenso würden z. B. die 3 in C mündenden Linien zum Verschwinden gebracht werden, wenn man auf der Wanderung zunächst C einmal passierte (2 Linien scheiden aus) und später die ganze Wanderung in C beschlösse (1 Linie scheidet aus). — Wan sieht also, daß zwei Punkte mit ungeraden Anzahlen von Linien die Lösdarkeit der Ansgabe keineswegs beeinträchtigen würden: man hätte nur den einen der beiden Punkte als Aussgangspunkt der Wanderung zu nehmen und den andern als Endpunkt. Aun haben wir aber in unserem Königsberger Fall vier Punkte mit ungeraden Anzahlen von Linien und daher ist die gestellte Ausgabe unlösdar.

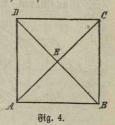
Besteht bagegen auch noch eine Berbindung zwischen B und C, wie eine solche jetzt tatsächlich durch eine in der Fig. 1 links (ohne Namen) verzeichnete Eisenbahnbrücke hergestellt ist, so lassen sich diese 8 Brücken in einem zusammenhängenden Zuge passieren. Es münden alsdann nämlich in den Punkten B und C (s. das jetzige Diagramm in Fig. 3) je 4 Linien und

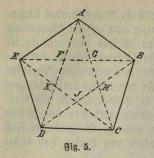
in A und D 5 resp. 3 Linien; die beiden letzteren Punkte müssen daher zum Anfangs= und Endpunkt des Linienzuges genommen werden. Ein solcher Linienzug ist z. B. der durch die Fig. 3 angegebene, wo die beisgesetzten Zissern angeben, in welcher Reihenfolge die 8 Linien durchlausen werden können.



Um noch einige weitere Beispiele anzusühren, so erkennt man sosort, daß die Seiten und Diagonalen eines Quabrats sich auch nicht in einem, sondern erft in 2 Zügen durchlausen lassen, weil wir (f. Fig. 4) hier 5 Punkte haben, von denen 4

je 3 Linien aussenden. Man müßte also, um alle Linien zu durchwandern, etwa eine erste Wanderung von A nach B, von dort nach C, dann nach E und darauf nach B unternehmen und sodann eine zweite von C nach D, dann nach E, darauf nach A und schließlich nach D. Erst durch diese zwei Wanderungen lassen A sich alle Linien ie einmal durchlaufen.



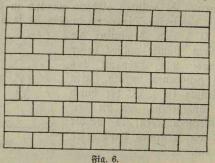


Dagegen läßt sich ein 5-Eck mit allen seinen Diagonalen in einem Zuge durchlaufen, weil in allen Punkten je 4 Linien münden (s. Fig. 5). Die Bahn der Durchwanderung kann hier sogar geschlossen werden, d. h. man kann die Wanderung in ihrem Ausgangspunkt beenden, weil hier keinerlei Punkte mit einer ungeraden Anzahl von Linien vorkommen. Eine

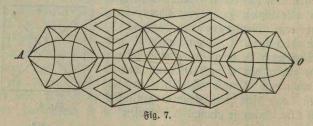
solche geschloffene Bahn ist 3. B.:

### ABCDEFGBHJDKFAGHCJKEA.

Könnte eine Spinne in dem nachfolgenden (Fig. 6) Stück Mauerwerk sämtliche Fugen in einem Zuge, jede gerade einmal,



burchwandern? Die Antwort lautet offenbar "nein", weil in allen Kreuzungspunkten je 3 Linien münden. Dagegen läßt sich die geforderte Wanderung z. B. für das Linienshstem der Fig. 7 aussühren, weil nur zwei Punkte, A und O, mit un-



gera den Anzahlen von Linien vorkommen. Bei der praktischen Ausführung einer solchen Durchlaufung hat man nur darauf zu achten, daß, wenn man sich alle bereits durchlaufenen Linien fortgenommen denkt, die nächste Linie niemals so gewählt wird, daß durch ihre Fortnahme eine Zerfällung des Systems eintritt, vielmehr zuvor alle anderen von dem betreffenden Punkt ausgehenden Linien durchlaufen werden.

## § 2. Samiltoniche Wanderungen.

## (Gine Rundreife burch die deutschen Universitätsftadte.)

Während es im vorigen Paragraphen sich darum handelte, die Linien eines Linienspliems zu durchwandern und zwar jede ein- und auch nur einmal, wobei die Areuzungspunkte besiebig oft passiert werden dursten, soll jeht eine Aufgabe gestellt werden, bei der alle Punkte des Systems ein- und nur einmal zu passieren sind, während die Linien besiebig oft, d. h. gar nicht oder einmal, durchwandert werden. Wir geben unserer Aufgabe solgende Form:

Ein angehender Studiosus, der sich über die Wahl seiner alma mater nicht schlüssig werden kann, will seiner Mulus-ferien zu einer Orientierungssahrt durch die Universitätsstädte des Deutschen Reiches verwenden und erst dann seine Wahl treffen. Für die Reise sollen nur die auf unserer Karte!) (fig. 8) angegebenen Candzesp. Wasservuten benutzt werden und zwar soll jede Stadt ein-, aber auch nur einmal passiert werden. Die Reise soll eine "Aundreise" sein, d. h. zum Ausgangspunkt zurücksühren.

Im folgenden wollen wir die 20 Orte abgekürzt durch ihre 2 ersten Buchstaben bezeichnen, also Berlin z. B. durch Be usw.

<sup>1)</sup> Die jüngste deutsche Universität, Münster, der übrigens zu einer vollständigen Universität immer noch die eigentlich medizinische Fakultät sehlt, ist hierbei aus einem Grunde, den der Leser nach Lektüre dieses ganzen Baragraphen (s. besonders den Schluß S. 45/46) leicht erkennen wird, außer Betracht gelassen und soll auch bei allen serneren Aufgaben dieses Abschnitts außer Betracht bleiben.

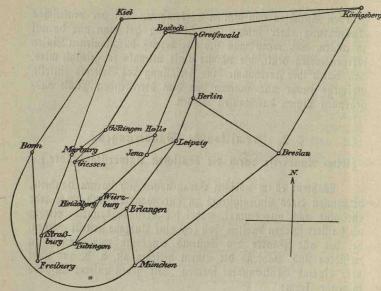


Fig. 8.

Unsere Karte (Fig. 8) ist nun so eingerichtet, daß in jedem der 20 Orte 3 Wege münden, z. B. in Berlin einer von Breslau, ein zweiter von Leipzig und der britte von Greifswald. Ersforderlich für eine vollständige Kundreise durch alle 20 Städte sind immer nur je 2 dieser 3 Wege, nämlich einer für die Ankunst und der andere für die Absahrt, so daß also von den 3 Kommunikationswegen jeder Station immer gerade einer undenuht bleiben wird. Man wird somit von allen 30 Straßen unseres Plans 10 auszumerzen haben und zwar so, daß jede der 20 Stationen gerade einen Anschluß verliert; der Kest des Plans gibt dann eine vollständige Kundreise, die an beliedigem Punkte begonnen werden kann und ebendort auch beschlossen wird. Entsernt man z. B. die Kouten:

Be-Gr

Ro-Kö

Ki—Ma Br—Mü

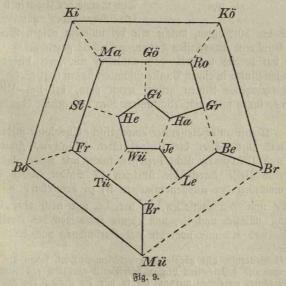
Dr—Mu

Er-Le

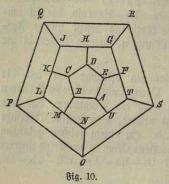
Gi—Gö
Bo—Fr
Ha—Je
St—He
Tü—Wü,

wodurch jede der 20 Stationen je eine Verbindung verliert, so bleibt, wenn man etwa bei Be beginnt, folgende Rundreise übrig: Be —Br—Kö—Ki—Bo—Mü—Er—Tü—Fr—St—Ma—Gö—Ro—Gr—Ha—Gi—He—Wü—Je—Le—Be resp. die in umzgekehrter Richtung erfolgende. — Natürlich besitzt unsere Aufgabe an sich zahlreiche weitere Lösungen, wovon späterhin die Rede sein wird.

Da es für unsere Betrachtungen offenbar nur auf die Berbindungen zwischen den 20 Orten, nicht aber auf deren geographische Lage ankommt, so wird ein Diagramm, das nur auf diese Verbindungen Rücksicht nimmt, eine bessere Übersicht gewähren als die Karte der Fig. 8. Zu einem solchen gelangen wir leicht, wenn wir solgendes beachten: Etwa in der Mitte unserer Fig. 8 sehen wir ein Fünseck Gi—Ha—Je—Wü—He—Gi.



An jebe ber 5 Seiten dieses Fünsecks legt sich wieder ein Fünseck an, 3. B. an die Seite Ha—Je das Fünseck Ha—Je—Le—Be—Gr—Ha, und ebenso legt sich an die anderen 4 Seiten je ein Fünseck. Stellen wir dies alles rein schematisch dar, so kommen wir schließlich zu dem Diagramm der Fig. 9, wobei der Leser sich leicht überzeugt, daß die Art der Verbindungen zwischen den 20 Stationen in Fig. 9 genau dieselbe ist wie in Fig. 8. — Ein Leser, der etwa an der Fig. 9 ein



geographisches Ürgernis nehmen möchte, sei auf das Diagramm der Fig. 10 hingewiesen, wo die 20 Punkte durch die ersten 20 Buchstaben des Alphabets bezeichnet sind, ohne daß ihnen eine bestimmte geographische Bedeutung beigelegt ist. — Noch durch einen anderen unwesentlichen Umstand untersicheiden sich die beiden im übrigen ganz gleich beschaffenen Diagramme der Figuren 9 und 10: Wir haben nämlich in

Fig. 9 die 10 Routen, welche wir bei unserem obigen Beispiel einer Rundreise ausgelassen hatten, gestrichelt gezeichnet 1). Der Leser hat bereits bemerkt, daß natürlich nie zwei dieser gestrichelten Linien in einem Punkte zusammenstoßen (vgl. S. 38/39); die ausgezogenen Linien geben, wenn man, dei Be—Br besginnend, ihnen folgt, natürlich unsere oben angegebene Kundreise.

Wenn unser Reisender evangelische Theologie studieren will und daher die Universitäten München, freiburg und Würzburg nicht beziehen kann, wie wäre alsdann eine Reise durch die übrigen 17 Städte (unter Vermeidung der ausgenommenen 3) zu bewirken?

Da Fr und Wü fortfallen, so hat Tü nur noch eine Berbindung, nämlich nach Er, und ebenso Bo wegen bes Fortsalls von Fr und Mü nur noch die eine Verbindung nach Ki. Die

<sup>1)</sup> Weiterhin, also abgesehen von diesem Beispiel, sollen die außgezogenen und gestrichelten Linien der Fig. 9 natürlich als durchaus gleichberechtigt angesehen werden, ebenso wie die Linien der Fig. 10.

Reise ist also nur dann in der vorgeschriebenen Weise aussührbar, wenn sie zufällig in Tü oder Bo begonnen wird. Ist Tü der Ausgangspunkt, so ist die Reise so einzurichten, daß Bo der Endpunkt wird und umgekehrt. Keinensalls kehrt man also zum Ausgangspunkt zurück.

Frage 10: Gib ein wirkliches Beispiel einer folchen Reise durch die 17 Orte an!

Frage 11: Will ber Keisende sich dem Studium der katholischen Theologie widmen, so kommen außer den schon genannten Universitäten München, Freiburg und Würzburg nur noch Breslau, Bonn, Tübingen und Straßburg, welche je zwei theologische Fakultäten besigen, in Betracht. Ift eine Keise durch diese 7 Orte (unter Fortlassung aller übrigen 13) möglich und wie? Wie ist es, wenn man die jüngste kath.-theologische Fakultät, Straßburg, fortläßt?

Frage 12: Gib alle Routen für eine Reise durch die zehn mittels und süddeutschen nichtpreußischen Universitäten an (unter Ausschluß der übrigen 10 natürlich)!

Frage 13: Dasselbe, wie in Frage 12, für die 9 preußischen Universitäten und Kostock! — Ist eine Reise durch die 9 preußischen Universitäten allein möglich resp. durch wie viele höchstens?

Nach diesen speziellen Fragen, deren Beantwortung wir dem Leser überlassen durften, wollen wir uns wieder der allgemeinen Betrachtung unseres Linienspstems zuwenden. Die Betrachtung der Diagramme lehrt uns, daß die Struktur unseres Linienspstems eine überall homogene ist: Längs jeder der 30 Linien stoßen zwei Fünseke zusammen 1); in jedem der 20 Punkte tressen drei Linien zusammen. Alle Punkte des Neges sind daher völlig gleichberechtigt, die äußeren wie die inneren. Eine

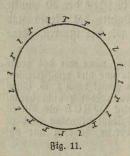
<sup>1)</sup> Auch für die äußeren Linien gilt dies, wenn wir das große Fünfect OPQRS (1. Fig. 10) mitrechnen und uns dies gewissermaßen als Müdseite des Papierblatts denken. Dieses grenzt dann z. B. längs der Linie QR an das Fünseck QJHGR (man stoße sich nicht daran, daß JHG als gerade Linie, also das Fünseck QJHGR als Viereck gezeichnet ist; wir hätten die Linie JHG ebensogut gebrochen zeichnen können, jedoch kommt es darauf hier gar nicht an, jondern nur auf die topologischen Verhältnisse.

Wanberung (f. Fig. 10), die, bei A beginnend, mich der Reihe nach durch alle Punkte führt, würde mich daher auch, wenn ich sie 3. B. bei G oder bei S begönne und nach denselben Grundsähen wie die erstere durchführte, wieder durch alle Punkte hindurchführen. Dies ist eine unmittelbare Folge der vollskommenen Gleichmäßigkeit in der Struktur des Shstems. Ein allgemeines Rezept für die Durchwanderung aller 20 Punkte läßt sich nun leicht geben: Beginnen wir (s. Fig. 9) z. B. bei Br und gehen zunächst nach Kö, so stehen und für die weitere Fortsehung zwei Wege, einer rechts nach Ki und der andere links nach Ro, zur Versügung. Drücken wir das Einschlagen des Weges rechts durch ein r, das des linken durch ein 1 aus, so sührt und die Besolgung der Regel

#### rrrlllrlrlrrrlllrlrl

stets durch alle Punkte des Netzes. Wir würden also für unser Beispiel in Kö den Weg rechts nach Ki, dort wieder rechts nach Bo, dort abermals rechts nach Mü, dann links nach Er, wiederum links nach Tü, abermals links nach Fr, dann wieder rechts nach St, links nach Ma usw. zu wählen haben. Wan erhält dann in unserem Falle gerade die S. 39 angegebene Rundreise, nur mit anderem Ausgangspunkt, indem die dortige zweite Station jetzt die erste ist, was aber offenbar unerheblich ist, da beide Reisen ja Rundreisen, also in sich geschlossen sind. Die nicht durchlausenen 10 Strecken sind natürlich gerade die in Fig. 9 gestrichelten.

Wir erhalten so eine geschlossene, alle 20 Punkte umfassende Bahn. Da wir nun diese Bahn ebensogut auch in umgekehrter Richtung, sowie auch von irgend einem anderen ihrer 20 Punkte aus durchlaufen können, so sieht man, daß



unsere obige Vorschrift ein Zyklus sein muß, den wir daher auch in der Form der Fig. 11 schreiben wollen, und ferner, daß wir eine richtige Lösung bei beliebigem Ausgangspunkt stets erhalten, wenn wir unserem Zyklus Fig. 11 an beliebiger Stelle einen Einschnitt geben und dann den von ihm angegebenen Weg beschreiben. Wir könnten daher z. B. unser Rezept auch so schreiben:

Burben wir, wieder mit bem Anfang Br-Kö, hiernach ver= fahren, fo erhielten wir eine andere Rundreise, nämlich Br-Kö—Ro—Gö—Gi—He—Wü—Tü—Fr—St—Ma—Ki—Bo— Mü-Er-Le-Je-Ha-Gr-Be-Br. - Man erkennt fo. baß, wenn die erften beiben Stationen vorgeschrieben find, ftets noch eine Anzahl verschiedener Rundreisen infolge der verschiedenen Borichriften, die in dem Buklus Fig. 11 fteden, möglich find. Benn man nun alle biese verschiebenen Formen bes Buflus Fig. 11 erschöpft, wobei zu beachten ist, daß der Zyklus in zweierlei Richtungen gelesen werden, also jede Borschrift umgekehrt werben darf, so erhält man, wie leicht zu sehen, bei zwei vorgeschriebenen Anfangsstationen 20 Rundreisen.

Sind die 3 erften Stationen vorgeschrieben, & B. Be-Br-Mü, fo wird man nicht mehr jebe in ber Fig. 11 ftedende Borschrift verwenden können, in unserem Falle 3. B. nicht alle biejenigen, bie mit 1 beginnen. Es gibt bann nur halb fo viele Rundreisen wie zuvor, da eben alle mit 1 beginnenden Borschriften ausscheiden und nur alle mit r beginnenden verbleiben. (Die mit 1 beginnenden Borschriften sind bei der völligen Symmetrie bes ganzen Systems ebenso zahlreich wie bie mit r anfangenden). Die Zahl ber Rundreisen ist also jest 10. Wir fonnten biese Betrachtungen leicht fortseten und jest den Fall der vorgeschriebenen 4 erften Stationen ins Auge faffen, wollen uns jedoch begnügen, die Resultate in tabellarischer Busammenftellung anzugeben:

Bahl der vorgeschriebenen ersten Stationen.	Zahl der Rundreisen.		
1.	30.1)		
2.	20.		
3.	10.		
4.	6 ober 4.		
5.	4 ober 2.		
6.	3, 2, 1 ober 0.		
7.	2, 1 oder 0.		
8 oder mehr.	1 ober 0.		

<sup>1)</sup> hierbei find zwei Rundreifen, die fich nur durch die Durch= laufungerichtung untericheiden, für eine gezählt; anderenfalls ware in ber erften Beile, für die allein bies in Betracht tommt, 60 ftatt 30 au feten.

Dabei geben diese Zahlen nicht nur die Zahl der aus den Borsschriften der Fig. 11 resultierenden Rundreisen an, sondern diese Zahlen sind auch identisch mit den Zahlen aller übershaupt existierenden Rundreisen der betressenden Art; denn der Zyklus der Fig. 11 umfaßt alle überhaupt möglichen. Ob die Zahlen der obigen Tabelle richtig sind, mag der Leser prüfen an der Hand der Beispiele von

Frage 14: Gib an, auf wie viele und welche Arten sich die folgenden Reise-Anfänge zu vollständigen Rundreisen ergänzen lassen:

- a) Mü-Er-Le-Je;
- b) Be-Br-Mü-Er;
- c) Ha-Gi-Gö-Ma-Ki;
- d) St—Fr—Bo—Mü—Er;
- e) Le—Je—Ha—Gi—Gö—Ma;
- f) Ha-Gi-Gö-Ma-St-Fr.

Es könnte natürlich neben dem Anfang auch eine Endstation vorgeschrieben werden, wobei denn von der Forderung einer Kundreise, b. h. einer zum Ausgangspunkt zurücksührenden Koute, zumeist wird abgesehen werden müssen. Jedoch wird man schon, wenn nur die drei ersten Stationen vorgeschrieben sind, nicht eine beliebige Endstation vorschreiben dürsen. Bei dem Ansange Be—Le—Je kann beispielsweise Ha nicht Endstation sein, da dann wenigstens eine Station stets unberührt bliebe, z. B. Br bei solgender Koute: Be—Le—Je—Wü—He—Gi—Gö—Ma—St—Fr—Tü—Er—Mü—Bo—Ki—Kö—Ro—Gr—Ha.

Ist bagegen 3. B. He—Gi—Ha als Ansang und Ki als Endstation vorgeschrieben, so gibt es 4 Lösungen, wie man leicht so erkennt: Auf He—Gi—Ha folgt als Fortsetzung entweder Je oder Gr. Im ersteren Falle muß auf Je notwendig Wü folgen, da dieses, bei bereits aufgehobener Berbindung nach He, sonst übrig bleiben würde. Bon Wü geht es nach Tü. Man hat also, wenn Je 4. Station sein soll, den Ansang He—Gi—Ha—Je—Wü—Tü. Man tut gut, diesenigen Strecken zu markieren, die außer den bereits passierten für die Fort-

setzung ausgeschieben sind, nämlich bisher: He—St; Gi—Gö; Ha—Gr; Je—Le; Wü—He. Man erkennt so, daß, wenn man von Tü nach Er fortschreitet, man von hier weiter nach Le gehen muß, weil anderenfalls wegen des Fortsalls der Strecke Le—Je sonst Le ganz unberührt bliebe. Aus ähnlichen Gründen müßte man, wenn man von Tü nach Fr fortschritte, fortsahren St—Ma—Gö—Ro—Gr; hierbei würde jedoch, da Ki Endpunkt ist, entweder Bo oder Kö ganz übrig bleiben. Die Fortschung Tü—Fr ist also unbrauchdar und es bleibt nur die andere: Tü—Er—Le. In dieser Weise ist die Betrachtung sortzusehen und man erhält schließlich die Lösung:

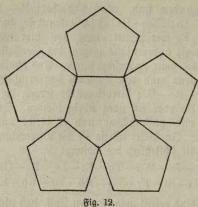
Entsprechend erhält man für den Fall, daß nicht Je, sondern Gr an vierter Stelle steht, 3 und zwar folgende Lösungen:

$$\label{eq:control_equation} \begin{array}{c} \operatorname{He-Gi-Ha-Gr-Be-Br-K\"o-Ro-G\"o-Ma-St-Fr-} \\ \operatorname{T\"u-W\"u-Je-Le-M\"u-Bo-Ki.} \end{array}$$

Zusammen gibt es also 4 Lösungen für den Ansang He—Gi—Ha mit Ki als Endpunkt.

Frage 15: Bei manchen beliebig begonnenen Routen sitt man wohl schon nach einigen Stationen ganz fest und muß daher die Reise ganz abbrechen; bei der wievielten Station kann dies frühestens eintreten?

In historischer Hinsicht sei noch bemerkt, daß unser Spiel von dem berühmten englischen Mathematiker Hamilton ersunden ist, der seinem Spiel allerdings eine andere Einkleidung als die unserige gab. Hamilton ließ den Reisenden eine Reise außssühren über alle Ecken eines Körpers, der in der Mathematik unter dem Namen des Dodekaeders bekannt ist. Es ist dies ein Körper, der 20 Ecken und 30 Kanten besitzt und von 12 sünseckigen Flächen begrenzt wird. Eine anschauliche Vorstellung



dieses Körpers vermag die Fig. 12 zu geben. Wird diese Figur etwa aus Pappe ausgeschnitten, so ist der Leser oder die Leserin sofort imstande, daraus eine Art Korb zu nerfertigen, beffen Bodenfläche das innere Fünfeck ift, während die 5 übrigen Fünfede umzubiegen und etwa aneinanderzunähen wären, um bann bem Korb als Seitenflächen zu bienen. Denkt man sich bann auf diefen Rorb einen zweiten ebenfolchen umgekehrt aufgestülpt, also mit dem einen oberen Korbrand auf den anderen oberen Korbrand, so entsteht ein Dodekaeder. Als morphologisches Diagramm bieses Körpers mit seinen 20 Eden, 30 Ranten und 12 fünfedigen Begrenzungsflächen können bann unsere Figuren 10 und 9 bienen, woraus ber Lefer die Ibentität unferer Aufgabe mit ber Samiltonichen erfennt.

# Kapitel V.

# Dyadische Spiele.

# § 1. Die Reifie der Votenzen der Jafit 2.

Bon ber Erfindung des Schachsfpiels und beffen angeblichem Erfinder Siffa Ibn Dahir ergählt ein alter orientalischer Schrift= steller folgende Legende: Der indische König Shihram wurde über bas Spiel, bas zu seiner Unterhaltung von Siffa erfunden war, von lebhafter Bewunderung und Freude erfüllt; er befahl, Schachbretter in den Tempeln aufzustellen, und betrachtete bas Spiel als die beste Sache, welche man lernen konne, ba es eine Unleitung gur Kriegstunft, eine Ehre für bie Religion und bie Belt und bas Fundament aller Gerechtigfeit fei. Um bem Er= finder seine Dankbarkeit zu bezeigen, fagte er gu ihm: "Bitte mich um alles, was Du begehreft." "Dann wünsche ich," ant-wortete Sissa, "daß ein Weizenkorn auf das erste Feld des Schachbretts, zwei auf bas zweite gelegt und die Bahl ber Rörner fortwährend verdoppelt werbe, bis bas lette Feld erreicht fei: welches bies Quantum auch fein möge, ich wünsche es zu befommen." Sierbei ftellte fich nun heraus, bag bas Getreibe aller königlichen Speicher und felbst bes ganzen Landes nicht ausreichen würde, diefes Berlangen, bas bem Konige ursprüng= lich außerorbentlich bescheiben vorgekommen war, zu befriedigen. Als bem Könige Shihram dies gemeldet wurde, sprach er zu Siffa: "Dein Scharffinn, einen folden Bunfch auszudenken, ift noch bewundernswerter als Dein Talent im Erfinden bes Schach= fpiels."

In der Tat würde sich, da das Schachbrett 64 Felder  $(8\times8)$  hat, eine ungeheuer große Zahl von Weizenkörnern ergeben, nämlich für alle 64 Felder zusammen die 20 stellige Zahl

#### 18 446 744 073 709 551 615.

eine Rörnermenge, die ausreichen wurde, um bas gange fefte Land ber Erbe bis zu einer Sohe von faft 1 cm. zu bebeden. Die Rahlen wachsen, durch bie Berdoppelung von Feld zu Feld, natürlich sehr schnell und nehmen schließlich ungeheuer große Berte an. — Diese Tatsache bes ungeheuren Bachstums bei fortgesetter Berdoppelung benutte einmal eine in München er= icheinende Zeitung ber vormärzlichen Zeit, "Die Deutsche Tribune", zu einem seinerzeit vielbelachten Wite: 1) Das Blatt wußte fich gegenüber den beständigen Benfurplacereien nicht anders zu helfen, als bag es bie vom Benfor geftrichenen Artifel tropdem abdruckte. Natürlich wurde es nun mit Geldstrafe belegt und zwar wurde, da bie Zeitung bies Berfahren fortfette, die Gelbbuße von Fall zu Fall verdoppelt. Da brachte die "Tribüne" eines schönen Tages einen Artikel, in dem genauer bargelegt wurde, daß das Ministerium ein Mittel erfunden habe, um die bayerischen Staatsschulden in Jahr und Tag zu beden. Es brauche nur mit der angeordneten jedesmaligen Berdoppelung der Gelbstrafen in der begonnenen Weise fortzufahren. Die Beiterkeit war allgemein, und die baberische Regierung fah fich veranlagt, zu anderen Mitteln zu greifen, verzichtete fogar auf ben Versuch, die Gelbstrafen, die bereits eine unerschwingliche Sohe erreicht hatten, einzutreiben - und ber bagerifche Staat hat so seine Staatsschulben bis zum heutigen Tage behalten.

Kehren wir zu bem Fall der Weizenkörner auf dem Schachbett zurück und schreiben wir für die einzelnen Felder die Zahlen der Körner hin, so erhalten wir eine Keihe von Zahlen, die so beginnt: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, womit wir nur erst für ein Viertel aller Felder des Schachbretts die betreffenden Zahlen angegeben haben Die Zahlen dieser Keihe, von denen jede sich aus der vorhergehenden durch Multiplikation mit 2 ergibt. (2 × 8 = 16), nennt man die Potenzen der Zahl 2, und zwar

<sup>1)</sup> Ludwig Salomon, "Geschichte bes Deutschen Zeitungswesens", Bb. III, p. 450.

bezeichnet man die Zahl 2 selbst als die erste Potenz von 2, die Zahl  $4=2\times 2$  als die zweite, die Zahl  $8=2\times 2\times 2$  als die dritte Potenz der 2 usw. Man schreibt dies auch solgendermaßen:

Aus Gründen der Analogie wird man alsdann die erste Zahl der obigen Reihe, nämlich 1, die nullte Potenz der 2 nennen und entsprechend auch: 20 — 1 schreiben müssen.

Bu welch' großen Bahlen bie Potengen von 2 bei weiterer Fortsetzung der obigen Reihe sehr bald werben, mag auch noch folgendes Beispiel veranschaulichen: angenommen, es passiere um Mitternacht ein Berbrechen, etwa ein Mord; ein Augenzeuge teile bies in der erften Biertelftunde 2 anderen Menschen mit und jeber dieser in ber nächsten Biertelstunde wieder 2 anderen, noch nicht benachrichtigten uff., so ware bereits bis 71/2 Uhr die gange Menschheit davon unterrichtet. Die wirkliche numerische Rechnung soll hier nicht burchgeführt werden, doch würde ber Lefer, wenn er bieje leicht ausführbare Rechnung unternimmt, finden, daß um 71/2 Uhr bereits ca. 2000 Millionen Menschen bon bem Geschehnis benachrichtigt sein konnten, also mehr als bie gesamte Menschheit ausmacht. Um 7 1/4 Uhr durfte jedoch ber Nachrichtendienst noch nicht eingestellt werben; benn alsbann wären erft ca. 1000 Millionen Menschen benachrichtigt. In ber nun folgenden Biertelftunde würden dann, falls es bis zu 2000 Millionen Menschen gabe, rund 1000 Millionen benach= richtigt werden, also ebenso viele wie in ben vorhergehenden 71/4 Stunden zusammen.

Die zusett angegebene Tatsache beruht auf einer besonderen Eigenschaft, welche die Keihe der Potenzen von 2 ausweist. Um diese Eigenschaft besser zu erkennen, wollen wir links vor unsere Keihe noch eine 1 schreiben, so daß die Keihe also beginnt: 1, 2, 4, 8, 16, 32. In dieser Keihe ist nun jede Zahl ebenso groß wie alle in der Keihe vorhergehenden zusammenz genommen, 3. B. 1+1+2=4, sodann 1+1+2+4=8.

Gilt dies aber für den Anfang, also 3. B. bis 8, so gilt es auch stets weiterhin, wie der Leser sofort aus der Schreibweise

sieht, wenn er bedenkt, daß nach dem Bildungsgesetz resp. der Definition der Reihe auf 8 die Jahl  $2\times 8=16$ , auf 16 wieder  $2\times 16=32$  usw. folgt. Lassen wir nun die zur Aushilse hinzugenommene erste Eins wieder fort, so ist die Summe der Jahlen bis zur 8 (mit Ausschluß dieser) nicht mehr =8, sondern nur =7, also um 1 kleiner als die in der Reihe folgende Potenz 8, und wir haben daher das Resultat:

Sat 1: In der Reihe der Potenzen der Zahl 2 ist jede Zahl um 1 größer als alle vorhergehenden zusammengenommen.

Damit haben wir ben Grund bafur erfannt, bag in bem oben betrachteten Beifpiel in der letten Biertelftunde ebenfo= viele Menschen von dem betreffenden Ereignis benachrichtigt werden konnten wie in allen vorhergehenden 29 Biertelftunden zusammengenommen, wenn wir von ber Differeng 1 einmal absehen, ba fie bei den großen gahlen nicht ins Gewicht fällt. Aus dem= selben Grunde gehören, wenn wir noch einmal auf unser früheres Beispiel zurückgreifen dürfen, auf bas 64. Felb bes Schachbretts ebensoviel Beizenkörner refp. genau gesprochen: noch ein Korn mehr als auf die erften 63 Felber zusammengenommen. Grund unferes Sates wurde man baber, wenn die Gefamtzahl ber Beigenkörner aller 64 Felber auszurechnen mare, biefe Abbition aller 64 Bahlen nicht einzeln ausführen, sondern natürlich nur die Bahl ber Körner des letten Felbes berechnen. Diese Bahl, vermindert um 1, ift dann zugleich bie Summe ber Körner von ben übrigen 63 Felbern.

Die Reihe ber Potenzen der Zahl 2 spielt eine gewisse Rolle in der Uhnentasel des einzelnen Menschen: der Stammbaum des einzelnen Menschen weist auf 2 Eltern, 4 Großeltern, im allgemeinen 8 Urgroßeltern usw. Denkt man sich diese Reihe von Generation zu Generation fortgeführt und rechnet man auf das Jahrhundert nur 3 Generationen, so erhält man für den Beginn der christlichen Zeitrechnung eine Uhnenzahl des jehtlebenden Menschen, welche ungeheuer groß ist, zwar der

Bahl ber Beizenkörner auf dem Schachbrett noch nicht gleichkommt, jeboch über biefe Bahl fogar noch erheblich hinausgeht, wenn man bie Berechnung ber Uhnenzahl etwa bis zum Beginn ber römischen Zeitära ausbehnt. So groß mare also bereits die Bahl der Uhnen jebes einzelnen Menschen, die aller jett lebenden Menschen gusammengenommen also vermutlich noch beträchtlich größer. Bebedten nun bie Beigenforner bes Schachbretts bereits bie gange feste Erbe bis zu ber Sohe von fast 1 em., fo werben also bie weniger genügsamen, aber nicht minder gahlreichen Uhnen eines jettlebenden Menschen zur Beit ber Erbauung Roms feinenfalls überhaupt Blat auf ber feften Erbe gefunden haben. Wenn wir alfo nicht annehmen wollen, daß unfere Borfahren gum großen Teil Baffer- ober Luftbewohner waren, fo ftehen wir hier vor einem Ratfel, das um fo feltfamer ericheinen muß, als von fo beifpiellofer Übervölkerung fein Chronift, feine Über= lieferung uns berichtet. — Der Lefer hat natürlich fofort er= faunt, daß wir hier bas Opfer eines Trugschluffes geworben find. Der Schlüffel, ber uns ben icheinbaren Biberfpruch er= ichließt, ift leicht gefunden: wenn auch jeder Mensch 2 Eltern haben muß und weiter - wenigftens in ben Rulturftaaten, in benen Berbindungen zwischen Geschwistern gesetlich verboten find - 4 Großeltern haben wird, fo find boch bie weiteren Bahlen, nämlich 8 für die Angahl ber Urgroßeltern ufm., nur Maximalzahlen, die nicht erreicht zu werden brauchen und in den ferneren Generationen bei weitem nicht erreicht werden. Gin extrem gemähltes Beispiel mag bies veranschaulichen: Es feien A, a und B, b zwei Chepaare, wobei burch bie großen Buchftaben - auch weiterhin - bie Manner, burch bie fleinen die Frauen bezeichnet fein mogen. Aus ber erften Ghe mogen zwei männliche Nachkommen C, D hervorgeben, aus ber zweiten zwei weibliche e, d, mas wir fo andeuten wollen:

$$\begin{array}{ccc}
A & & B & b \\
 & & & \\
C, D & & c, d
\end{array}$$

Nun mögen C und c einerseits und D und d andererseits eine Ehe eingehen. Die Nachkommenschaft sei angegeben durch

$$\begin{array}{ccc} C & & & D & d \\ & & & & \\ E, F & & & e, f. \end{array}$$

E möge nun mit seiner Base e eine Ehe eingehen, wie in den meisten Staaten zulässig, und F ebenso mit seiner Base f. Gehen aus der ersten Ehe G, H hervor, aus der zweiten g, h und schließen diese wieder Ehen mit einander (G mit g; H mit h), so haben die Kinder dieser Ehen 4 Großeltern (E, e, F, f), jedoch auch nur 4 Urgroßeltern (C, c, D, d) und auch nur 4 Ururgroßeltern (A, a, B, d). Natürlich hätten wir diese Bersahren noch beliedig weiter sortsehen können und wir sehen also, daß den oden angegebenen hohen Maximalzahlen die Zahl 4 als Minimalzahl für die Anzahl der Ahnen der entsernteren Generationen gegenübersteht Die wirkliche Zahl wird im allgemeinen in den Grenzen zwischen diesem Minimals und dem Maximalwert schwanken, ohne daß die theoretisch erreichbaren Grenzwerte praktisch auch nur im entserntesten je erreicht werden.

Nachbem wir uns foeben burch bas ichnelle Bachstum ber Potenzen einer Bahl zu einem Trugschluß hatten verleiten laffen, mag jest noch ein Berfahren aus bem Geschäftsleben ermähnt werben, bei bem bas ichnelle Bachstum ber Botengen einer Babl eine wichtige Rolle fpielt und bas im Grunde genommen nur auf einer einseitigen Berkennung bieses schnellen Bachstums beruht. Das Berfahren, bas wir meinen, ift bekannt unter bem Namen des Sydras oder Schneeballs oder Lawinenspitems und machte auch in Deutschland bor einigen Jahren viel von fich reben, bis Urteile des Reichsgerichts folche Beranftaltungen, die eine Rombination von Ausspiel- und Raufgeschäft barftellen, bei Fehlen obrigfeitlicher Erlaubnis für unftatthaft erklärten. Wir wollen die Beschreibung bes Berfahrens hier gang unseren borftebenben Ausführungen anpassen und es, von allem für unsere Amede unwesentlichem Beiwert losgelöft, fo angeben: Gin Raufmann, sagen wir ein Fahrradhändler, fündigt an, daß bei ihm jeder= mann ein Fahrrad im Werte von 150 Mf. für 50 Mf. erwerben konne. Der Reflektant A, ber fich an ben Raufmann wendet, erhalt von diesem gegen Zahlung von 50 Mt. 2 Coubons ober Anteilicheine1), Die mit einer bestimmten Rummer

<sup>1)</sup> In Wirklichkeit pflegt die Zahl der zusammengehörigen Anteilsscheine eine größere, wohl mindestens 4, zu sein, wodurch das Geschäft bei oberstäcklicher Prüfung für den Käufer der Ware natürlich einen noch vorteilhafteren Anschein erhält.

versehen find und die A an zwei andere Bersonen abzugeben versuchen foll mit ber Berpflichtung, daß biefe Berfonen, nennen wir sie B und C, auch je 50 Mt. an den Kaufmann einsgahlen. Wenn diese Einzahlungen erfolgt sind, so erhält A das versprochene Fahrrad. B und C bagegen jeder gleichfalls zwei Anteilscheine, die fie nun in berfelben Beife weitervertreiben follen wie A die seinigen. Wir wollen, wie wir ben Fall überhaupt gang ichematisch unseren Zweden entsprechend gugeftutt haben, annehmen, bag A ber einzige primare Couponentnehmer ift, also ber einzige, ber unmittelbar seine Coupons von dem Raufmann bezieht, und wollen weiter annehmen, daß er fie im Laufe einer Boche absett. B und C, die burch Ber= mittelung bon A Coupons erhalten haben, mogen biefe im Laufe ber zweiten Woche abseten, ihre 4 hintermanner die ihrigen wieder im Laufe ber britten Woche und fo mag bies immer weiter geben. Das Reichsgericht, bas bei Erörterung biefer Dinge an einigen Stellen — nicht immer glücklich mathematisch wird, meint, "die Berbreitung ber Coupons wurde, theoretisch betrachtet, ins Unermegliche fortschreiten."1) Der Lefer wird dem hohen Gericht entgegenhalten, daß, fo lange alle Coupons von einer Zentrale aus versandt werden, von einer "Unermeglichkeit" gewiß teine Rebe fein tann, jumal jeder Coupon eine bestimmte Nummer tragen muß, die im Um= lauf befindliche Anzahl also zu jeder Zeit haarscharf "ermeglich" ift. Bermutlich foll allerdings mit diefem Ausbruck, ber freilich gegen bie beim Gebrauch ber Begriffe bes Unendlichen refp. Unermeglichen zu beobachtende Borficht entschieden verftößt, nur gejagt werben, daß die fich ergebenden Bahlen fehr groß werden, und in der Hinsicht ist der Leser, wenn er sich des obigen Beispiels von der Berbreitung einer Nachricht erinnert, in der Lage, sofort anzugeben, daß in dem von uns angenommenen Falle am Ende der 30. Woche die gesamte Menschheit mit Coupons versehen ware. Nehmen wir an, daß Berlin 3. B. der Ausgangspunkt des Unternehmens ift und alle Coupons folange in Berlin selbst abgesetzt werden, bis jedermann bort versehen ift, so würde nach etwa 20 Wochen bieser Zustand eingetreten sein. Bon da ab würde fich die Couponverbreitung lawinenartig fort=

<sup>1)</sup> Urteil b. 14 Febr. 1901; f. Entscheibungen bes Reichsg. in Straffachen, Bb. 34, p. 141.

pflanzen und bereits nach weiteren 5 Wochen ungefähr bas beutsche Reich, schließlich nach weiterem Berlauf von etwa 5 Bochen bie gange Erbe überschwemmt fein konnen. Bu Fahrrabern wurde dabei allerdings nur bie eine Balfte ber Menichheit ge= langen, wenn wir einmal bie Gesamtzahl ber Menschen fo groß annehmen, daß auch bie Coupons ber 30. Boche gerade alle noch untergebracht werden können. In dieser letten Boche murben alsbann - bon ber Differeng 1 abgefeben - ebenfoviele Anteilscheine abgesetzt werden wie in allen 29 Bochen vorher zusammen. Die Inhaber biefer Anteilscheine ber 30. Boche, alfo bie zweite Salfte ber Menschheit, wurden naturlich für die gezahlten 50 Mit. nichts erhalten, sondern sich mit bem beglüdenden Bewußtsein begnügen muffen, zu ben Fahrradfäufen der anderen je 50 Mit. beigesteuert zu haben. Tatsächlich würde der Kaufmann also für jedes Fahrrad 100 Mt. erhalten haben, 1) während 3. B., wenn bereits B und C ihre Anteilscheine nicht absetzen würden, das Fahrrad bes A mit 150 Mt. bezahlt mare.

# § 2. Eine praktische Anwendung der Reihe der Votenzen von 2.

Die Gewichtssätze unserer gleicharmigen Wagen bestehen gewöhnlich aus folgenden Stücken:

1 g., 2 g., 2 g., 5 g., 10 g., 20 g., 20 g., 50 g. und seizen sich nach diesem Prinzip eventuell nach beiden Seiten hin fort. Der Gewichtssat, den wir hier betrachten wollen, mag auf die angegebenen 8 Gewichte beschränkt sein und ers möglicht alsdann jedenfalls alle Wägungen von 1 g. dis einsichließlich 110 g. und zwar von g. zu g.

Wir wollen nun die frage erheben, ob sich dieselben Wägungen, wie mit diesen 8 Gewichten, noch mit einer

<sup>1)</sup> In praxi gestaltet sich das Geschäft natürlich schon im Ansange wesentlich anders: zunächst würden sehr viele Personen, die sich übershaupt beteiligen wollen, direkt von dem Kausmann Coupons entnehmen, nicht, wie wir annahmen, nur einer; sie oder ihre Hintermänner ersten oder weiteren Eliedes würden alsdann mit ihren Coupons ganz oder teilweise hängen bleiben und entweder ihren Einsax von 50 Mark verstieren oder, wenn sie diesen nicht verloren geben wollen, selbst die Absnehmer ihrer noch nicht untergebrachten Coupons werden müssen.

geringeren Anzahl von Gewichten ausführen ließen, resp. wie viele Gewichte mindestens und welche hierzu erforderlich sind.

Dabei wollen wir vorausseten, daß die Gewichte ftets alle auf die= felbe Schale ber Bage gelegt, alfo nicht etwa z. T. als Gegengewichte auf ber zweiten Schale verwandt werben follen. Dann muß zunächft. will man ein Gewicht von 1 g. abwägen können, in dem Ge= wichtsfatz jedenfalls das Gewicht 1 g. vertreten sein. Dill man auch 2 g. abwägen, so muß entweder zu dem Gewicht von 1 g. noch ein gleiches hinzutreten ober aber ein Gewicht von 2 g. vertreten sein. Die lettere Unnahme führt uns jedoch weiter als die erstere, indem sie nämlich außer den Abwägungen von 1 g. und 2 g. auch zugleich eine solche von 3 g. = 1 g. + 2 g. uns ermöglicht. Wir werden baber bie beiben erften Stude unseres gesuchten Gewichtsfages fo mablen: 1 g., 2 g. Um nun auch 4 g. abwägen zu können, brauchen wir entweder ein weiteres Gewicht von 1 g. oder noch eins von 2 g. oder eins von 3 g. oder schließlich eins von 4 g. Der Leser ift keinen Moment barüber im Zweifel, wofür wir uns zu entscheiben haben werden: benn mahrend 3. B. ein Gewichtsfat von 1 g., 2 g., 2 g. uns nur alle Wägungen von 1 g. bis 5 g. ermöglicht, können wir mit 1 g., 2 g., 4 g. alle Wägungen von 1 g. bis 7 g. einschließlich aussühren  $(5=4+1;\ 6=4+2;$ 7=4+2+1). Um nun hierüber hinaus zu kommen, werben wir offenbar ein Gewicht von 8 g. hinzunehmen und fönnen alsbann mit den 4 Gewichten 1 g., 2 g., 4 g., 8 g. bereits alle Wägungen von 1 g. bis 15 g. inkl. ausführen, indem

$$9 = 8 + 1$$

$$10 = 8 + 2$$

$$11 = 8 + 2 + 1$$

$$12 = 8 + 4$$

$$13 = 8 + 4 + 1$$

$$14 = 8 + 4 + 2$$

$$15 = 8 + 4 + 2 + 1$$

<sup>1)</sup> Würden die Gewichte auf beide Schalen verteilt, so ließe sich 1 g. ja auch ohne das Eingrammsgewicht abwägen, etwa als Disserb von 3 g. und 2 g. Läßt man diese Art Wägungen (durch Kontresgewichte) zu, so kommt man tatsächlich mit noch weniger Gewichten aus, als sich für unsere Fragestellung ergeben werden, doch soll dieser Fall, wie gesagt, hier nicht in Betracht gezogen werden.

ift. Man fieht fofort, bag man jest ein Gewicht bon 16 g. wird hinzunehmen muffen, und wir ertennen in ber Reihe von Bahlen, auf die wir hier kommen: 1, 2, 4, 8, 16 die aus dem vorigen Paragraphen uns wohlbekannte Reihe ber Potenzen ber Bahl 2 wieder. In ber Tat würden wir bei weiterer Fortsetzung unseres Berfahrens stets nach den Zahlen dieser Reihe fortschreiten muffen, fo daß also jest 32, 64, 128 ufw. fommen würden. Man erkennt diese Notwendigkeit leicht folgendermaßen: Die Gewichte 1 g., 2 g., 4 g., 8 g. ermöglichen alle Wägungen von 1 g. bis 15 g. einschließlich, wie wir gezeigt haben. Ich benke mir diese 15 Wägungen nun der Reihe nach ausgeführt und lege jedesmal das neu hinzugetretene Gewicht 16 g. bazu: alsdann erhalte ich ftatt ber Wägungen von 1 g. bis 16 g. alle Wägungen von 17 g. bis 31 g. inkl. Zu dieser letzten Abwägung von 31 g. brauche ich alsbann alle 5 Gewichte (1 g, 2 g., 4 g., 8 g., 16 g.) und zwar ift es kein Zufall, baß wir mit diesen 5 Gewichten gerade bis zu ber gahl (31) reichen, die um 1 kleiner ift als diejenige Bahl, welche in der Reihe der Potenzen ber 2 auf unfere 16 folgt, nämlich 32. Bielmehr ift es, wie im vorigen & bewiesen wurde (f. Sat 1), eine allgemeine Eigenschaft biefer Reihe, bag jebe Bahl ber Reihe um 1 größer ist als die Summe aller vorhergehenden, wonach also die Summe von 1, 2, 4, 8, 16 gerade um 1 kleiner als 32 fein muß. Wir werden baher auch mit ben Gewichten 1 g., 2 g., 4 g., 8 g., 16 g., 32 g. nur bis einschl. 63 g. abwägen können, bis hierhin aber auch lückenlos von g. zu g. Das weiter hinzutretende Gewicht muß bann 64 g. fein, und biefer Gewichtsfat von jest 7 Gewichten: 1 g., 2 g., 4 g., 8 g., 16 g., 32. g., 64 g. ermöglicht uns alle Wägungen bis einschließlich 127 g.; er leistet somit, obwohl nur aus 7 Gewichten bestehend, mehr als die im Berkehrsleben üblichen mit ihren erften 8 Gewichten, bie nur Bägungen bis 110 g. geftatten, wie schon oben gesagt.

Bei Gelegenheit biefer praktischen Aufgabe gewannen wir zugleich ein wichtiges allgemeines Resultat, von bem wir noch weiterhin Gebrauch machen werden und das wir daher für fich

gesondert aussprechen wollen:

Sat 2: Jebe beliebige Bahl läßt fich barftellen als Summe von Bahlen aus ber Reihe ber Potengen ber 2 und zwar fo, daß jebe biefer Bahlen ber Reihe höchftens einmal in ber Summe portommt.

Frage 16: Leistet nicht ein Gewichtssatz, bestehend aus den Gewichten 1 g., 2 g., 4 g., 8 g., 16 g., 33 g., 65 g. noch mehr als der oben angegebene, indem er auch noch Abwägungen von 128 g. und 129 g. ermöglicht?

Frage 17: Durch wieviel Gewichte kann ein Gewichtssatz, bestehend aus Gewichten von 1 g., 2 g., 2 g., 5 g., 10 g., 20 g., 20 g., 50 g., 100 g., 200 g., 200 g. ersetzt werden?

# § 3. Erraten gedachter Bahlen und Gegenftande.

Die in dem Sahe des vorigen Abschnitts ausgesprochene Möglichkeit der Darstellung jeder Zahl als Summe von lauter verschiedenen Potenzen von 2 findet bei zahlreichen Spielen und Aufgaben Anwendung, wovon wir hier jeht zwei Proben geben wollen. Wir wollen dabei die Zahlen der gedachten Reihe, also 1, 2, 4, 8 . . ., der einfacheren Unterscheidung halber als unsere "Grundzahlen" bezeichnen.

## I. Das Erraten einer gebachten Bahl.

In einer Gesellschaft denkt man sich eine Zahl, welche der vorher hinausgesandte A sich anheischig macht zu erraten, falls der mit ihm unter einer Decke spielende B ihn durch einige aneinandergelegte Münzen auf die richtige fährte führen darf,

wobei es, wie A und B etwa geheimnisvoll behaupten, auf die Winkel ankomme, unter denen die Münzen aneinandergelegt sind. Die Verabredung zwischen A und B geht einsach dahin, daß die Kehrseite (Wappenseite, Revers) einer Münze immer eine Null, die Kopfseite (Avers) dagegen die verschiedenen Potenzen von 2 ("Grundzahlen") und zwar von links anfangend sukzessive 1, 2, 4, 8, . . . bedeuten soll. B stellt die gedachte Zahl dann einsach als Summe unserer Grundzahlen

1, 2, 4, 8, ... dar. Wenn B also z. B. aus Münzen die Fig. 1 formt, so bedeutet dies: Da die erste Münze links die Wappenseite zeigt, so ist die erste Grundzahl, also 1, fortzulassen; dagegen hat A wegen der Kopf-



Fig. 1.

seite ber zweiten und britten Münze die zweite und britte Grundzahl, also 2 und 4, zu nehmen; die vierte Grundzahl (8) ist wieder außzulassen, die fünste (16) dagegen zu nehmen. Die gedachte Bahl ist somit 2+4+16=22, welche A sodann der stannenden Menge verkünden darf.

# II. Das Erraten eines gebachten Bilbes.

Auf einer Karte sind 32 verschiedene Bilder dargestellt, etwa in 4 Reihen zu je 8. Irgend jemand, sagen wir Z, wird von A aufgefordert, sich eins dieser Bilder zu denken; A wird dann erraten, welches Bild Z sich gedacht hat.

Außer ber großen Karte mit allen 32 Bilbern besitzt A noch 5 weitere Karten ("Teilkarten"), auf deren jeder 16 der 32 Bilber (etwa in 2 Keihen zu 8) abgebildet sind. A hält nun dem Z jede dieser 5 Karten der Reihe nach vor und läßt sich jedesmal von ihm angeben, ob das gedachte Bild auf der betreffenden Karte vorkommt oder nicht. Nach den Antworten, die Z hierauf gibt, kann A das gedachte Bild eindeutig bestimmen.

Es anbert offenbar an bem Spiel nichts, wenn wir uns statt ber 32 Bilber bie Bahlen 1-32 benten: bas erfte Bilb ber großen Karte werbe eben burch bie Bahl 1 erfett, bas zweite durch 2, das lette burch 32, wobei wir bei bieser Rumerierung in jeder Reihe der Bilber von links nach rechts geben und bie 4 Reihen von oben nach unten burchlaufen. Jebe ber Bahlen 1-32 läßt fich nun als Summe ber Grundgablen 1, 2, 4, 8, 16, 32 barftellen. Wir benten uns biefe Darftellung für alle 32 gahlen burchgeführt, also in ber Form 23 = 1 + 2 + 4 + 16. Wie oft, meint ber Lefer wohl, wird bei biefen 32 Darftellungen rechts bie Grundzahl 1 vorfommen ? Offenbar tritt fie nur auf bei allen ungeraben Zahlen, alfo bei 1, 3, 5 . . . 31. Es find beren im ganzen 16. Dieje 16 Bahlen refp. die ihnen entsprechenden Bilber find auf der einen der 5 Teilfarten abgebildet. Aber nicht nur bie 1 tritt bei biefen Darftellungen gerabe 16 mal auf, fondern, wie eine einfache Überlegung zeigen würde, ebenfo auch bie übrigen Grundzahlen, also die 2, die 4, die 8, die 16, die lette Bahl 3. B. für die Darftellung ber Bahlen 16-31. Man hat baher bie 16 Bahlen, bei benen bie Grundzahl 2

auftritt, resp. die ihnen zugeordneten 16 Bilber auf die zweite Teilkarte gebracht und entsprechend den Grundzahlen 4, 8 und 16 die drei weiteren Teilkarten angesertigt. Die Zahl 32 resp. daß 32. Bild kommt offenbar auf keiner der Teilkarten vor. Die 5 Teilkarten sehen also, wenn wir auf jeder die Zahlen der Größe nach ordnen, so aus, wie die Tabelle

A Company of the Company	THE RESERVE TO SELECT A SECOND		The land of the land	THE REAL PROPERTY.
I.	II	III	IV	V
1	2	4	8 9	16
5	2 3 6 7	4 5 6 7	10	17 18 19
1 3 5 7 9 11 13	7	7 12	11 12	19 20
11	10 11	13	13	21
15	15	14 15	14 15	23
17 19	14 15 18 19 22	20 21	24 25	24 25
21 23	22 23	22 23	26 27	21 22 23 24 25 26 27 28
25	26	28	28	28
27 29	27 30	29 30	29 30	29 30
31	31	31	31	31

zeigt, wobei wir uns nur statt der Zahlen die betreffenden Bilder gesetzt denken müssen. Gibt nun Z beispielsweise an, daß das von ihm gedachte Bild auf den Teilkarten II, III, V vertreten ist, auf den Teilkarten I und IV aber sehlt, so sagt dies dem A solgendes: Die Teilkarten I, II, III, IV, V entsprechen den Grundzahlen 1, 2, 4, 8, 16 (in unserer Tabelle steht auf jeder Teilkarte die betreffende Grundzahl und zwar obenan); von diesen Grundzahlen sind im vorliegenden Falle die zweite, dritte und fünste zu nehmen, also 2, 4, 16, die erste und vierte dagegen (1 und 8) sortzulassen. Das gedachte Bild hat also auf der großen Karte den Platz 2 + 4 + 16 = 22 und ist damit eindeutig bestimmt.

Kommt das gedachte Bild auf keiner der 5 Teilkarten vor, so ift es das 32., das letzte der großen Karte.

### § 4. Der Lucasiche Turm.

Dieses von dem französischen Mathematiker E. Lucas erfundene Spiel besteht aus einem Brett mit 3 Pflöden; auf einem ber Pflöcke befindet sich eine Anzahl (bei uns 8) in der Mitte durchbohrter Scheiben phramidenartig übereinander und nach der Größe geordnet.

Das Spiel besteht darin, die Scheiben alle auf einen der beiden anderen Pflöcke zu bringen, wenn man zur Zeit immer nur eine Scheibe umsehen und stets bei allen Umsehungen nur eine kleinere Scheibe auf eine größere, niemals umgekehrt sehen darf.

Natürlich soll das Ziel durch möglichst wenig Operationen erreicht, unnötige Umsetzungen also vermieden werden.

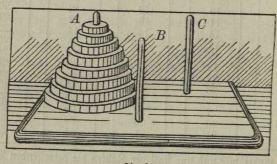


Fig. 2.

Es sei .C der Pflock, auf den die Scheiben gebracht werden sollen, A der, auf dem sie ursprünglich sizen, wie in Fig. 2 angegeben. Man beginne das Spiel zunächst mit nur 2 Scheiben, denke sich also die übrigen 6 unserer Figur sort. Man sieht, daß man alsdann die oberste Scheibe auf B zu stecken hat, dann die untere (größere) auf C und nun die von B auf C. Bei 2 Scheiben sind also 3 Umsetzungen ersorderlich zur Erzreichung des Ziels. — Nimmt man jetzt 3 Scheiben — wir wollen sie von oben nach unten 1, 2, 3 nennen —, so wird man, bevor die Scheibe 3 von A heruntergenommen werden kann, erst 1 und 2 auf einen anderen Pflock bringen müssen und zwar wird man dieß so einzurichten haben, daß 3 alsdann sofort auf C kommt. C muß also dann seer sein; d. h. man hat zunächst 1 und 2 auf B zu bringen. Dies ist, mit Berztanschung von B und C, unser obiges Versahren, ersordert also

3 Umsetzungen (Scheibe 1 von A auf C, 2 von A auf B, 1 von C auf B). Alsbann kommt nun 3 auf C, und darauf müssen 1 und 2 von B auf C gebracht werden, was wieder 3 Umsetzungen ersordert (1 von B auf A, 2 von B auf C, 1 von A auf C). Bei 3 Scheiben sind also 7 Umsetzungen ersorderlich. — Man sieht sosort, daß dies ganz analog so weiter geht: Um 4 Scheiben von A auf C zu bringen, wird man zunächst die 8 Scheiben 1, 2, 3 von A auf B bringen (7 Umsetzungen), darauf Scheiben 4 von A auf C, dann die Scheiben 1, 2, 3 von B auf C (7 Umsetzungen); zusammen 15 Umsetzungen. Wir hatten also zunächst die Umsetzungen des vorigen Falles mit 3 Scheiben zu wiederholen, sedoch mit Vertauschung der Pslöcke B und C. Begannen wir im vorigen Falle mit: "1 von A auf C", so werden wir daher setzt zu beginnen haben: "1 von A auf B". Zurückblickend sehen wir also, daß die erste Umsetzung lautete

bei 2 Scheiben: "1 von A auf B" "3 " "1 von A auf C" "4 " "1 von A auf B"

Da nun jedesmal, wenn wir zu einer um 1 größeren Scheibenzahl fortschreiten, wieder eine solche Bertauschung von B und C stattfinden wird, so wird der Anfang offendar abwechselnd lauten: "1 von A auf B" und "1 von A auf C" und zwar das erstere bei gerader Scheibenzahl, das letztere bei ungerader. Nennen wir C den Endpflock und B den Übergangspflock, so können wir also sagen:

Bei ungerader Scheibenzahl hat man damit zu beginnen, die kleinste Scheibe auf den Endpflock zu bringen, bei gerader Scheibenzahl dagegen auf den Übergangspflock.

Die Regel ist leicht zu behalten: man braucht nur an den allereinsachsten Fall, eine Scheibe, zu denken, wo die Regel trivial wird.

Für die Zahl der erforderlichen Umsetzungen hatten wir gefunden

bei 1 Scheibe 1 Umsetzung " 2 Scheiben 3 Umsetzungen " 3 " 7 " 4 " 15 Wenn auch der Leser bereits hiernach das Geset dieser Zahlen errät, so werden wir doch noch eine bessere Einsicht in die Art, wie die Zahlen 1, 3, 7, 15 usw. zustandekommen, gewinnen, wenn wir die Frage auswersen: wie viele der 15 Umsetzungen, die bei 4 Scheiben ersorderlich sind, werden vorgenommen mit Scheibe 1, wie viele mit Scheibe 2 usw.? — Nun, von den 3 Umsetzungen, die bei 2 Scheiben ersorderlich sind, ersolgen zwei mit Scheibe 1 und eine mit Scheibe 2. Wir schreiben dies kurz so:

a light		2	Sá	eib	en		
Scheibe	1	14.	990	1	1	2	Umj.
"	2				S SUR	1	Umj.
			1		zuj.	3	Umf.

Bei 3 Scheiben gliebert sich das Versahren in folgende 3 Stusen: Umsehen der Scheiben 1 und 2 von A auf B, Umsehen der Scheibe 3 von A auf C, Umsehen der Scheiben 1 und 2 von B auf C. Hieraus sieht man, daß, da das Versahren der 2 Scheiben zweimal auszusühren ist, die Umsehungen für die Scheiben 1 und 2 sich verdoppeln gegenüber dem vorigen Fall, und wir erhalten also:

na A i		3 (	3dj	eibe	en		
Scheibe	1			115		4	Umf.
"	2				1949	2	Umf.
"	3					1	Ums.
					zus.	7	Umj.

und hiernach entsprechend

		4	Sch	eibe	n		
Scheibe	1				1	8	Umj.
"	2					4	Umf.
"	3		13				Umf.
#	4			200		1	Umf.
			TO SECOND	31	ıſ.	15	Umf.

Die Zahlen ber Umsetzungen für die einzelnen Scheiben, von unten nach oben gelesen, (1, 2, 4, 8 im letzten Falle) sind

bie Potenzen von 2 und zwar nicht nur hier in diesen einsfachsten Fällen, sondern, da sich bei Fortschreiten von Fall zu Fall die Zahlen verdoppeln und unten stets eine 1 hinzutritt, so gilt dies allgemein. Die Gesantzahl der Umsehungen für jeden Fall ist dann nach unserem Sah 1 (S. 50) um 1 kleiner als die nächstschend Potenz von 2; so würde sich also bei 5 Scheiben als Gesantzahl aller Umsehungen 31 (= 32 — 1) ergeben.

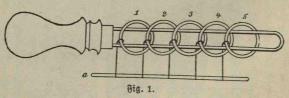
Frage 18: Wie viele Umsetzungen sind bei 7 Scheiben im ganzen ersorberlich? Wie viele Umsetzungen hiervon werden mit Scheibe 1, wie viele mit Scheibe 5 vorgenommen? Welches ift die allererste Umsetzung hierbei?

### Rapitel VI.

## Der Baguenaudier.

Den Namen Baguenaudier, der auch einen Gartenzierstrauch, ben gemeinen Blasenstrauch (Colutea arborescens L.) bezeichnet, auch Baguenodier geschrieben, abgeleitet von bague (Ring) und nœud (nodus, Knoten), hat man in Frankreich einem geistreichen Spielzeug beigelegt, das aus einer an einem Griff angebrachten Spange besteht, auf der eine Anzahl Ringe sitzen.

Jeder dieser Kinge ist durch einen an ihm befestigten faden, welcher durch das Innere des nächsten Kinges und zwischen den beiden Bügeln der Spange hindurchgeht, mit einer kleinen Stange a (s. fig. 1) sest verbunden. Das Spiel besteht nun darin, die Spange von dem System der Ringe zu trennen.



Der Anfänger versucht die Lösung gewöhnlich in der Weise, daß er, den Griff etwa in die linke Hand nehmend, die Ringe nach rechts dis über das Ende der Spange zieht und nun — irrtümlicherweise — die Ringe über einen der beiden Bügel

<sup>1)</sup> Für dieses Spiel ist die Anfertigung eines Modells, wenn auch nicht notwendig, so doch empfehlenswert.

ber Spange wirft, muß bann aber erkennen, bag bies zur Lösung ber Aufgabe nicht nur nichts beiträgt, vielmehr nur eine Berwirrung ber Faben herbeiführt. Man erkennt in ber Tat sehr leicht, daß man die einzelnen Ringe zwar nach rechts (s. d. Fig. 1) von der Spange herunter zu ziehen haben wird, daß sie darauf jedoch nicht auf die eine Seite der Spange, fondern zwischen ben beiden Bügeln ber Spange hindurch nach unten geworfen werben muffen, und es entsteht jest nur bie Frage, in welcher Reihenfolge man biefe Manipulationen mit ben verschiedenen Ringen vorzunehmen hat, um auf die schnellfte Art eine Trennung von Spange und Ringen zu erzielen. In ber ursprünglichen Stellung (f. Fig. 1) können nur bie Ringe 4 und 5 nach unten gelangen — ohne daß einer ber betreffenden Faben über einen Bügel ber Spange greift, mas natürlich zu vermeiden ist — und zwar 5 in der bereits angegebenen Weise und 4, indem man 4 und 5 gleichzeitig nach rechts über die Spange hinausführt und dann 4 von oben zwischen ben Bügeln hindurch nach unten wirft, 5 dagegen wieder auf die Spange fest oder gleichzeitig mit 4 nach unten wirft. Bezeichnen wir nun bas Lostrennen eines Ringes von der Spange kurz als das "Senken" eines Ringes und die umsgekehrte Operation als das "Heben" und rechnen wir die Ringe in der Reihenfolge der Nummern in der Figur 1, also 3. B. 3 als ben auf 2 "folgenden", so erkennt man leicht folgendes:

Ein Ring kann nur dann gehoben resp. gesenkt werden, wenn der folgende Ring oben ist, alle weiteren folgenden Ringe jedoch unten; der lette Ring (5) kann jederzeit gehoben resp. gesenkt werden.

Hätten wir z. B. die durch das Schema  $\frac{1}{0}$   $\frac{2}{0}$   $\frac{3}{0}$  ansgedeutete Stellung — in der die Gerade die Spange und die kleinen Kreise oberhalb derselben die auf ihr sitzenden Ringe, die unteren Kreise die gesenkten Ringe bedeuten — auf irgend eine Beise herbeigeführt, so würde der Ring 2 jeht gehoben werden können, weil der solgende Ring (3) oben ist, alle weiteren solgenden Ringe (4 und 5) dagegen unten. Dagegen würden die Ringe 1 und 3 nicht gesenkt und 4 nicht gehoben werden können; wohl aber könnte 5 gehoben werden und mit ihm zusgleich allerdings auch 4.

Hiernach erkennt man, daß es bei unserer Aufgabe vor ARus 170: Ahrens, Mathem. Spiele.

allem barauf ankommen wird, ben Ring 1 zu fenken und bag, nachbem bies geschehen, biefer Ring völlig aus ber Betrachtung ausscheibet, und man bann nur noch mit einem Spiel von 4 Ringen zu tun hat. Damit aber 1 gefenkt werben kann, muß nach unserer obigen Vorschrift 2 oben und müffen 3, 4, 5 unten sein. Es ist also vorher 3 zu senken, und dies erfordert, daß 4 oben und 5 unten ift. Hiernach ergibt fich folgende Disposition: Es ist zunächst 5 zu fenken, barauf kann bann auch 3 gefenkt werben, und wir erhalten also die Stellung 1 2 3 4 5

ooo oum nun auch 4 senken zu können, mussen wir 5 wieder heben und konnen darauf 4 und 5 gleichzeitig fenken, wie schon oben bemerkt mar. Wir erhalten fo die Stellung 1 2 3 4 5

oo, welche eben die Borbedingung für bas Senken von

1 ist. Aus ihr resultiert daher o Damit scheidet 1 gang aus ber Betrachtung aus, und damit nun 2 gesenkt werden fann, muß zuvor 3 gehoben fein. Dies bedingt aber, daß 4 ge= hoben wird, und dies wieder basfelbe für 5. Wir heben baber zunächst 4 und 5, was bei biefen beiben zualeich geschehen kann,

1 2 3 4 5 erhalten alfo ooo. Soll 3 gehoben werden, jo muß erft wieder 5 gefentt werden, fo daß wir futzeffive die Stellungen

1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 o o o und o o o o erhalten. Damit nun 2 gesenkt werden tann, muß nicht nur 3 oben, sondern zugleich 4 und 5 unten fein, und um 4 fenten zu können, muffen wir gubor 5 heben,

jo baß wir zunächst die Stellung 0000 bekommen. Dies ift aber die Anfangsstellung für ein Spiel mit 4 Ringen und die weiteren Operationen find genau bieselben, als ob wir von Anfang an nur 4 Ringe gehabt hatten. Durch bie jest zunächst erreichbare

Zwischenstellung  $\frac{1}{0}$   $\frac{2}{0}$   $\frac{3}{0}$   $\frac{4}{0}$   $\frac{5}{0}$  gelangen wir zu  $\frac{1}{0}$   $\frac{2}{0}$   $\frac{3}{0}$   $\frac{4}{0}$  5 womit auch der Ring 2 aus der Betrachtung ausscheibet. Damit nun 3 gesenkt werden kann, muß zuvor 4 gehoben werden, und dies bedingt wieder, daß 5 zuvor resp. gleichzeitig gehoben wird. fo daß folgende sutzeffive Stellungen notwendig werden: 1 2 3 4 5

000 (Anfangsstellung für ein Spiel mit 3 Ringen), 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5

5 und fenten dann

4 und 5 gleichzeitig, so sind die Ringe von der Spange getrennt, wie verlangt war.

Umgekehrt bringt man die Ringe wieder auf die Spange zurück, indem man genau die umgekehrten Operationen wie zuvor und zwar in umgekehrter Reihenfolge ausführt, also:

- 1) Heben von 4 und 5
- 2) Senken von 5
- 3) Heben von 3
- 4) Heben von 5
- 5) Senken von 4 und 5
- 6) Heben von 2
- 7) Heben von 4 und 5
- 8) Senken von 5
- 9) Senken von 3
- 10) Seben von 5
- 11) Senken von 4 und 5
- 12) Heben von 1
- 13) Seben von 4 und 5
- 14) Senken von 5
- 15) Heben von 3
- 16) Heben von 5.

Auf die mathematische Theorie des Spiels, für die beiläufig bemerkt - bie im vorigen Rapitel besprochene Reihe ber Botengen ber Bahl 2 eine grundlegende Bedeutung befitt, dürfen wir nach unseren obigen Ausführungen verzichten. Die Theorie wurde und im grunde genommen nur eine Bestätigung unferer Darftellung liefern und insbesondere ben Beweis bafür geben, daß bas von uns oben bargelegte Verfahren auch wirklich bas fürzeste ift, um die gestellte Aufgabe zu lösen. Bei biesem unserem Berfahren waren für ben von uns hier ftillschweigend zugrunde gelegten Spezialfall von 5 Ringen 16 Operationen erforderlich, wenn wir ein gleichzeitiges Beben und Senken der beiben letten Ringe (4 und 5) für eine Operation gahlen. Wir wollen nun wenigstens bei ber mathematischen Theorie unseres Spiels die Anleihe machen, daß wir noch die Anzahl ber erforderlichen einzelnen Umftellungen für verschiedene Un= gablen von Ringen in einer Tabelle wie folgt, gufammenftellen:

Anzahl d. Ringe	Anzahl d. Umstell.
2	1
3	4
4	7
5	16
6	31
7	64
8	127
9	256
10	511
11	1024
12	2047
20	524287

Bei 65 Ringen würde die Minimalzahl der erforderlichen Umstellungen bereits eine 20-stellige Zahl und gerade um 1 größer sein als die Anzahl aller Weizenkörner in dem oben (S. 47 f.) besprochenen Fall.

Frage 19: Welche anfängliche Stellung wäre bei 5 Ringen die ungünstigste, d. h. diejenige, von der aus am meisten Operationen erforderlich sind, um das System der 5 Ringe von der Spange zu trennen? Wieviele Operationen erfordert dieser ungünstigste Fall?

## Kapitel VII.

#### Mim.

# § 1. Beschreibung des Spiels und Skizzierung seiner Theorie.

Der Ursprung dieses Spiels ist unbekannt. Auf einigen amerikanischen Schulen, bisweilen auch auf Jahrmärkten, wird es gespielt; es soll aber auch in Deutschland schon seit Jahrzehnten bekannt sein. Genannt wird es zumeist "Fan-Tan". Da man jedoch mit demselben Namen auch ein ganz anderes, bei Chinesen beliebtes Spiel bezeichnet, das ein reines Glücksspiel ist, so haben wir hier den obigen, von einem amerikanischen Mathematiker vorgeschlagenen Namen akzeptiert.

Man benutt zu dem von zwei Personen gespielten Spiel eine Anzahl von irgend welchen Objekten, etwa Tündhölzern oder kleinen Steinen. Es wird damit besonnen, daß z., Haufen" von "Steinen" gebildet werden, und zwar so, daß jeder Haufen, wie wir vorläusig der Einfachheit halber annehmen wollen, höchstens 7 und wenigkens 1 Stein1) enthalten mag. Das Spiel besteht nun darin, daß zunächst einer der Spielenden eine beliebige Anzahl von Steinen von einem Haufen sortnimmt, d. h. also wenigstens einen Stein und eventuell auch den ganzen Haufen. Innerhalb und mit Einschluß

<sup>1)</sup> Wir sprechen also aus Zwedmäßigkeitsgründen auch von einem "Haufen" von einem Stein und überlassen den Khilosophen die Ersörterung der berühmten Streitfrage, bei welcher Mindestzahl von Obsekten der vulgare Begriff des Haufens beginnt.

dieser Grenzen darf der Spielende also beliebig wählen, ebenso wie ihm auch die Wahl des Haufens überlassen bleibt; nur dürfen nicht gleichzeitig Steine verschiedener Hausen sortgenommen werden. Hierauf kommt der andere Spieler an die Reihe, um nun seinerseits nach denselben Bestimmungen, wie der erstere, zu verfahren, und zwar darf er denselben Hausen wie sein Gegner oder auch einen anderen wählen. So geht dies immer abwechselnd, so lange Steine vorhanden sind. Wer den letzten Stein bekommt, ist Sieger.

Wir wollen der Einfachheit halber die einzelnen Operationen der Spieler als ersten, zweiten usw. "Bug" unterscheiden. — Die mathematische Theorie lehrt, daß einer der beiden Spieler stets den Sieg erzwingen kann; welcher von beiden sich in dieser günstigen Lage befindet, ob derzenige, der den ersten, oder der den zweiten Zug tut, hängt lediglich von der Ansangsstellung ab.

Eine bestimmte Phase des Spiels ist offenbar durch die Anzahlen der Steine in den Hausen charakterisiert. Wir werden sie daher etwa durch 1, 4, 6 bezeichnen, wenn der eine Hausen 1, ein anderer 4 und der dritte 6 Steine enthält. Dabei wollen wir aus später zu erkennenden Gründen die Positionen

"richtige" und die übrigen mit gleichfalls 3 Haufen, also 3. B. 1, 4, 6 ober 3, 4, 4, "unrichtige" nennen. Der Leser erkennt unschwer, daß die Zahl der "unrichtigen" Positionen sehr viel größer ist als die der "richtigen". Besinden sich 3. B. in dem einen Hausen 2 Steine und in einem zweiten 4, so ergibt sich eine "richtige" Position nur dann, wenn in dem dritten Hausen 6 Steine liegen. In allen anderen Källen, d. h. also, wenn in dem dritten Hausen 1, 2, 3, 4, 5 oder 7 Steine liegen, würde sich steine "unrichtige" Position ergeben; denn nur 2, 4, 6 sindet sich in unserem System I, nicht aber 2, 4, 1 oder 2, 4, 2 oder 2, 4, 3 usw. — Ist ein Hausen ganz verschwunden, so mögen "richtig" diesenigen Stellungen heißen, bei denen die beiden übrig bleibenden Haufen gleich viele Steine enthalten; alle übrigen Positionen mit nur zwei und zwar

ungleichen Haufen, sollen mithin "unrichtig" heißen. Positionen mit nur einem Haufen werden stets "unrichtig" genannt. Zu den oben angegebenen "richtigen" Positionen kommen also noch hinzu:

0, 1, 1 0, 2, 2 0, 3, 3 0, 4, 4 (Syftem II) 0, 5, 5 0, 6, 6 0, 7, 7

und schließlich noch 0, 0, 0, also diesenige Position, die dem Spieler, der sie erreicht, die Siegespalme verleiht. Einschließlich dieser letzten Position haben wir also im ganzen 15 "richtige" Positionen, während eine einfache Rechnung lehren würde, daß die Zahl der "unrichtigen" Positionen 105 beträgt. Die "richtigen" Positionen sind nun so ausgewählt, daß folgendes gilt:

Sat 1: Eine "richtige" Position kann burch ben nächsten Zug nie wieder in eine "richtige", sondern immer nur in eine "unrichtige" Position übergeführt werben,

Sat 2: Eine "unrichtige" Position läßt sich burch ben nächsten Bug zwar stets in zahlreiche "unrichtige", jedoch auch stets in mindestens eine "richtige" Position überführen.

Die Bezeichnungen "richtig" und "unrichtig" find zwar zunächst nur reine Unterscheidungsmerkmale, die willkürlich gewählt erscheinen; wir werden jedoch im nächsten Paragraphen sehe, daß die Wahl dieser Bezeichnungen eine durchauß zutreffende ist, da die "richtigen" Positionen diesenigen sind, welche den Spieler zum Siege führen. Hiernach und nach den soeben angegebenen Sähen ist daß Prinzip des praktischen Spiels bereits jeht leicht zu erkennen: der Spieler muß danach trachten, durch seinen Zug eine "richtige" Position herzustellen. Ist dies z. B. dem Spieler A gelungen, so wird B, da er ziehen muß und eine "richtige" Position nur in eine "unrichtige" übergeht (Sah I), die "richtige" Position wieder zerstören, also eine "unrichtige" herstellen müssen. A kann diese jedoch wieder in eine "richtige"

umwandeln (Sat II) und kann so von einer "richtigen" Position zur anderen und schließlich zum Siege fortschreiten.

## § 2. Begründung der Theorie des Spiels.

Die Überzeugung von ber Richtigkeit ber im borhergebenben § 1 ohne Beweis ausgesprochenen Sate gewinnt ber Lefer leicht an der Sand bestimmter Beispiele. Bunachst Sat 1: Greifen wir zuerft von ben "richtigen" Positionen bes Suftems II eine, etwa 0, 5, 5, heraus, fo feben wir, bag burch ben nächften Bug notwendig eine "unrichtige" Position baraus werden muß; benn entweder ber eine ber beiben Saufen verschwindet beim nächsten Zuge ganz ober er verringert sich und wird bem anderen ungleich. Das Resultat ist also entweder 0, 0, 5 ober etwa 0, 2, 5; beides find aber nach unferen Definitionen "unrichtige" Positionen. Die "richtigen" Positionen des Systems II laffen sich somit durch einen Bug sicher alle nur in "unrichtige" über= führen, wie Sat 1 es will. — Aber auch für die Positionen bes Spftems I gilt ber Sat; wir betrachten zu bem 3wed ein Beispiel, etwa 2, 5, 7. Laffen wir burch ben nächsten Bug einen Saufen gang verschwinden, fo wird die Position, ba bie beiden übrig bleibenden Saufen ungleich find, unbedingt "unrichtig". Wir haben alfo nur noch die Fälle zu betrachten, in benen einer ber Saufen verringert wird, ohne zu verschwinden. Nehmen wir nun von dem erften Saufen einen Stein fort, fo daß 1, 5, 7 bleibt, so haben wir eine "unrichtige" Position; benn in benjenigen "richtigen" Positionen, in benen die 1 vor= kommt, kommen niemals zugleich 5 und 7 vor (f. Spftem I, erfte Rolonne). Berringern wir ben zweiten Saufen, fo bleiben jebenfalls in dem erften Saufen 2 und in dem britten 7 Steine. Run finden wir aber in dem gangen System I nur eine Position, welche zugleich 2 und 7 enthält; bies ist unsere anfängliche Position 2, 5, 7. Wird also ber Haufen 5 verringert, so er= gibt fich zweifellos eine "unrichtige" Position. Bei Berringerung bes britten Saufens ift es gang entsprechend.

Der Leser hat unschwer erkannt, daß wesentlich hierbei folgender Umstand ist: daß System I der "richtigen" Positionen ist so eingerichtet, daß irgend zwei Zahlen, z. B. 3 und 7, nur einmal zusammen in einer Position vorkommen, nämlich in

3, 4, 7. Andererseits kommt aber jedes Paar von zwei Zahlen auch einmal zusammen in einer Position des Systems vor. Bir werden zwar hierauf zurückommen und diese Angabe, die wir hier nur provisorisch machten, noch näher begründen müssen, wollen jedoch zur besseren Beranschausichung dieser Einrichtung des Systems I jeht noch solgendes hinzusügen: Bir denken uns, die Zahlen 1, 2 . . . 7 bezeichneten die Mitglieder eines Skatskuber, sehmen wir sie der Reihe nach etwa: Müller, Schulze, Weher, Schmidt, Lehmann, Krause, Fischer. Die Kombinationen zu je 3 in unserem System I bezeichnen dann immer gerade eine Skatpartie. Das System I enthält nun 7 Positionen; diese mögen den 7 Tagen der Woche entsprechen, d. h. es mag in dem Skatkub an jedem Wend der Woche sich ein Trio zu einer Spielpartie einsinden. Nehmen wir alsdann die Positionen des Systems I in jeder Zeile von links nach rechts, so liesert uns unser System I folgenden Wochenspielplan für den Klub:

Sonntag: Müller, Schulze, Meher. Montag: Schulze, Schmidt, Krause. Dienstag: Meher, Schmidt, Fischer. Mittwoch: Müller, Schmidt, Lehmann. Donnerstag: Schulze, Lehmann, Fischer. Freitag: Meher, Lehmann, Krause. Sonnabend: Miller, Krause, Fischer.

Bir bemerken alsdann folgendes: Jedes Alubmitglied kommt gleich oft zum Spiel, nämlich dreimal in der Woche. <sup>1</sup>) Dabei trifft jedes Mitglied gerade einmal in der Woche mit jedem anderen zusammen, an dem ersten Abend mit zwei Witgliedern, an dem zweiten Abend nicht wieder mit einem des ersten Abends, sondern mit zwei anderen Witgliedern und an dem dritten Spielabend mit den noch übrigen zwei. So ift Weyer z. B. am Sonntag, Dienstag und Freitag am Spiel beteiligt und trifft am Sonntag Wüller und Schulze, am Dienstag Schmidt und Fischer, am Freitag Lehmann und Krause, also jeden gerade einmal in der Woche. — Dies mag zur Veranschaulichung der Art, wie die Zahlen des Systems I miteinander kombiniert sind, vorläusig genügen.

<sup>1)</sup> Darauf, ob eventuell alle 3 Spielabende des einzelnen Mitzglieds unmittelbar aufeinander folgen resp. wie sie sich sonst auf die Woche verteilen, ist hier keine Rücksicht genommen.

Wir versuchen nun, uns ben Sat II plaufibel zu machen: Der erfte Teil, bag eine "unrichtige" Bosition sich auf mannigfache Beife durch einen Bug in andere "unrichtige" überführen läßt, 3. B. 1, 2, 5 in 1, 2, 4 ober in 1, 2, 2 ober in 1, 2, 1 ober in 1, 2, 0 ober in 0, 2, 5 usw., bedarf feiner weiteren Begründung. Es läßt fich aber, wie ber Sat 2 weiter will, jede "unrichtige" Position burch einen Bug auch in minbestens eine "richtige" überführen. Am leichtesten erkennt man bies bei nur zwei Saufen: hat man 3. B. die "unrichtige" Position 0, 4, 7, so erhalt man baraus eine "richtige", wenn die beiden Saufen gleich gemacht werben, was nur burch Berringerung des größeren möglich ift, so daß man also 0, 4, 4 erhalten Bare in ber "unrichtigen" Position nur noch ein Saufen vertreten, hatten wir also 3. B. 0, 0, 4, so mußte. wie felbstverftandlich, diefer Saufen gang jum Berschwinden gebracht werben, um die "richtige" Position 0, 0, 0, die zugleich bas Spiel mit bem Siege bes Ziehenden beendet, zu erhalten. 1) - Sat man eine "unrichtige" Position mit brei Saufen, 3. B. 3, 6, 7, so barf man feinenfalls, will man eine "richtige" erhalten, einen Saufen gang berschwinden laffen. Man barf alfo einen Saufen nur verringern. Will man ben erften Saufen verringern, fo bleiben also jedenfalls bie Bahlen 6 und 7 bes zweiten und britten Saufens unverändert. Die einzige "richtige" Position, in ber 6 und 7 zusammen vorkommen, ift nun 1, 6, 7 (f. Syftem I); es muß also ber erfte haufen von 3 auf 1 per= ringert werden. Entsprechend findet man, daß man ben zweiten Saufen von 6 auf 4 ober ben britten von 7 auf 5 zu ver= ringern hatte, um bie "richtigen" Positionen 3, 4, 7 refp. 3, 6, 5 zu erhalten. In dem Falle Diefes Beispiels läßt sich bie "unrichtige" Position also burch ben nächsten Bug auf 3 Arten in eine "richtige" überführen. Im allgemeinen wird es drei Möglichkeiten für diese Uberführung zwar nicht geben und es genügt uns auch vollfommen, wenn es nur eine gibt. Es entsteht aber die Frage, ob eine folche Möglichkeit auch ftets ftatt hat. Wollten wir an diefer Frage vorübergeben, fo würden wir in unferer Beweisführung eine erhebliche Lude laffen; andererfeits zwingt uns biefe Erörterung, ein wenig in

<sup>1)</sup> Der Leser sieht also ichon hier, daß es nicht willfürlich war, wenn wir die Position 0, 0, 0 zu den "richtigen" rechneten, sondern daß vielmehr innere Gründe hierzu zwingen.

bie mathematische Theorie des Spiels einzudringen. Der Leser, der hierauf verzichten will, möge daher den Rest dieses Paragraphen überschlagen und alsdann gleich bei § 3 fortsahren.

Es hätten schon oben die Fragen ausgeworsen werden können, durch welche wesentlichen Eigenschaften sich die "richtigen" Positionen von den "unrichtigen" unterscheiben und auf welche Weise die "richtigen" Positionen, insbesondere die des Systems I, erhalten wurden. Bur Beantwortung dieser Fragen erinnern wir den Leser zunächst an die schon S. 48/49 betrachtete Reihe der Potenzen der Jahl 2, also an jene mit 1 beginnende Jahlenreihe, in der jede Jahl das Doppelte der vorhergehenden ist: 1, 2, 4, 8, 16 . . . . Wir brauchen augenblicklich von dieser Reihe nur den Ansang: 1, 2, 4. Wir erinnern uns weiter daran, daß jede beliedige Jahl sich als Summe von Jahlen dieser Keihe darstellen läßt (Sah 2, S. 56), nämlich für die uns hier allein interessierenden Jahlen dis 7 einschließlich solgendermaßen:

4	2	1
1 =		1
2 =	2	
3 =	2 +	- 1
4 = 4		
5 = 4		- 1
6 = 4 -		
7 = 4 -	- 2 -	- 1.

Bir wollen daher 4, 2, 1 der Kürze halber jett wieder, wie schon auf S. 57, unsere "Grundzahlen" nennen. Greifen wir nun irgend eine Position aus dem Shstem I, etwa 3, 4, 7, heraus und schreiben die drei vorkommenden Zahlen in der soeben angegebenen Weise untereinander, also

$$3 = 2 + 1$$
 $4 = 4$ 
 $7 = 4 + 2 + 1$ 

so sehen wir, daß auf der rechten Seite an Grundzahlen untereinander stehen zwei 1, zwei 2 und zwei 4. Würden wir diese Darstellung bei den Zahlen aller Positionen des Systems I aussühren, so würden wir sinden, daß von den Grundzahlen 1, 2 und 4 stets jede entweder zweimal oder gar nicht vorkommt, wie dies letztere z. B. bei der Position 2, 4, 6:

bezüglich ber Grundzahl 1 ber Fall ift. Riemals aber kommt eine ber Grundzahlen bei diefer Darftellung in ben Positionen bes Systems I ein= oder dreimal vor; vielmehr würde als= bann die Position zu ben "unrichtigen" gehören. Dag auch bie Positionen von System II bieselbe Gigenschaft zeigen, bedarf faum der Erwähnung, ba diese Positionen, abgesehen von der 0, immer nur zwei gleiche Bahlen aufweisen, wobei unfere Bebingung bezüglich ber Grundzahlen felbstverftandlich erfüllt ift. Doch nicht nur besitzen alle Positionen von System I und II, alfo alle "richtigen" Positionen, die betreffende Gigenschaft, sondern fie find auch bie einzigen Positionen, benen biese Gigenschaft zufommt. Benn wir nämlich irgend welche Positionen, Die außerhalb der Shfteme I und II stehen, also "unrichtig" sind, hieraufhin prüfen würden, fo würden wir ftets finden, bag ihnen diese Eigenschaft abgeht. Wir greifen als Beispiele etwa die Positionen 1, 2, 4 und 3, 6, 7 heraus, die nicht zu den "richtigen" bes Shitems I gehören und für bie wir folgende Darftellungen in ben Grundzahlen erhalten:

Bei der ersteren kommen die Grundzahlen 4, 2 und 1 nur je einmal vor, bei der letzteren die Grundzahlen 4 und 1 allerzdings je zweimal, dagegen die Grundzahl 2 dreimal; die verslangte Bedingung erfüllt also keins der beiden Beispiele. — Der Vollständigkeit halber sei nur noch bemerkt, daß die Position 0, 0, 0 natürlich der gestellten Bedingung genügt, also mit Recht den "richtigen" Positionen zugerechnet wird (vgl. die Anm. S. 74).

Damithaben wir eine bestimmte Desinition für die "richtigen" Positionen gewonnen, nämlich die, daß bei Darstellung ihrer 3 Zahlen durch die Grundzahlen jede Grundzahl gar nicht oder zweimal vorkommt, und haben an speziellen Beispielen die Überzeugung gewonnen, daß alle "richtigen" Positionen die angegebene charakteristische Eigenschaft besitzen, alle "unrichtigen" Positionen

bagegen nicht. Wir wollen jedoch dieser Definition jetzt eine genetische Form geben, indem wir in Beantwortung einer oben (S. 75) bereits aufgeworfenen Frage ein Versahren angeben, um die Gesamtheit aller "richtigen" Positionen zu bilden Hiersfür wollen wir zunächst eine von uns bereits oben (S. 72/73) ohne Vegründung antizipierte Eigenschaft des Systems I hervorheben, nämlich die, daß es in ihm für je zwei Zahlen stets eine, aber auch nur eine Position gibt, in der diese Zahlen zusammen vorkommen. Deuchen wir nämlich z. B. eine nach der jetzigen Desinition "richtige" Position, in der die Zahlen zund 5 vorkommen, so würde man so sagen müssen:

$$3 = 2 + 1 5 = 4 + 1.$$

Da nun die Grundzahlen 4 und 2 nur je einmal, 1 jedoch zweimal vorkommt, so muß die dritte Zahl die Grundzahl 4 einmal, die Grundzahl 2 einmal, die Grundzahl 1 gar nicht enthalten, also = 4 + 2 = 6 sein; alsdann besitzt unsere Position die verlangte Eigenschaft, ist also unserer Definition gemäß "richtig". Danach muß also 3, 5, 6 eine "richtige" Position sein und in der Tat finden wir fie im Suftem I. In biefer Beise findet man ju zwei gegebenen Bahlen stets eine und nur eine britte Bahl, welche mit ben beiben ersten eine "richtige" Position bildet, oder mit anderen Worten: 3, 5, 6 ist die einzige "richtige" Position, in der die Zahlen 3 und 5 zusammen vorkommen. Damit dürsen wir die auf S. 73 in ber Beweisführung gebliebene Lücke als ausgefüllt ansehen. — Bir fonnen uns nun benten, daß man, wie in unserem Beispiel 3, 5, so alle Rombinationen ber Zahlen 1, 2 . . 7 zu je zweien vornimmt und jedesmal die zugehörige "richtige" Position bilbet. So muß man jedenfalls zu allen Positionen des Systems I und damit, da System II sofort hingeschrieben werden kann, zu allen "richtigen" Positionen überhaupt kommen. Man braucht nicht einmal alle Kombinationen der Zahlen 1, 2...7 zu je zweien zu wählen, sondern kann bas Verfahren entsprechend abfürzen; wir wollen dies jedoch nur andeuten, indem wir darauf

<sup>1)</sup> Ebenso wie entsprechend in dem oben betrachteten Analogon des Statklubs die Spielordnung eine solche war, daß irgend zwei Mitzglieder jedensalls an einem Abend der Woche, aber auch nicht öfter, zusammen am Spieltisch sitzen.

hinweisen, daß, wenn wir, wie oben von 3, 5, jest von 3, 6 ausgehen würden, wir als dritte Zahl natürlich 5 sinden, also zu derselben "richtigen" Position 3, 6, 5, die wir bereits gebildet hatten, kommen würden, so daß wir also, ohne eine Einbuße zu erleiden, die Kombination 3, 6 ganz ignorieren dürsen. Jedenfalls erschöpfen wir aber leicht durch ein solches Bersahren die Gesamtheit aller Positionen des Systems I und erkennen so, daß es außerhalb der Positionen von System I und II einschl. 0, 0, 0 keine weitere Position geben kann, die die verlangte Eigenschaft der "richtigen" Positionen besitzt.

Aus dem Vorhergehenden erhellt nun weiter leicht, wie wir eine "unrichtige" Position in eine "richtige" überzusühren haben. Da die anfängliche Position als "unrichtig" voraussgeset wird, so wird mindestens eine der Grundzahlen 4, 2, 1 eins oder dreimal vorkommen; denn anderenfalls wäre die Position ja bereits "richtig". Wir sehen uns nun hierauf jedesmal die Grundzahlen 4, 2, 1 von links nach rechts an. In unserem oden (S. 76) zuleht betrachteten Beisviel

3 = 2 + 1 6 = 4 + 2 7 = 4 + 2 + 1

kommt zunächst die Grundzahl 4 zweimal vor. Daran darf also nichts geändert werden. Sodann kommt jedoch die Grundzahl 2 dreimal vor, die Grundzahl 1 dagegen wieder zweimal; es ist also nur eine 2 zu beseitigen. Man verringert somit entweder den ersten Hausen von 3 auf 1 oder den zweiten von 6 auf 4 oder den dritten von 7 auf 5. In jedem Falle fällt eine 2 fort. Genau dieselben drei Möglichkeiten hatten wir schon oben (S. 74) für diesen Fall und zwar lediglich auf

1 = 1 2 = 2 4 = 4

grund ber Betrachtung bes Systems I angegeben. — Wir nehmen auch bas erste ber obigen (S. 76) Beispiele por:

Die erste Grundzahl, bei ber die Bedingung für die "richtige" Position nicht erfüllt ist, ist die nur einmal vorkommende 4; man wird also diese, da auch die Grundzahlen 2 und 1 nur je einmal vorkommen, ersetzen müssen durch 2 + 1. Alsbann

fommt die 4 gar nicht mehr und 2 und 1 je zweimal vor. Praktisch bedeutet dies: der Hausen 4 wird auf 3 verringert, und man gelangt so zu der "richtigen" Position 1, 2, 3. In diesem Falle gibt es nur diese eine Möglichkeit, von 1, 2, 4 zu einer "richtigen" Position zu gelangen; denn es darf nur verringert, nicht hinzugefügt und es darf gleichzeitig auch nur ein Hausen, nicht etwa mehrere zugleich, verringert werden. Deshalb mußte die größte nur einmal vorsommende Grundzahl, nämlich 4, ganz beseitigt und zu den anderen nur einmal vorstommenden, nämlich 2 und 1, je eine gleiche hinzugefügt werden. Man erkennt leicht, daß eine solche Möglichkeit stets vorhanden sein muß, womit die im Beweise des Sahes 2 oben (S. 74 unten) gebliebene Lücke ausgefüllt ist.

## § 3. Das praktische Spiel.

Aus ben vorstehenden Erörterungen ergeben sich für das praktische Spiel nun folgende im wesenklichen schon am Ende von § 1 antizipierte Konsequenzen: Da die "unrichtigen" Positionen sehr viel zahlreicher sind als die "richtigen", so wird die willfürlich") gewählte Ansangsstellung zumeist eine "unrichtige" sein. Der beginnende Spieler A wird diese dann durch seinen Zug in eine "richtige" umwandeln; der zweite Spieler B kann aus dieser "richtige" "Position jedoch nur wieder eine "unrichtige" machen, die alsdann wieder von A in eine "richtige" übergeführt wird. A schreitet so von einer "richtigen" Position zu einer anderen sort und gewinnt schließlich. Ist also die willsürlich gewählte Ansangsstellung "unrichtig", wie es zumeist der Fall sein wird, so gewinnt bei richtigem Spiel der Anziehende; ist die Ansangsstellung eine "richtige", so gewinnt bei richtigem Spiel der Nachziehende.

Die Art, wie sich hiernach das Spiel gestaltet, mag auch noch durch ein Beispiel veranschaulicht werden, wobei wir die Züge numerieren und bei jedem Spieler diejenige Position an-

geben, die er burch den betreffenden Bug herftellt:

Anfangsstellung: 4, 5, 6.

<sup>1)</sup> Die Bestimmung der Ansangsstellung werden die Spieler, etwa vermittelst des Loses oder nach irgend einem anderen Bersahren, dem Zusalf — oder auch einer am Spiel unbeteiligten und der Spieltheorie unkundigen dritten Person überlassen.

1) 3, 5, 6 — etwa 3, 5, 4 2) 1, 5, 4 — " 1, 4, 4.

A muß jest ben letten Stein bes erften Saufens nehmen und schafft so eine "richtige" Stellung mit nur zwei und zwar gleichen Haufen (Shitem II), alfo:

A nimmt jest stets ebenso viele Steine von bem anderen (größeren) Saufen, damit die Gleichheit der beiben Saufen bestehen bleibt, also:

4) 0, 2, 2 — etwa 0, 1, 2 5) 0, 1, 1 — " 0, 1, 0 6) 0, 0, 0

Selbstverftändlich ift man keineswegs an die Maximalzahl 7

für die Objekte bes einzelnen Saufens gebunden, vielmehr hatten wir dieje nur aus Bequemlichkeitsgründen vorläufig angenommen. Der Leser wird auch, wenn er darüber hinausgehen will, bas Shiftem ber "richtigen" Positionen nach ben Ausführungen bes § 2 leicht felbst erweitern konnen. Enthält 3. B. ein Saufen 7, ber zweite 9 Steine, so werden wir diese Position zu einer "richtigen" erganzen, indem wir 7 und 9 in den Grundzahlen darstellen, wobei zu 1, 2 und 4 jest als nächste Grundzahl 8 hinzutritt. Wir erhalten fo:

$$7 = 4 + 2 + 1 \\
9 = 8 + 1.$$

Die britte Bahl muß also sein 8+4+2=14 und die "richtige" Position ist mithin 7, 9, 14. Will man so beim Spiel beispielsweise bis zu 15 Steinen einschließlich geben, jo erhalt man als Erweiterung bes früheren Spftems I bas folgenbe:

1,	2,	3	2,	4,	6	3,	4,	7	4.	8, 12
	4,			5,		3,	5,	6		9, 13
	6,		2,	8,	10	3,	8,	11		10, 14
	8,		2,	9,	11	3,	9,	10		11, 15
	10, 1		2,	12,	14	3,	12,	15		
1,	12, 1	3	2,	13,	15	3,	13,	14		
1	14 1	5								

5,	8, 1	3	6,	8,	14	7	8,	15
5,	9, 1	2		9,		7.	9,	14
5, 1	0, 1	5	-	10,			10,	
5, 1	1, 1	4	6,	11.	13		11	

Hositionen mit nur noch zwei Haufen, die einander gleich sind.

Das Spiel kann auch mit mehr als 3, ja beliebig vielen Haufen gespielt werden, doch soll foll darauf hier nicht eingegangen werden, obwohl die Theorie des Spiels alsdann sich nur unswesentlich ändert. — Man kann auch sestlegen, daß derzenige, der den letzten Stein nehmen muß, als Berlierer gilt. Auch für diese Spielregel bleibt die obige Theorie in der Hauptsache bestehen; immerhin tritt eine kleine Erschwerung ein, so daß wir deshalb auf diese Bariante unseres Spiels nicht näher einzgehen, obwohl sie die verbreitetere sein soll.

Frage 20: Ein Haufen enthält 7, ein zweiter 25 Steine; wie viele muß ber britte enthalten, wenn die Position "richtig" sein soll?

Frage 21: Wer gewinnt bei der Anfangsstellung 3, 17, 18 bei richtigem Spiel?

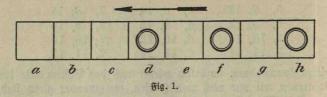
## § 4. Gine andere Ginkleidung des Spiels.

Kürzlich wurde unser Spiel, in eine andere Form gekleibet, den Lesern der Unterhaltungsbeilage zur "Danziger Zeitung" als Aufgabe vorgelegt. Wir beschränken uns hier darauf, in dieser Einkleidung nur den einfachen Fall zu betrachten, der unserem Kimspiel im Gebiete von höchstens 7 Objekten entspricht, und wollen in der neuen Einkleidung gleich eine spezielle Aufgabe dieses Gebietes herausgreifen:

Auf einer Reihe des Schachbretts, also einem achtfeldrigen Gebiet, stehen 3 Steine, nämlich auf den feldern d, f, h (s. fig. 1)1). Zwei Spieler, A und B, sollen in abwechselnden Zügen die 3 Steine auf das Schluffeld a nach folgenden Regeln bringen: Jeder Spieler hat bei jeder Cour einen und auch nur einen

<sup>1)</sup> In der Figur find die Felber entgegen bem Schachbrett alle einfarbig gezeichnet.

Anus 170: Ahrens, Mathem. Spiele.



Stein, den er jedesmal beliebig wählen darf, zu ziehen und zwar soweit er will, allerdings nur in der Richtung des Pfeils, also von rechts nach links. Der Stein darf also auch auf ein von einem anderen Stein besetztes feld gezogen werden oder einen anderen Stein überspringen. Wer den letzten Stein in das Schlußfeld abringt, ist Sieger.

Der Leser erkennt sosort die vollständige Jdentität dieses Spiels mit dem "Nim": Bezeichnen wir nämlich den Abstand des Feldes down Schlußseld a mit 1, so hat down a den Abstand 3, f und h die Abstände 5 resp. 7. Die Anfangssteellung der Figur ist somit völlig charakterisiert durch 3, 5, 7. Die 3 Steine entsprechen also den 3 Hausen deim "Nim". Das Vorrücken der Steine nach dem Schlußselde zu entspricht der Verminderung der 3 Hausen beim "Nim". Da nun vor allem auch die Spielregeln, wie der Leser bereits erkannt haben wird, sich vollständig entsprechen, so dürsen wir unsere oben gewonnenen Resultate hier sosort nugbar machen: Die Anfangsstellung 3, 5, 7 schreibt sich bei Darstellung der 3 Zahlen durch die Grundzahlen so:

3 = 2 + 1 5 = 4 + 17 = 4 + 2 + 1;

sie ist also "unrichtig" (wegen ber breimaligen Grundzahl 1), geht aber in eine "richtige" über, wenn einer ber 3 Haufen um 1 verringert wird. Dem Spieler A stehen also für den Ansang solgende 3 gleichwertige Züge zur Verfügung: d—c oder f—e oder h—g. Wir wollen nur einen dieser Fälle, etwa den letzen, weiter versolgen: B sindet in diesem Falle die Stellung d, f, g vor. 1) Zieht B nun so, daß ein Doppelstein auf einem Felde entsteht, z. B. g—f oder g—d oder f—d, so läßt A die beiden zusammenliegenden Steine unberührt und

zieht den dritten ins Schlußfeld. B findet dann für den nächsten Zug etwa die Stellung d, d vor und zieht nun z. B. einen der Steine von d nach c; A rückt dann mit dem zweiten Steine nach c nach und muß bei dieser Taktik, die der beim "Nim" oben befolgten völlig analog ist, gewinnen. 2) Vermeidet B beim ersten Zuge die Herstellung eines Doppelsteins und zieht z. B. f.— 0, so sindet A für seinen zweiten Zug die Stellung d, 0, g oder 3, 4, 6 vor. A hat alsdann nur einen "richtigen" Zug: d.— c, wodurch die "richtige" Position c, 0, g resp. 2, 4, 6 entsteht. Unter den verschiedenen möglichen Fortsehungen sei nur solgende herausgegriffen:

B g - f(c, e, f resp. 2, 4, 5) notwendig: c - b etwa e - d (b, e, f resp. 1, 4, 5) (b, d, f resp. 1, 3, 5) notwendig: f - c etwa c - a (b, d, c resp. 1, 3, 2) (b, d resp. 1, 3) notwendig: d - b b -- a (b, b resp. 1, 1) (b refp. 1). b - a und gewinnt.

Will man das Spiel über ein größeres Gebiet erstrecken, so braucht man nur das ganze Schachbrett ober ein anderes Spielbrett zu nehmen und festzusehen, in welcher Reihenfolge die Felder aufeinander folgen sollen.

Frage 22: Wer gewinnt bei der Anfangsstellung c, f, h bei richtigem Spiel?

#### Kapitel VIII.

## Der Röffelsprung.

## § 1. Definition. Gefdichte. Borbemerkungen.

Das gewöhnliche Schachbrett weift bekanntlich 64 Felber auf und erfordert jum Spiel 32 Figuren Die Bahl ber Riguren wurde alfo gerade ausreichen, um alle Felber ber einen Bretthälfte zu besetzen. Berschiedene Schachautoren bes Mittelalters machen von biefem Umftande Gebrauch, um folgende Aufgabe zu ftellen: Man bente fich die eine Balfte bes Brettes mit ben Figuren in beliebiger Ordnung vollbefest und fchlage nun mit einem ber Springer in beliebiger, aber ununterbrochener Reihenfolge alle Figuren fort. Bekanntlich "fchlägt" man im Schach eine Figur mit einer zweiten, wenn man die lettere auf bas Felb ber erfteren bringt. Der betreffende Springer, welcher alle Figuren sutzessive schlagen foll und felbft auf einem ber 32 Felber fteht, hat also die Aufgabe, von feinem Felbe aus hintereinander auf alle 31 anderen Felber und zwar auf jedes nur einmal zu fpringen und dabei Felber ber anderen Bretthälfte nicht zu betreten.

Hieraus hat sich nun die weitere Aufgabe entwickelt, nicht nur das halbe, sondern das ganze Schachbrett in beliebiger, aber ununterbrochener folge der 64 felder mit dem Springer zu durchlaufen, eine Aufgabe, die heute unter dem Namen "Rösselsprung" allgemein bekannt ist und in dem Rätsel-Repertoire zahlreicher Familien-Journale einen ständigen Platz einnimmt, die aber um die Mitte des 18. Jahrhunderts noch wenig befannt gewesen sein muß, da sie dem großen Mathematiker Euler, dem ersten wissenschaftlichen Schriftsteller über diese Frage, als

ein bis dahin ihm unbekanntes Problem in einer Gesellschaft entgegengetreten war. Allerdings muß balb darauf und viel-leicht zum Teil infolge von Eulers diesbezüglicher Abhandlung die Aufgabe weite Berbreitung gefunden haben, so daß beispielsweise ein jüngerer Zeitgenosse Eulers, von Kempelen (1734 bis 1804), durch seinen berühmten Schachautomaten bereits Kösselprünge ausführen ließ.

Ein "Springerzug" besteht bekanntlich darin, daß die Figur von ihrem Felde nach einer der beiden Seiten um zwei Felder in horizontaler und dann von hier um eins in vertikaler Richtung resp. zuerst um zwei in vertikaler und dann um eins

in horizontaler Richtung sortschreitet. Bon zwei Felbern, zwischen benen ein Übergang vermittels eines solchen Springerzuges möglich ist, sagt man, "sie rösseln sich". Die Maximalzahl ber mit einem gegebenen Felbe sich rösselnben Felber ist offenbar 8, wie Fig. 1 barstellt, wenn wir unter bem schrafsierten Felb bas Felb bes Springers verstehen, und die 8 Felber, welche sich mit dem schrafsierten Felbe "rösseln", durch Kreuze bezeichnen. Die Figur

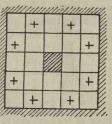


Fig. 1.

stellt natürlich nur einen Teil bes Schachbretts dar und zwar eine Partie aus dem Innern. Würden wir den Springer mehr nach dem Rande des Brettes zu aufstellen, so würde sein Feld sich eventuell nur mit 6, 4 oder 3 und, wenn wir ihn auf einem Echseld aufstellten, gar nur mit 2 anderen Feldern rösseln. — Wir haben in unserer Figur den auf dem Schachbrett üblichen Unterschied zwischen schwarzen und weißen Feldern nicht gemacht und werden auch in den weiteren Figuren hiervon absehen; der Leser erkennt jedoch auch so, daß, wenn unser in Fig. 1 schrafsiertes Feld auf dem Schachbrett etwa schwarz ist, alle 8 Felder, welche sich damit rösseln, weiß sind und umgekehrt. Der Springer wechselt also mit jedem Zuge die Farbe des Feldes: steht er jetzt auf einem weißen Felde, so gelangt er durch den nächsten Zug, den er tut, sicher auf ein schwarzes, von dort wieder auf ein weißes usw.

Das erfte Feld eines Röffelsprungs nennen wir "Anfangs-" ober "Ausgangsfelb", das lette "Schlußfelb", beide gemeinsam

die "Endfelber". Rösseln sich Ausgangs» und Schlußfeld, so daß man also von dem Schlußfeld durch einen Springerzug wieder zu dem Ausgangsseld zurückehren kann, so nennt man den Rösselsprung "geschlossen", anderenfalls "ungeschlossen" ober "offen".

## § 2. Beispiele von Rösselsprüngen.

Die Anzahl aller überhaupt möglichen verschiedenen Rösselsprünge ist bisher nicht ermittelt; jedenfalls ist sie aber ganz außerordentlich groß. Bir können hier natürlich nur einzelne wenige Beispiele herausgreisen, und zwar wollen wir mit dem ersten Beispiel, das wir geben, der im vorigen Paragraphen angegebenen historischen Entwickelung unseres Problems insofern Kechnung tragen, als wir fordern, daß bei unserem Rösselsprung zunächst die eine Bretthälste für sich allein ganz abgelausen

						The same of	
37	62	43	56	35	60	42	50
44	55	36	61	42	49	34	59
63	38	53	46	57	40	51	48
54	45	64	39	52	47	58	33
1	26	15	20	7	3,2	13	22
16	19	8	25	14	21	6	31
27	2	17	10	29	4	23	12
18	9	28	3	24	11	30	5

Fig. 2.

werbe und dann erst die andere an die Reihe komme. Ein solcher "zweiteiliger" Kösselsprung, wie man sagt, ist der von Euler herrührende der Fig. 2. Die Felder werden dabei in der Reihensolge vom Springer durch-lausen, wie die hineingeschriedenen Bahlen dies angeben, also zu-nächst die ganze untere Bretthälste und dann erst die obere.

Unser Rösselsprung ist übrisgens auch "geschlossen", b. h. ersmöglicht einen Übergang von

dem Schluffeld zum Ausgangsfeld zurück, da die Felder 64 und 1 sich rösseln. Wit der Existenz eines geschlossenen Rösselsprungs ist zugleich der Nachweis erbracht, daß auch dei des liebigem Ausgangsfeld stets ein Rösselsprung und zwar ein geschlossener existiert. Um z. B. einen solchen mit 19 als Ansfangsfeld zu erhalten, braucht man ja in Fig. 2 nur die Felder 19—64 in alter Beise zu durchlausen, von 64 zu 1 zu gehen und dann die Felder 1—19 wieder in alter Beise zu durchlausen. Es ist damit sogar gezeigt, daß es dei beliebigem Ausgangsfeld sogar mindestens 2 Rösselsprünge gibt, da jeder geschlossene Rösselsprung natürlich eine Durchlaufung der Felder

in zwiesacher Reihenfolge gestattet, z. B. unser ursprünglicher (Fig. 2) neben der Durchlaufung im angegebenen Sinne  $(1, 2, 3 \dots 64, 1)$  auch die in umgekehrtem Sinne  $(1, 64, 63 \dots 2, 1)$ .

Die Diagramme der weitaus meisten Rösselprünge bieten natürlich ein durchaus unregelmäßiges Aussehen, und eine vollständige Shmmetrie ist aus Gründen, welche in der Natur der Aufgabe liegen, überhaupt nicht zu erreichen. Die Rösselsprungkomponisten haben jedoch vielsach auch den ästhetischen Rück-

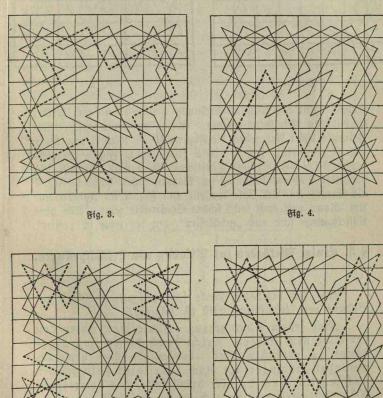
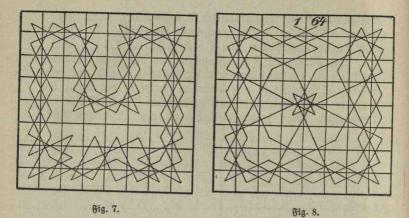


Fig. 5.

Fig. 6.



sichten soweit wie möglich Rechnung getragen und sind hierbei zu hübschen Resultaten gelangt. Einige der bemerkenswertesten Beispiele dieser Art geben die Figuren 3—8 wieder, von denen Fig. 3 ein Kreuz, Fig. 4 ein N (Napoloon), Fig. 5 ein viersaches W (Wij Willen Wilhelmus Wederom), Fig. 6 ein doppeltes V (Vivat Victoria) im Bappen führt, während Fig. 7 als Ganzes eine Art Lase darstellt und Fig. 8 im Innern eine Art Blume und auch sonst schollen, nur der letzte ist "offen".

## § 3. Ginige Methoden jur Bildung von Röffelfprüngen.

I.

Gine für praktische Zwede sehr geeignete Vorschrift zur Bildung von Röffelsprüngen ift die folgende:

"Bei jedem Springerzuge wähle man unter den verschiedenen Feldern, welche durch diesen Zug über- haupt zu erreichen sind, dasjenige, von dem am wenigsten Springerzüge nach unbesetzten Feldern hin noch möglich sind, da hier die Gesahr, das betreffende Feld nicht wieder zu erreichen und es somit ganz außzulassen, verhältnismäßig am größten ist, während natürlich diesenigen Felder, welche noch mit einer größeren Zahl von freien Feldern sich rösseln, eher

von einem dieser aus später noch erreicht werden fonnen. Stehen hiernach mehrere Felder (mit einer gleichen Mindeftzahl von freien Ausgangen) gur Bahl. fo mable man unter ihnen beliebia".

Die praktische Brauchbarkeit bieser Regel ift so groß, daß sie selbst bei ganz willfürlich angefangenen und schon ziemlich weit ohne Beachtung ber Regel fortgesetzen Rösselsprüngen noch jum Biele führt. Es möge 3. B. ber Röffelsprung über 40 Felder bereits willfürlich, wie Fig. 9 angibt, geführt sein; die Beachtung unferer Regel liefert uns alsbann ben vollständigen Röffelsprung, wie ihn Fig. 10 darftellt.

Die Art wie der Röffelsprung der Fig. 10 bei Anwendung unserer Regel entstanden ift, mag noch durch folgende Auß= führungen erläutert werden, wobei wir die Felder des Schach= bretts ber Ginfachheit wegen mit ben Zahlen ber Fig. 10 bezeichnen wollen: Bon Feld 40, dem Endpunkt unserer anfäng-lichen planlosen Wanderung (Fig. 9), sind außer dem Feld 41 noch folgende bisher leer gebliebene Felder erreichbar: 43, 45, 59 und 49. Von diesen besitzt das Feld 43 noch drei offene Aus-gänge, nämlich nach 42, 44 und 60; Feld 45 hat gleichfalls brei folder Ausgänge, nämlich nach 44, 58 und 46 und ebenfoviel Ausgänge befigt auch jedes der Felder 59 und 49. Da= gegen hat Feld 41 nur noch zwei offene Ausgänge, nämlich

	21	34	9	JA LIE	19	32	7
35	10		20	33	8		18
22	a lan					6	31
11	36					17	
	23			40		30	5
37	12	25		27			16
24		2	39	14		4	29
1	38	13	26	3	28	15	

54	21	34	9	58	19	32	7
35	10	55	20	33	8	57	18
			59.				
			46				
			67				
			48				
			39				
			26				

Sta. 10.

nach 42 und 48. Wir erhalten also in unzweibeutiger Beije 41 als dasjenige aller in Betracht tommenben Felber, welches am wenigsten freie Ausgange besitht, und muffen baber nach unserer Regel von 40 auf 41 fpringen. - Für ben nächsten Rug tommen in Frage bie Felber 42 und 48. Bon biefen hat das zweite jett noch vier freie Ausgänge, nämlich nach 47, 63, 49 und 51; dagegen hat 42 beren nur einen, nämlich nach 43. Wir muffen also unbedingt 42 mablen. Burben wir bies nicht tun, sondern von 41 zu 48 geben, so könnten wir späterhin zu 42 nur noch von 43 aus gelangen, aber 42 nicht mehr verlaffen. Felb 42 würde alfo entweder gang ausfallen ober es könnte höchftens noch Schluffelb des Röffelsprungs, biefer felbst also wenigstens fein "geschloffener" mehr werben. — Bon 43 aus fann man zu 44 und 60 gelangen und zwar haben diese beiben Felder je brei freie Ausgänge; man kann also ber Regel gemäß zwischen beiben beliebig mahlen. Entscheibet man sich, wie wir tun wollen, für 44, fo führt die weitere Wanderung notwendig zu Felb 45, da biefes nur zwei freie Ausgange hat, während die baneben zur Wahl stehenden Felber 47 und 57 beren ie brei besitzen. In biefer Beife fest fich bas Berfahren fort.

Frage 23: Wähle die ersten 37 Felder so wie in dem Rösselsprung der Fig. 8 und setze die Wanderung von da ab nach der eben besprochenen Regel fort!

#### II.

Während die soeben angegebene Methode, so wertvoll sie für Vervollständigung bereits angesangener Rösselsprünge ift, der strengen theoretischen Begründung entbehrt und daher auch nicht notwendig zum Ziele zu führen braucht, wenn dies im allgemeinen auch der Fall sein wird, mögen jetzt noch zwei andere Methoden besprochen werden, welche sich zwar nicht einem beliedigen Ansang anpassen, dafür aber die Bildung eines Rösselsprungs von Ansang an in leicht übersichtlicher Weise sehren. Bei der einen Methode denkt man sich das Schachbrett in ein inneres Duadrat von 16 Feldern und ein Kandgebiet von 48 Feldern geteilt (s. Fig. 11) und weiter die Felder jedes

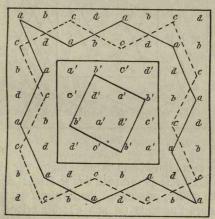


Fig. 11.

bieser 2 Teile in 4 Klassen und zwar so, daß sich die Felber berselben Klasse stets hintereinander mit dem Springer durchslausen lassen. In Fig. 11 ist diese Einteilung so veranschaulicht, daß die Felber derselben Klasse dieselbe Bezeichnung tragen und für einige Klassen die betressenden Ketten von Springerzügen gezeichnet sind. Wir haben im ganzen 8 Ketten von Springerzägen, 4 innere von je 4 Felbern (wir nennen sie kurz: a', b', c', d') und 4 äußere (a, b, c, d) von je 12 Felbern.

Die Methode besteht nun darin, die 8 Retten aneinanderzureihen in der Beise, daß immer eine innere Rette mit einer äußeren abwechselt, wobei alle Folgen zulässig sind außer benen von gleichen Buchstaben, also außer aa', bb', cc', dd', zwischen welchen eben ein übersgang nicht möglich ist. So erhält man einen brauchbaren Rösselsprung beispielsweise aus dem Schema ab'cd'ba'dc', nämlich den in Fig. 12 angegebenen.

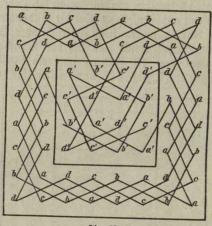


Fig. 12.

Bei der eben besprochenen Methode saßten wir die 16 Felber des inneren Quadrats zu Gruppen von je 4 oder "Quadrupeln", wie wir sagen wollen, zusammen. Zwei dieser Quadrupel bildeten die Figur eines Quadrats (b' und c'), die beiden anderen (a' und d') die eines Khombus. Diese selbe Einteilung wollen wir nun für das ganze Schachbrett durchführen, indem wir diesezunächst in 4 gleiche Teile (Quadranten), jeden auß 16 Felbern bestehend, teilen und darauf in jedem dieser Quadranten die Felber zu Quadrupeln zusammensassen. Die 4 Felber, die zu demselben Quadrupel gehören, sollen dieselbe Bezeichnung erhalten, z. B. alle vier ein a oder ein C oder ein E'usw. (s. Fig. 13). Die entsprechend gelegenen Quadrupel in den 4 Quadranten mögen durch dieselbe Buchstabenart bezeichnet, jedoch untereinander durch kleine und große Buchstaben und Strichelung derselben unterschieden werden, also z. A. a. A. A. Dabei mögen die Quadrupel, welche die Figur eines Khombus ausweisen,

I Tour							
A	B	C	E	a	ъ	c	e
C	E	A	B	c	e	a	ъ
В	1	E	C	ь	a	e	c
E	C	В	1	e	c	ъ	a
a'	ъ'	c'	e'	A'	B'	C"	E'
c'	e'	a'	ъ'	C'	<b>B</b> '	A'	<i>B'</i>
7'	a'	e'	c'	B'	A'	E'	C'
e'	·c'	7'	a'	E'	C'	<b>B</b> '	A'
			01-	19	WEST TO SERVICE STATE OF THE PERSON NAMED IN COLUMN TWO IS NOT THE PERSON NAMED IN COLUMN TWO IS NAMED IN		-

Fig. 13.

durch Bokale (A und E), die mit der Figur eines Quadrats durch Konsonanten (B und C) bezeichnet werden.

Man kann nun die Quadrupel desselben Buchstabens anseinanderreihen. Zeichnen wir z. B. die 4 Rhomben A, a, A', a', so sehen wir, daß wir diese zu einem zusammenhängenden Zug verbinden können, indem wir in allen 4 Rhomben je eine Seite fortnehmen und durch einen Verbindungs-Springerzug ersehen, mobei die 4 fortgenommenen Seiten einander parallel sind. Für

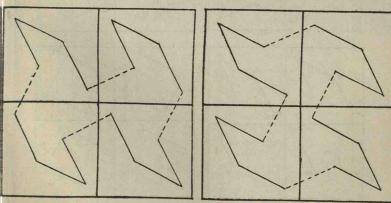


Fig. 14.

bie fortzunehmende Seite können offenbar in jedem Rhombus nur 2 in Betracht kommen, nämlich die nach den anliegenden Quadranten zu liegenden, und man erhält so die 4 Quadrupel A, a, A', a' auf 2 Arten zu einem "Zuge" vereinigt, wie Fig. 14 dies angibt.

Wir bekommen also zwei Züge A, wie wir kurz sagen wollen, zwei Züge B, zwei C und zwei E. Die Züge A und E — wir wollen sie "Bokalzüge" nennen — sehen sich aus Rhomben zusammen, die Züge B und C, die "Ronsonantenzüge", aus Quadraten. Es handelt sich jett, um einen vollständigen Rösselsprung zusammenzusehen, nur noch darum, 4 Züge, nämlich je einen von A, von B, von C und von E, aneinanderzureihen. Dabei ist nur zu beachten, daß man von einem Bokalzug zu einem anderen Bokalzug, also von A zu E, nicht übergehen kann und ebensowenig von einem Konsonantenzug zu einem

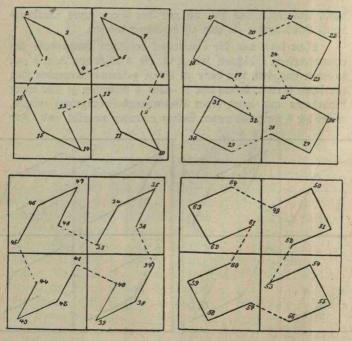


Fig. 15.

anderen solchen; benn, wie der Leser aus Fig. 13 sosort ersieht, rösselt kein Feld A, a, A', a' sich mit einem Felde E, e, E', e' und das Entsprechende gilt für die durch Konsonanten bezeichneten Felder. Dagegen kann man von einem Bokalzug zu einem Konsonantenzug überspringen, also die 4 Züge von je 16 Feldern etwa in der Reihenfolge ABEC aneinanderzeihen, wodurch man einen vollskändigen Kösselsprung erhält, wie Fig. 15 für diesen Fall durch die hinzugesetzten Zahlen angibt.

Natürlich lassen sich auch Rösselsprünge für andere quadratische oder rechteckige oder andersartig geformte Bretter angeben, wenn dies auch nicht unter allen Umständen möglich ist. Auf diese Fragen kann hier jedoch nicht näher eingegangen werden, und ebensowenig auch auf die Rösselsprünge in dreidimensionalen Gebieten (kubische Rösselsprünge).

## § 4. Magische Rösselsprünge.

Eine besonders tunstvolle Form der Rösselfprünge bilden diejenigen, bei denen die Ziffern, welche die Reihenfolge der Felder angeben, in jeder horizontalen und jeder vertikalen Reihe eine konstante Summe ergeben. Solche Rösselsprünge, welche danach also die Haupteigenschaft der im nächsten Kapitel (IX)

50	11	24	63	14	37	26	35	260
23	62	51	12	25	34	15	38.	260
10-	49	64	21	40	13	36	27	260
61	22	9	52	33	28	39	16	260
48	7	60	1	20	41	54	29	260
59	4	45	8	53	32	17	42	260
6	47	2	57	44	19	30	55	260
3	58	5	46	31	56	43	18	260
260	260	260	260	260	260	260	260	

Fig. 16.

zu besprechenden "magischen Quadrate" ausweisen und daher "magische" resp. "semi-magische" genannt werden, sind von verschiedenen Liebhabern konstruiert. — Soll die Summe in allen horizontalen und vertikalen Reihen konstant sein, so ergibt sich für diese Summe nach einer leichten Rechnung der Wert 260.

Der obige (Fig. 16.), von dem russischen Schachtheoretiker Major von Jaenisch herrührende Rösselsprung ist besonders kunstvoll: er besitzt nicht nur die gesorderte Eigenschaft, sondern ist auch geschlossen, zudem symmetrisch, da die erste Hälfte (1—32) durch Drehung des Bretts um 180° in die zweite (33—64) übergeht; außerdem läßt er sich in 2 geschlossene halbe Rösselsprünge von je 32 Feldern zerlegen, da 1 und 32 einerseits und 33 und 64 andererseits sich rössels.

#### Kapitel IX.

## Magische Quadrate.

#### § 1. Ginleitung.

Auf seinem bekannten Aupserstich "Welencolia", dem Titelbild unseres Bändchens, hat Albrecht Dürer, selbst hervorragender Mathematiser und Bersasser mehrerer mathematischer Schriften, die sitzende Figur der Geometria, umgeben von stereometrischen Körpern (Kugel, Polheder) und allerlei Handwerkszeug zum Messen und Wägen, den Zirkel in der Hand, zur allegorischen Bersinnbildslichung des Sinnens und Grübelns dargestellt. Zu häupten der

Figur befindet sich ein Zahlenquadrat, das wir der besseren Deutlichkeit halber hier nochmals (5. Fig. 1) wiedergeben. Es weist in seinen 16 Zellen die Zahlen von 1 bis 16 auf, und unten die Mittelselber der letzten Reihe geben das Jahr 1514 an, dem der Kupferstich angehört. Die Zahlen sind so geordnet, daß, wenn wir die Zahlen irgend einer Horizontalreihe oder "Zeile"

3. B. der britten: 9, 6, 7, 12

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1.

Fig. 1.

zusammenzählen, wir stets die Summe 34 erhalten. Dieselbe Summe bekommen wir aber auch, wenn wir die Zahlen irgend einer Vertikalreihe oder "Kolonne" — z. B. die der ersten links: 16, 5, 9, 4 — addieren. Ja, selbst die beiden Diagonalreihen, nämlich 16, 10, 7, 1 und ebenso 13, 11, 6, 4, ergeben die nämliche Summe 34. — An der Villa Albani in Rom besindet sich, in Marmor hergestellt, ein Quadrat von gleichen Eigenschaften, nur nicht von  $4 \times 4$ , sondern von  $9 \times 9$  Feldern, das in entsprechender Weise die Zahlen von 1 bis 81 ausweist. Man bezeichnet solche Zahlenquadrate, die eine konstante Summe in allen horizontalen, vertikalen und diagonalen

Reihen ergeben, als "magische Quadrate".¹) Dft ergibt sich die betreffende konstante Summe nicht nur in den angegebenen Reihen, sondern auch noch auf mancherlei andere Weise; so können wir z. B. das Dürersche Quadrat in vier Viertelquadrate, jedes also von 4 Feldern, zerteilen, und jedes Viertel weist alsdann für sich die Zahlensumme 34 auf; serner ergibt das Quadrat der 4 inneren Zahlen 34; ebenso die 4 Ectzahlen zusammen; serner das Quadrat des Springer = Viererzugs ²) 5, 2, 12, 15 resp. 3, 8, 14, 9 oder die entsprechenden Rhomben 16, 11, 1, 6 und 13, 10, 4, 7 usw. Man sieht, die Eigenschaften dieser Quadrate sind so merkwürdige, daß eine zur Whstik neigende Zeit sie wohl in Verdindung mit allerlei "magischen" Künsten bringen und sie für mancherlei askrologische, selbst medizinische Zwecke verwerten zu sollen glauben konnte.

#### § 2. Das neunzellige Quadrat.

Das 16 zellige Dürersche Quadrat stellt noch nicht den einsachsten Fall magischer Quadrate vor, vielmehr gibt es auch solche von  $3\times 3=9$  Zellen, während allerdings magische Quadrate von  $2\times 2=4$  Zellen ausgeschlossen sind, wie der

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	1. 0	

otg. 2.

Leser leicht erkennt. Wir wollen uns zunächst die Aufgabe stellen, ein neunzelliges magisches Quadrat zu bilden, also die Aufgabe, die neun Zahlen 1, 2 . . 9 (s. Fig. 2) so in die Zellen einzuordnen, daß in den angegebenen Keihen stets eine und dieselbe konstante Summe sich ergibt. Welche Summe wird dies sein? — so lautet die

Vorfrage, die wir uns zunächst vorlegen. Die Antwort erhalten wir am schnellsten, wenn wir die 9 Zahlen zweimal unter einander, jedoch in verschiedener Richtung, hinschreiben, also so:

Je zwei untereinanderstehende Zahlen ergeben stets die Summe 10, beide Reihen zusammen also 90, jede Reihe für sich daher 45. 45 ist also die Summe unserer 9 Zahlen; diese verteilen sich nun in unserem neunzelligen Duadrat (Fig. 2) auf 3 Zeilen

2) Bgl. Kap. VIII, § 3, II, insbesondere die Figuren 11, 14, 15.

<sup>1)</sup> Bgl. a. den letzten Paragraphen des vorhergehenden Kapitels: "Wagische Rösselsprünge".

respektive 3 Kolonnen, so daß auf jede Zeile resp. Kolonne als konstante Summe 15 entfallen würde.

Die in bem Mittelfeld ftebende Bahl - in Fig. 2 ift es vorläufig 5 - gehört nicht nur jeder ber beiden Diagonalreihen an, fondern auch ben beiben Mittelachfen, worunter wir die mittlere Horizontalreihe und die mittlere Bertikalreihe ver= stehen. Unbeabsichtigter Beise ergeben bei ber Anordnung ber Fig. 2 biefe 4 Reihen (Diagonalreihen und Mittelachsen), nämlich 1, 5, 9 und 3, 5, 7, ferner 4, 5, 6 und 2, 5, 8, bereits bie geforderte konstante Summe 15, ohne daß jedoch das Quadrat ber Fig. 2 bereits ein "magisches" ware (ber Leser braucht 3. B. nur die erste Horizontalreihe anzusehen). In jeder ber herausgegriffenen 4 Reihen tommt die Bahl des Mittelfelbes vor, im gangen alfo in allen 4 zusammen viermal; dagegen kommt von allen anderen 8 Bahlen ber Fig. 2 jede gerade nur in einer diefer 4 Reihen (Diagonalen und Mittelachsen) vor. Wir fonnen alfo, wenn wir uns die Rahlen unserer 4 Reihen abbiert benten, fagen, bag in diefer Gefamtsumme jebe ber 9 Bahlen gerade einmal vorkommt, die Bahl bes Mittelfelbes aber außerdem noch dreimal. Die Summe ber 9 Bahlen ift nun 45; die Summe unserer 4 Reihen wird also sein gleich 45, vermehrt noch um bas Dreifache ber mittleren Bahl. Andererseits muß aber, wenn bas Quadrat magisch sein foll, jebe ber 4 Reihen die Summe 15 ergeben, alle vier zusammen also 60, woraus durch Bergleichung mit bem obigen Resultat folgt, daß bas Dreifache ber mittleren Rahl = 15, die mittlere Zahl felbst also = 5 sein muß. Wir sehen so, daß alle neunzelligen magischen Quadrate in der Mitte die 5 aufweisen muffen. Dann muffen aber 2 gegenüberliegende Edfelber (1 und 9 ober 3 und 7 in Fig. 2) und ebenso 2 gegenüberliegende Mittelzellen (2 und 8 ober 4 und 6) ent= weder beide mit ungeraden ober beide mit geraden Bahlen besett werden, da mit der 5 in dem Mittelfeld sich sonst in den Diagonalreihen resp. ben Mittelachsen nicht eine ungerade Summe (15) ergeben würde. Alle 4 Eckellen können aber jebenfalls nicht mit den 4 ungeraden Zahlen besetzt werden, ba bann 3. B. die erfte Zeile eine gerade Summe ergeben würde. Bürden nur 2 gegenüberliegende Edzellen mit ungeraden Bahlen befett, fo mußten also bie anderen beiden disponiblen ungeraden Rahlen in 2 gegenüberliegende Mittelzellen gefeht werben; aber bann erhielte man offenbar wieder 2 Reihen mit je 2 ungeraden

und einer geraben Bahl, also einer geraben Summe entgegen unferer Forderung. Die ungeraden Bahlen muffen daher in

5	3
1	8
	5 1

bie Mittelzellen und bie geraden in die Edzellen gesett werden. Siernach fieht man fofort, daß man 8 Lösungen erhält. beren eine die ber Fig. 3 3. B. ift. Aus ihr geben die übrigen 7 auf folgende Beife hervor: Dadurch, daß man sich bas ganze Quadrat um 900, 1800, 2700 gebreht benft, erhält man zunächst brei weitere magische

Quadrate, so daß man also jett über beren 4 im gangen ver= fügt. Bon biefen 4 Quadraten benten wir uns nun jedes an einer spiegelnden Fläche, die fich etwa am unteren Rande des Quadrats befinden mag, gespiegelt, und erhalten so 4 weitere magische Quabrate, fo bag wir im gangen bie verfprochenen 8 haben. Andererseits ift damit aber auch die Zahl aller erschöpft, wie eine einfache Überlegung auf Grund der obigen Ausführungen lehrt.

Frage 24: Wie groß ift bie tonftante Summenzahl bei bem in § 1 erwähnten magischen Quabrat ber Billa Albani?

### § 3. Allgemeine Methode für ungeradzellige Quadrate.

Für größere als vierzellige Quadrate ift unsere Aufgabe ftets lösbar und zwar ift die Lösung bei ungerader Zellenzahl sehr viel leichter als bei gerader. Wir wollen uns daher mit bem erfteren Fall näher beschäftigen und eine allgemein gur Bilbung von ungeradzelligen magischen Quadraten anwendbare Methode besprechen, wobei wir uns an ein bestimmtes Beispiel, das eines Quadrats von 7 × 7 Zellen, halten wollen. Die 49 Bahlen, welche wir in die Zellen des Quadrats einzuordnen haben, wollen wir zunächst in folgender Unordnung schreiben:

Unter einander stehen hierbei immer diejenigen Zahlen, welche bei Division durch 7 denselben Rest lassen: in der ersten Kolonne alle mit Kest 1, in der zweiten alle mit Kest 2 usw., schließlich in der letzten alle mit Kest 0, jedoch ist hier auß später erstennbaren Zweckmäßigkeitzgründen so geschrieben, daß 7 als Kest erscheint. In derselben Beile stehen dagegen alle diejenigen Zahlen, welche ein gleiches Vielsaches von 7 ausweisen: in der ersten diejenigen ohne ein solches Vielsaches, in der zweiten diejenigen mit einmal 7, in der dritten diejenigen mit dem Doppelten von 7 usw., schließlich in der letzten diejenigen mit dem Sechssachen von 7. Wir werden hiernach späterhin eine weitere Erläuterung zu geben nicht nötig haben, wenn wir kurz von den "Kesten" und "Vielsachen" unseres "Schemas" sprechen.

Als Vorstufe zur Bildung eines magischen Quadrats wollen wir uns zunächst einmal nur bie folgende, fehr viel leichtere Aufgabe ftellen: Die 49 Bahlen find in bie 49 Bellen fo einzureihen, daß alle Horizontalreihen die gleiche Summe ergeben. Diese Summe muß, wie vorwegbemerkt sei, offenbar  $\frac{50\times49}{2\times7}$ = 175 sein. — Unsere Teilaufgabe ift sehr viel leichter als bie Hauptaufgabe, weil die Summen der Bertifal- und Diagonalreihen jest beliebig fein durfen und es sich also nur darum handelt, Die 49 Bahlen fo auf 7 Beilen von je 7 Plagen zu verteilen, daß sich bie zwischen ben Bahlen bestehenden Größenunterschiede für die einzelnen Beilen gegenseitig bas Gleichgewicht halten, also in jeder Zeile die Gefamtsumme biefelbe wird. Eine folche Berteilung erhalt man nun, wenn man aus unferer obigen Anordnung bes "Schema" immer je 7 Bahlen so herausgreift, daß niemals zwei derfelben Zeile oder Rolonne des Schema angehören. Man bekommt nämlich, wenn zunächst bie

```
ma"
                                      6 =
                                                       6
                                                              7 =
1 7 + 4
             12 = 1 \times 7 + 5
                                     13 = 1 \times 7 + 6
                                                            14 = 1 \times 7 + 7
             19 = 2 \times 7 + 5
4 \times 7 + 4
                                     20 = 2 \times 7 + 6
                                                            21 = 2 \times 7 + 7
x^{7}+4
             26 = 3 \times 7 + 5
                                     27 = 3 \times 7 + 6
                                                            28 = 3 \times 7 + 7
\times 7 + 4
             33 = 4 \times 7 + 5
                                     34 = 4 \times 7 + 6
                                                            35 = 4 \times 7 + 7
x^{7+4}
             40 = 5 \times 7 + 5
                                     41 = 5 \times 7 + 6
                                                            42 = 5 \times 7 + 7
x7 + 4
             47 = 6 \times 7 + 5
                                     48 = 6 \times 7 + 6
                                                            49 = 6 \times 7 + 7
```

7 gewählten Jahlen alle verschiedenen Kolonnen des Schema angehören, jeden der 7 "Reste", nämlich 1, 2, 3 . . . 7, gerade einmal; die Jugehörigkeit zu den verschiedenen Zeilen würde andererseits zur Folge haben, daß jedes "Vielsache" von 7: das Nullsache, Einsache, Doppelte, . . Sechssache, gerade einmal vorkommt. Als Beispiel braucht man nur die Zahlen der einen Diagonalreihe des "Schema" zu nehmen, da diese alle zu verschiedenen Zeilen und Kolonnen des Schema gehören, also:

$$1 = 1 \\
9 = 1 \times 7 + 2 \\
17 = 2 \times 7 + 3 \\
25 = 3 \times 7 + 4 \\
33 = 4 \times 7 + 5 \\
41 = 5 \times 7 + 6 \\
49 = 6 \times 7 + 7.$$

Alle "Bielfachen" von 7 und alle 7 "Reste" sind in dieser Gruppe vertreten, und es lassen sich offenbar aus allen 49 Jahlen 7 solcher Gruppen bilben. In der Summe der Jahlen jeder Gruppe käme alsdann jedes "Bielfache" und jeder "Rest" gerade einmal vor; die 7 Jahlen jeder Gruppe ergäben also steis dieselbe Summe, nämlich die Summe aller "Bielfachen" und aller "Reste", also  $(1 \times 7 + 2 \times 7 + 3 \times 7 + 4 \times 7 + 5 \times 7 + 6 \times 7) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$ ; das ist aber natürlich unser 175.

Eine zweite berartige Gruppe von 7 folden Bahlen wäre z. B.

$$2 = 2$$

$$10 = 1 \times 7 + 3$$

$$18 = 2 \times 7 + 4$$

$$26 = 3 \times 7 + 5$$

$$34 = 4 \times 7 + 6$$

$$42 = 5 \times 7 + 7$$

$$43 = 6 \times 7 + 1$$

Diese Bahlen enthalten jeben "Rest" gerade einmal und ebenso jebes "Bielsache", und ihre Summe ist baher wieder 175.

Eine dritte weniger übersichtlich ausgewählte Gruppe wäre 3. B.

$$3 = 3$$

$$14 = 1 \times 7 + 7$$

$$16 = 2 \times 7 + 2$$

$$27 = 3 \times 7 + 6$$

$$32 = 4 \times 7 + 4$$

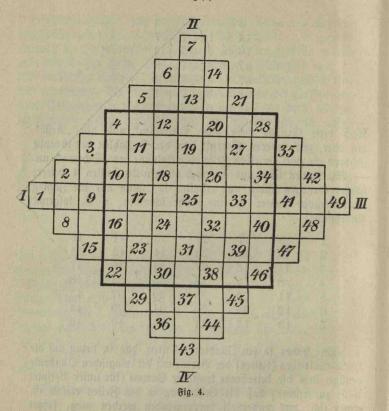
$$36 = 5 \times 7 + 1$$

$$47 = 6 \times 7 + 5$$

Auch diese Gruppe weist alle "Bielfachen" und alle "Reste" auf oder, mit anderen Worten: von den 7 Zahlen der Gruppe gehören nie zwei derselben Zeile oder Kolonne des "Schema" an. — Wir können leicht aus den noch übrigen 28 Zahlen 4 weitere solcher Gruppen bilden und erhalten so, wenn wir die Zahlen einer Gruppe immer in eine Reihe schreiben, z. B. solgende Anordnung:

1 2	9	17	25	33	41	49
3		18	26	34	42	43
	14	16	27	32	36	47
4	8	19	23	35	38	48
5	11	20	28	29	37	45
6	12	21	22	31	39	. 44
7	13	15	24	30	40	46.

Bir haben fo ein Quadrat erhalten, bas in bezug auf die horizontalreihen (Zeilen) ber Bedingung ber magischen Quabrate genügt, ftets die betreffende tonftante Summe (fur unfer Beifpiel 175) zu ergeben; daß bie Bedingung in ben Beilen erfüllt ift, ergibt sich, wie wiederholt hervorgehoben werden mag, sofort aus der Tatfache, daß von den in einer Zeile zusammenftehenden Bahlen niemals zwei berfelben Horizontalen oder Bertifalen bes "Schema" angehören. In den Bertikalreihen (Rolonnen) weift unfer Quadrat bie geforderte Summe natürlich nicht auf, und es wird sich auch durch Umstellen der Zahlen jeder Zeile unter= einander dies nicht erreichen laffen, ba wir bei Auswahl ber Zahlen unserer 7 Gruppen gang unsustematisch verfahren find. Man könnte jedoch natürlich ebenfo, wie wir hier ein Quadrat gebildet haben, das in allen Beilen die fonftante Summe aufweist, ein solches bilben, bei bem dies für alle Rolonnen gilt, und brauchten ja übrigens zu dem Zwecke das obige nur um 900 zu brehen. — Räher unserem schließlichen Ziel, dem magischen



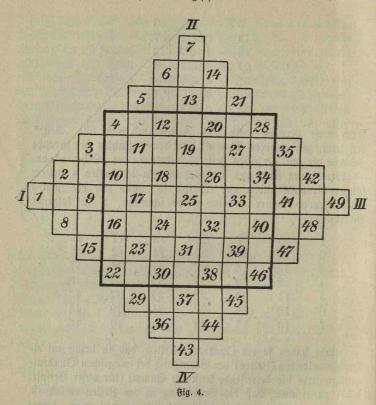
Duadrat, gelangen wir jedoch nur, wenn es uns gelingt, die 49 Jahlen so anzuordnen, daß nicht nur in jeder Zeile, sondern zugleich auch in jeder Kolonne alle "Reste" und alle "Vielsfachen" vertreten sind. Zu dem Zwecke tragen wir die Zahlen des "Schema" in ein aus einem 49 zelligen Duadrat mit 4 anzgesetzen "Terrassen" I—IV bestehendes Feldernetz so ein, wie Fig. 4 dies veranschaulicht: Die Zahlen der ersten Zeile des "Schema" (1, 2 . . . 7) stehen in Fig. 4 in der ersten von links nach oben rechts verlausenden schrägen Felderreihe; dann kommen entsprechend in paralleler Felderreihe die Zahlen der zweiten Zeile des "Schema" (8, 9 . . . 14) uss. Das Bersfahren besteht nun darin, daß die Terrassen so lange

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	27	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

Fig. 5.

in das Quadrat hinein verschoben werben, bis ihre Basis mit der gegenüberliegenden Quadratseite zussammenfällt. Hierdurch gelangen die in den Terrassen stehenden Bahlen in die noch leeren Felder des Quadrats und füllen dieses aus. Das entstehende Quadrat (s. Fig. 5) ist dann ein magisches.

Die Zeilen und Rolonnen bes fo gebilbeten Quabrats genügen unserer Forderung beswegen, weil jede Beile und jede Kolonne des Quadrats (Fig. 5) alle "Reste" und alle "Bielfachen" aufweift. Faffen wir z. B. in Fig. 4 bie Bahlen 8, 9, 10 . . . 14 ins Auge, so gehören davon 10, 11, 12 ben 3 ersten Zeilen bes Quadrats ber 49 Felber an, 9 und 8 tommen später bei ber Terraffenverschiebung in die dann folgenden Beilen, nämlich die vierte und fünfte, mahrend die noch übrigen Bahlen 13 und 14 aus Terraffe II in die beiden letten Beilen. die siebente und sechste, gelangen. Die Bahlen 8, 9, 10 . . . 14, bie bas gemeinsame haben, baß fie alle und fie allein bas "Ginfache" von 7 enthalten in unferer Unordnung bes "Schema", verteilen sich also auf 7 verschiedene Reilen des fertigen Quadrats der Fig. 5. Jede Zeile des Quadrats erhält also das "Einfache" von 7 gerade einmal zuerteilt. — Ebenfo feben wir aus Fig. 4, daß die 7 Zahlen 8, 9, 10 . . . 14 sich auf 7 verschiedene Rolonnen bes Quadrats (Fig. 5) verteilen (10, 11, 12 stehen in ben 3 erften, 13, 14 gelangen in die vierte und fünfte, 8 und 9 bei Berschiebung von Terraffe I in die beiben letten). Umgekehrt erhalt somit jede Rolonne bas



Duadrat, gelangen wir jedoch nur, wenn es uns gelingt, die 49 Zahlen so anzuordnen, daß nicht nur in jeder Zeile, sondern zugleich auch in jeder Kolonne alle "Reste" und alle "Bielsfachen" vertreten sind. Zu dem Zwecke tragen wir die Zahlen des "Schema" in ein aus einem 49 zelligen Duadrat mit 4 angesetzten "Terrassen" I—IV bestehendes Feldernetz so ein, wie Fig. 4 dies veranschaulicht: Die Zahlen der ersten Zeile des "Schema" (1, 2 . . . 7) stehen in Fig. 4 in der ersten von links nach oben rechts verlausenden schrägen Felderreihe; dann kommen entsprechend in paralleler Felderreihe die Zahlen der zweiten Zeile des "Schema" (8, 9 . . . 14) uss. Das Bersfahren besteht nun darin, daß die Terrassen so lange

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	27	3
<b>CONTRACTOR</b>	-	THE REAL PROPERTY.			2	
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

Fig. 5.

in das Quadrat hinein verschoben werden, bis ihre Bafis mit ber gegenüberliegenden Quabratfeite gu= fammenfällt. Sierdurch gelangen die in ben Terraffen ftebenben Bahlen in die noch leeren Felber bes Quadrats und füllen biefes aus. Das entstehende Quabrat (f. Fig. 5) ift bann ein magisches.

Die Zeilen und Rolonnen bes fo gebilbeten Quabrats genügen unserer Forderung beswegen, weil jede Reile und jede Kolonne des Quadrats (Fig. 5) alle "Refte" und alle "Bielfachen" aufweift. Faffen wir z. B. in Fig. 4 bie Bahlen 8, 9, 10 . . . 14 ins Auge, so gehören davon 10, 11, 12 ben 3 ersten Zeilen bes Quadrats ber 49 Felber an, 9 und 8 kommen später bei der Terraffenverschiebung in die dann folgenden Beilen, nämlich die vierte und fünfte, mahrend die noch übrigen Bahlen 13 und 14 aus Terraffe II in die beiden letten Zeilen, bie fiebente und fechste, gelangen. Die Bahlen 8, 9, 10 . . . 14, die das gemeinsame haben, daß sie alle und fie allein bas "Einfache" von 7 enthalten in unferer Anordnung bes "Schema", verteilen sich also auf 7 verschiedene Zeilen des fertigen Quadrats der Fig. 5. Jede Zeile des Quadrats erhält also bas "Einfache" von 7 gerade einmal zuerteilt. — Ebenfo feben wir aus Fig. 4, daß die 7 Zahlen 8, 9, 10 . . . 14 sich auf 7 verschiedene Kolonnen des Quadrats (Fig. 5) verteilen (10, 11, 12 stehen in den 3 ersten, 13, 14 gelangen in die vierte und fünfte, 8 und 9 bei Berschiebung von Terraffe I in die beiben letten). Umgekehrt erhält somit jede Kolonne bas

"Einfache" von 7 gerabe einmal zuerteilt. — Natürlich hatten wir ebenfogut auch eine andere Reihe ber gahlen in Fig. 4 herausgreifen können, 3. B. 29, 30 . . . 35, alfo bie Bahlen, welche alle und allein bas "Bierfache" von 7 enthalten; wir würden alsbann aus Fig. 4 erkannt haben, daß auch biefe Bahlen fich über 7 verschiedene Beilen und Rolonnen bes Quadrats Fig. 5 verteilen, fo daß jede Beile und jede Kolonne des Quadrats bas "Bierfache" von 7 gerade einmal zuerteilt erhalt. Allgemein erkennen wir so, daß in jeder Zeile und in jeder Kolonne unseres Duadrats jedes "Bielfache" gerade einmal vorkommt. — Was aber von den "Bielfachen" gilt, gilt auch von den "Reften". Satten wir g. B. in Fig. 4 bie Reihe ber Bablen 3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, also die Zahlen, die alle und allein den "Reft" 3 aufweisen, ins Auge gefaßt, jo würden wir gefeben haben, daß fie fich gleichfalls auf die 7 verschiedenen Beilen und bie 7 verschiedenen Kolonnen bes Quabrats Fig. 5 verteilen, so daß jede Beile und jede Kolonne ben "Reft" 3 gerade einmal zuerteilt erhält. Dies gilt bann allgemein, nicht nur für ben Reft 3, fondern für jeden. Jebe Beile und jebe Kolonne des Quadrats Fig. 5 weift somit jeden "Reft" und jebes "Bielfache" gerade einmal auf; die Beilen und Rolonnen ergeben baber alle bie geforberte fonftante Summe.

Es bleibt zu prüfen, ob auch die beiden Diagonalen die geforderte Summe aufweisen: Die eine enthält die Zahlen 4, 11, 18, 25, 32, 39, 46 (s. Fig. 4), und damit alle verschiedenen "Vielfachen" je einmal. Dagegen enthält sie nicht alle "Reste", sondern immer nur den Rest 4. Nun ergibt aber die Summe aller "Reste", nämlich 1+2+3+4+5+6+7, genau dasselbe wie wenn die mittlere dahl, 4, siebenmal genommen wird (vgl. S. 98 unten). Diese Diagonale muß somit gleichsals die gesorderte Zahlensumme ausweisen. Bon der anderen Diagonale gilt mutatis mutandis dasselbe: sie enthält alle "Reste", dagegen stets dasselbe "Vielsache"; dieses ist jedoch gerade das mittlere, so daß sich auch hier die gesorderte Summe 175 ergibt. — Das Quadrat der Fig. 5 besitzt also alle Eigenschaften der magischen Quadrate.

<sup>1)</sup> hierbei ift wesentlich, daß die 7 eine ungerade Bahl ift; unsere Methode ift aus diesem und anderen übrigens seicht erkennbaren Gründen nur bei ungeradzelligen Quadraten brauchbar.

Frage 25: Bilbe nach dieser Methode ein magisches Quadrat von 25 Zellen!

#### § 4. Geradzellige Quadrate.

Die Bilbung geradzelliger magischer Quadrate ist nicht so einsach, wie die der ungeradzelligen. Wir wollen uns hier auf den Untersall beschränken, daß die Zahl der Felder in jeder Reihe unseres Quadrats nicht nur gerade, sondern, wie man sagt, "geradgerade", d. h. durch 4 teilbar ist. Es soll sich also nur um Quadrate von 4, 8, 12, 16 . . . Feldern in jeder Reihe handeln. Wir greisen als Beispiel den Fall eines Quadrats von 8 × 8 Feldern heraus und schreiben zunächst die Zahlen 1—64 in natürlicher Ordnung, wie Fig. 6 zeigt, in die Felder hinein. Jedem Feld

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
			28				
			36				
			44				
			52				
			60				

Fig. 6.

resp. jeder Zahl wollen wir uns alsdann ein zweites als "gegenüberliegendes" zugeordnet denken, und zwar soll, wenn z. B. das eine Feld der Iten Zeile und 4 ten Kolonne angehört— es ist 20—, als "gegenüberliegendes" dasjenige bezeichnet werden, das der drittletten Zeile und viertletten Kolonne angehört, also 45. Die beiden Zahlen ergeben zusammen 65 und zwar ergibt sich diese Summe stets für jedes Paar von zwei "gegenüberliegenden" Zahlen, wie der Leser sich leicht durch Stichproben überzeugt. Dies darf uns auch nicht wundernehmen; denn zwei "gegenüberliegende" Felder stehen, wenn wir sie in der durch die Zahlen der Fig. 6 vorgeschriebenen Reihensolge nehmen, gleich weit von beiden Enden der Reihe

Der Zahl 1 liegt in Fig. 6 "gegenüber" 64, der Zahl 10 bie Bahl 55 usm.; überhaupt liegt, wenn bie eine Bahl in ber Diagonalreihe liegt, die "gegenüberliegende" auch darin. Für bie andere Diagonalreihe gilt gang dasselbe: ber Bahl 8 liegt "gegenüber" 57 ufm. Darnach teilen fich bie 8 Bahlen, Die in berselben Diagonale stehen, in 4 Paare von je zwei "gegen= überliegenden". Jedes Baar gegenüberliegender Bahlen ergibt nun die Summe 65, wie wir faben; die 8 Bahlen einer Diagonale ergeben also die Summe 4 imes 65=260. Dies ist nun aber, wie der Lefer leicht nachrechnet, gerade die Summe, die fich in dem fpateren magischen Quadrat in jeder Beile, Rolonne und Diagonale wird ergeben muffen. Die Diagonalen genügen also bereits bei ber natürlichen Anordnung ber Bahlen, wie fie Fig. 6 gibt, ber Forderung des magischen Quadrats. Dies wird der Lefer auch nicht anders erwartet haben 1); denn wenn wir (f. Fig. 6) die kleinste Bahl (1) und die größte (64) gusammennehmen, dann wieber die zehntkleinfte (10) und die zehnt= größte (55) usw., so muffen fich die Größenunterschiede fo ausgleichen, daß wir im ganzen gerabe auf ben Durchichnitt fommen. Darauf beruht aber überhanpt die Anordnung ber Bahlen in ben magischen Quabraten.

Die Zeilen und Kolonnen der Fig. 6 genügen jedoch der Forderung des magischen Quadrats noch keineswegs: die Zahlen der ersten Zeile z. B. ergeben eine viel zu kleine, die der letzten eine viel zu große Summe. Wir können jedoch hier leicht außgleichend wirken; denn ebensoviel, wie der ersten Zeile an der geforderten Summe  $4\times 65=260$  sehlt, ebensoviel hat die letzte Zeile zuviel (beide Zeilen zusammen geben nämlich jedenfalls

<sup>1)</sup> Bgl. auch § 2 für ben Fall bes neunzelligen Quabrats.

 $8 \times 65 = 2 \times 260$ , weil fie gerade aus 8 Paaren "gegenüber» liegender" Bahlen beftehen). Run beträgt der Unterschied zwischen einer Bahl ber erften Beile und der gerade barunterftehenden ber letten fonftant 56; den Unterschied ber beiden ganzen Beilen haben wir also ausgeglichen, wenn wir vier Bahlen der erften Zeile mit den vier darunterftehenden der letten vertauschen, also z. B. 1, 2, 3, 4 mit 57, 58, 59, 60 ober auch 1, 2, 7, 8 mit 57, 58, 63, 64 usw. Jebe ber beiben Zeilen weist bann hinterher bie Summe 260 auf. In gang ähnlicher Beziehung zueinander fteben nun die zweite und vorlette Beile; wir konnen hier auch in gang entsprechender Beise eine folche Ausgleichung bewirten und erhalten bann in beiben Beilen bie geforderte fonftante Summe von 260. Gbenfo geht es bei ben übrigen Zeilen, und wir bekommen also ichlieflich ein Quabrat, bas in allen 8 Zeilen ber Forberung einer konstanten Summe genügt, nicht aber in ben Rolonnen und auch im allgemeinen nicht mehr in den Diagonalen, da diefe, anfänglich zwar unserer Forderung genügend (f. oben), bei ben vorgenommenen Ber= tauschungen sich im allgemeinen geändert haben werben.

Ungeandert geblieben bei diesen Bertauschungen ift bagegen jebe Rolonne, als Ganges betrachtet; benn jebe Bahl blieb bei den Bertauschungen in ihrer Kolonne. Bir konnen nun für bie Rolonnen gang dieselbe Ginrichtung treffen, wie oben für die Zeilen, also die erfte und lette Kolonne gegeneinander ausgleichen, und fo gleichfalls bie konftante Summe von 260 für beide herbeiführen ufm. Bei biefen Bertauschungen würden fich die Zeilen, als Ganzes betrachtet, nicht mehr andern, da jede Bahl in ihrer Zeile bliebe; unfere obige Ginrichtung für bie Beilen wurde alfo nicht etwa wieder aufgehoben werden Infolge ber obigen Bertauschungen, die im Interesse der Zeilen vorgenommen wurden, gelangt die Bahl 1 nun etwa an die Stelle 57 und infolge ber Bertauschungen, die ber Rolonnen wegen nötig werden, rudt fie etwa von Plat 57 weiter nach 64, ift also im ganzen von Feld 1 gerade auf das "gegenüberliegende" Felb 64 gewandert. Gine Berfolgung ber einzelnen Bahlen bei biesen sutzessiven Umftellungen liegt jedoch nicht in unserer Absicht. Es genügte uns, an einem Beispiel zu sehen, daß bei biesen Bertauschungen eine Zahl auf das dem ursprünglichen gegenüberliegende Feld gelangen kann. Andererseits wissen wir. daß es bei biefen Bertaufchungen auf Folgendes ankommt:

Die Balfte ber Bahlen ber erften Beile muß in bie unterfte Beile wandern und dafür aus diefer die gerade barunterftehenden in bie leeren Blage ber erften Beile; babei braucht nun nicht jebe dieser ersteren Bahlen gerade in den Blat birekt unter ihr einzuruden, fondern nur auf einen der leer werbenden Blage. Wir sahen ja auch, daß 1 ohnehin infolge weiterer Um= ftellung an die Stelle 64 gelangen fonnte. Bir fonnten alfo von vornherein bei Normierung der Zeilen so verfahren, daß wir zwar aus der ersten Zeile 1, 2, 7, 8 entfernen und mit 57, 58, 63, 64 vertauschen, nun aber nicht 1 gerade mit 57, 2 mit 58 usw., sondern 1 etwa mit 64, 2 mit 63, 7 mit 58, 8 mit 57, alfo jebe Bahl mit ber ihr gegenüberliegenden. Wir haben bamit bann zugleich Bertauschungen vorgenommen, Die für die Einrichtung der Kolonnen bedeutsam find. Es fragt fich: Wie ergibt fich nun ein einfaches Berfahren fo, bag bie Salfte der Zahlen der erften Zeile mit der barunterstehenden Salfte der letten taufcht, jugleich eine Balfte ber Bahlen der zweiten Beile mit der barunterftebenden Galfte der zweitletten Beile ufw., und ferner, daß gleichzeitig auch für die Rolonnen die entsprechenden Umftellungen vorgenommen werden? 1)

Diesen Effett erzielen wir nun am einsachsten, wenn wir bie folgende Borschrift befolgen: Man teile bas ganze Quadrat in 16 Teile, wie Fig. 7 dies angibt, und

a	b	ь	a
b	a	a	3
ъ	a	a	7
a	8	ъ	a

fann nun entweder die Zahlen aller mit a bezeichneten Gebiete oder aber die aller Gebiete b mit den ihnen gegenüberliegenden vertauschen. Man sieht, daß so gleichzeitig jede Zeile und jede Kolonne die Hälfte ihrer Zahlen mit der zugehörigen austauscht. Ferner hat der Leser gewiß bereits als sehr bedeutsam den Umstand erkannt, daß bei diesen durch

Fig. 7 bezeichneten Bertauschungen, bei benen immer nur gegenüberliegende Zahlen ihre Pläte wechseln, eine in einer Diagonalreihe stehende Zahl unter allen Umständen in derselben verbleibt. Die Diagonalen, die bereits in der provisorischen Anordnung ber Fig. 6 die konstante Summe des magischen Quadrats aus-

<sup>1)</sup> Selbstverftändlich murbe hier nicht von untereinanderstehenden Bahlen, sonbern von folchen in gleicher Sobe zu sprechen sein.

wiesen, bleiben also jede als Gesamtheit unverändert erhalten und genügen daher auch nach Bornahme der Zahlenumstellungen unserer Forderung. Diese ist somit in allen Zeilen, Kolonnen und Diagonalen erfüllt, das Duadrat also ein magisches. Es sieht, wenn wir die Vertauschungen in den Gebieten a (Fig. 7) vornehmen, so aus, wie Fig. 8 zeigt.

64	63	3	4	5	6	58	57
56	55	11	12	13	14	50	49
17	18	46	45	44	43	23	24
25	26	38	37	36	35	31	32
33	34	30	29	28	27	39	40
41	42	22	21	20	19	47	48
16	15	51	52	53	54	10	9
					62		

Fig. 8.

Ift die Zahl der Felder jeder Reihe nicht durch vier teilbar, so ist die gesamte Felderzahl auch nicht durch 16 teilbar, also die Einteilung des ganzen Quadrats in 16 Gebiete im Sinne der Fig. 7 nicht möglich; unsere Wethode ist dann, also z. B. bei  $10 \times 10$  Feldern, nicht mehr anwendbar. Wir wollen jedoch auf diesen Fall nicht näher eingehen, da die hier zu befolgenden Wethoden weniger einsach sind.

Frage 26: Gib ein magisches Quadrat von  $12 \times 12 = 144$  Feldern an!

### Beantwortung der Fragen.

#### Rapitel I.

Frage 1: B (der zweite) springt auf 2 und schreitet sobann in Stufen von je 11 fort.

Frage 2: B kann ben Sieg erzwingen, da er mit dem ersten Male auf 9 gelangen und nun in Stufen von je 9 bis zu 90 fortschreiten kann.

Frage 3: A, der zunächst auf 6, dann auf 24, 42, 60, 78, 96, 114, 132 und 150 springt.

Frage 4: B, indem er zunächst auf 13 gelangt und von hier in Stusen von je 13 zum Ziel. — Die letzte Etappe vor dem Siege für B ist 169 und zwar kommt nur dies allein hierfür in Betracht, nicht etwa, wie man vielleicht denken könnte, neben 169 auch wahlstrei 170 und 171. Denn, wenn B auf irgend eine Beise auf 170 oder 171 gekommen wäre, so würde zwar A das Ziel mit dem nächsten Sprunge nicht exreichen können; jedoch kann A alsdann die 180 resp. 181 gelangen, und B muß nun — bei einer minimalen Sprungweite von 3 Fuß — über das Ziel hinausspringen. Es würde also — man achte auf die Formulierung unserer Aufgabe — keiner von beiden siegen.

Frage 5: Sieger ift offenbar berjenige, ber zuerst auf 98 ober 99 gesangt, da der Gegner alsdann — bei einem Minimum von 2 Fuß — das Ziel mit dem nächsten Sprunge erreichen bezw. überschreiten muß. A würde also den Sieg erzwingen können, wenn er zunächst auf 10 springen und dann in Stusen von je 11 zu 98 fortschreiten könnte. Nun ist ihm aber — bei einem maximalen Sprunge von 9 Fuß — die Stuse 10 für

bas erste Mal unerreichbar. Ebensowenig kann A es erzwingen, die Stelle 99 in Stusen von je 11 zu erreichen. Wie A daher auch beginnt, B kann mit seinem ersten Sprunge jedensalls auf 11 gelangen, worauf er in Stusen von je 11 fortschreitet bis 99, um so A zum Überschreiten des Ziels zu zwingen. Außer diesem Versahren, das B stets anwenden kann, gibt es für ihn noch ein zweites ebentuelles: Wenn B mit dem ersten Sprunge auf 10 kommen kann, was sich sür ihn jedoch nicht erzwingen läßt, so kann er von hier ab durch Vorrücken in Stusen von je 11 dis zu 98 den Sieg erzwingen, da dann A das Ziel erreichen oder überschreiten muß. — Dies zweite Versahren ist nur dann nicht ausssührbar, wenn A mit einem Sprung von 9 Fuß beginnt, das erste Versahren dagegen unter allen Umständen.

#### Rapitel II.

Frage 6: Die Anzahl der Inversionen ist 23, die Aufgabe also nicht lösbar.

#### Rapitel III.

Frage 7: Die Aufgabe ist symmetrisch zu Nr. IV in § 3 (S. 25), woraus sich bas Lösungsschema leicht ergibt.

Frage 8: Die Aufgabe ift reziprot zu Rr. XIV in § 3.

Frage 9: Aus der Kombination 46; 13 wird durch eine Vierteldrehung im Umdrehungsfinne des Uhrzeigers 64; 37, hieraus durch Spiegelung an der Mittelvertikalen 24; 57 und hieraus durch Vertauschung von Anfangs und Schlußloch: 57; 24 (Nr. X). — Die gegebene Aufgabe ist also symmetrisch zu der reziproken von Nr. X in § 3.

#### Rapitel IV.

**Frage 10**: Tü—Er—Le—Je—Ha—Gr—Be—Br—Kö—Ro—Gö—Gi—He—St—Ma—Ki—Bo.

Frage 11: Eine Reise durch die 7 Orte ist keinenfalls möglich, weil Br, Wü und St nur noch je eine Verbindung haben. Läßt man dagegen St fort, so ist die Reise durch die übrigen 6 Orte in den Fällen aussührbar, daß die Reise in dem einen der Orte Br und Wü begonnen und in dem anderen beendet

wird. Man erhält nur die Lösung Br-Mü-Bo-Fr-Tü-Wü bezw. die Umkehrung davon.

Frage 12: Mu und Gi haben nur je einen Unschluß, bie übrigen je zwei oder brei; man findet, wie leicht zu feben, als einzige Routen: Mü-Er-Le-Je-Wü-Tü-Fr-St-He-Gi und die Umfehrung bavon.

Frage 13: Bei Ginschluß von Ro haben nur Bo und Ha je einen Anschluß, alle übrigen minbestens zwei. Es ift also bie Route Bo—Ki—Ma—Gö—Ro—Kö—Br—Be—Gr—Ha und die umgekehrte möglich, jedoch, wie man leicht erkennt, auch nur diese beiden. Bei Ausschluß von Ro tritt zu Bo und Ha als Station mit nur einer Berbindung auch noch Go. Die Reise burch bie 9 preußischen Universitäten allein ift alfo nicht möglich; man wurde höchstens 8 Stationen erreichen, nămlich Gö-Ma-Ki-Kö-Br-Be-Gr-Ha.

Frage 14: a) 6 Löfungen, nämlich:

- A) Mü—Er—Le—Je—Wü—Tü—Fr—Bo—Ki—Kö—Ro— Gö—Ma—St—He—Gi—Ha—Gr—Be—Br—Mü
- Mü—Er—Le—Je—Ha—Gi—Gö—Ro—Gr—Be—Br—  $K\ddot{o}$ —Ki—Ma—St—He — $W\ddot{u}$ — $T\ddot{u}$ —Fr—Bo— $M\ddot{u}$ .
- C) Mü—Er—Le—Je—Ha—Gr—Be—Br—Kö—Ro—Gö—  $Gi\_He\_W\ddot{u}\_T\ddot{u}\_Fr\_St\_Ma\_Ki\_Bo\_M\ddot{u}$ .
- $\label{eq:mu-Er-Le-Je-Ha-Gi-Gö-Ma-St-He-Wü-He-W-Wu-He-Wü-He-Wü-He-Wü-He-Wü-He-Wü-He-Wü-He-Wü-He-Wü-He-Wü-He-Wü-H$ Tü—Fr—Bo—Ki—Kö—Ro—Gr—Be—Br—Mü.
- $\label{eq:multiple} \begin{tabular}{lll} $\tt M\ddot{u}$--Er-Le-Je-Ha-Gi-He-W\ddot{u}-T\ddot{u}-Fr-St-\\ \end{tabular}$ Ma—Gö—Ro—Gr—Be—Br—Kö—Ki—Bo—Mü.
- $M\ddot{u}$ —Er—Le—Je— $W\ddot{u}$ — $T\ddot{u}$ —Fr—St—He—Gi—Ha— Gr—Be—Br—Kö—Ro—Gö—Ma—Ki—Bo—Mü.
  - b) 4 Lösungen, nämlich:
- A) Be—Br—Mü—Er—Le—Je—Wü—Tü—Fr—Bo—Ki— Kö—Ro—Gö—Ma—St—He—Gi—Ha—Gr—Be.
- Be—Br—Mü—Er—Tü—Fr—Bo—Ki—Kö—Ro—Gr— Ha—Gi—Gö—Ma—St—He—Wü—Je—Le—Be.
- Be—Br—Mü—Er—Le—Je—Ha—Gi—Gö—Ma—St— He—Wü—Tü—Fr—Bo—Ki—Kö—Ro—Gr—Be.
- D) Be—Br—Mü—Er—Tü—Wü—He—Gi—Gö—Ma—St— Fr—Bo—Ki—Kö—Ro—Gr—Ha—Je—Le—Be.

- c) 4 Lösungen, nämlich:
- A) Ha—Gi—Gö—Ma—Ki—Bo—Mü—Br—Kö—Ro—Gr—Be—Le—Er—Tü—Fr—St—He—Wü—Je—Ha.
- B) Ha—Gi—Gö—Ma—Ki—Kö—Ro—Gr—Be—Br—Mü— Bo—Fr—St—He—Wü—Tü—Er—Le—Je—Ha.
- C) Ha—Gi—Gö—Ma—Ki—Bo—Mü—Er—Tü—Fr—St— He—Wü—Je—Le—Be—Br—Kö—Ro—Gr—Ha.
- D) Ha—Gi—Gö—Ma—Ki—Bo—Fr—St—He—Wü—Tü—Er—Mü—Br—Kö—Ro—Gr—Be—Le—Je—Ha.
  d) 2 Qöiunaen, nämlidi:
- A) St—Fr—Bo—Mü—Er—Tü—Wü—He—Gi—Gö—Ro—Gr—Ha—Je—Le—Be—Br—Kö—Ki—Ma—St.
- B) St—Fr—Bo—Mü—Er—Tü—Wü—Je—Le—Be—Br— Kö—Ki—Ma—Gö—Ro—Gr—Ha—Gi—He—St.
  - e) 3 Lösungen, nämlich:
- A) Le—Je—Ha—Gi—Gö—Ma—Ki—Kö—Ro—Gr—Be— Br—Mü—Bo—Fr—St—He—Wü—Tü—Er—Le.
- B) Le—Je—Ha—Gi—Gö—Ma—Ki—Bo—Fr—St—He—Wü—Tü—Er—Mü—Br—Kö—Ro—Gr—Be—Le.
- C) Le—Je—Ha—Gi—Gö—Ma—St—He—Wü—Tü—Fr— Bo—Ki—Kö—Ro—Gr—Be—Br—Mü—Er—Le.
  - f) Keine Lösung.

Frage 15: Bei der achten Station, 3. B. Le-Je-Wü-Tü-Fr-Bo-Mü-Er.

#### Rapitel V.

Frage 16: Nein; denn bei diesem Gewichtssatz wird ber scheinbare Borteil nur auf Kosten von Lücken gewonnen, indem Wägungen von 32 g. und 97 g. (32 + 65) überhaupt nicht möglich sind.

Frage 17: Der angegebene Gewichtsfatz ermöglicht alle Wägungen von 1 g. bis 610 g. inkl.; seine 11 Gewichte können ersetzt werden durch solgende 10 Gewichte: 1 g., 2 g., 4 g., 8 g., 16 g., 32 g., 64 g., 128 g., 256 g., 512 g., und diese ermöglichen Wägungen noch bis 1023 g. einschließlich.

Frage 18: 127 Umsetzungen im ganzen, davon 64 mit Scheibe 1 und 4 mit Scheibe 5. Die erste Umsetzung ist — bei ungerader Scheibenzahl —: "1 von A auf C."

#### Rapitel VI.

Frage 19: Die Anfangsstellung, bei der alle Kinge oben sind, ist natürlich durchaus noch nicht die ungünstigste für die Trennung der Ringe von der Spange. Vielmehr ist dies bei

5 Ringen<sup>1</sup>) die Stellung oo oo, wo zunächst die 4 letzten Kinge zu heben sind, was ebensoviele Umstellungen ersordert, als wären die Ringe ursprünglich oben und erst zu senken, also 7 Umstellungen nach unserer Tabelle. Dazu kommen dann noch die für den Fall der normalen Ansangsstellung ersorderlichen 16 Umstellungen; zusammen sind es also 23.

#### Rapitel VII.

Frage 20: Die "Grundzahlen" find jest 1, 2, 4, 8, 16.

$$7 = 25 = 16 + 8$$
 $4 + 2 + 1 + 1;$ 

die dritte Zahl muß daher 16+8+4+2=30 sein und die entstehende "richtige" Position also: 7, 25, 30.

Frage 21: Der zweite Spieler gewinnt, weil die anfängliche Position "richtig" ist:

Frage 22: B; denn die Anfangsstellung c, f, h resp. 2, 5, 7 ist "richtig".

#### Rapitel VIII.

Frage 23: Die Fortsetzung ergibt sich zunächst von Feld 37 aus unter Anwendung der angegebenen Regel mit Notwendigkeit

<sup>1)</sup> Bezüglich der entiprechenden ungunstigsten Stellung für den Fall von 4 Ringen vgl. die Ausführungen auf S. 66, Zeile 14—29.

bis Felb 46 so, wie in Fig. 17 angegeben. Bon Felb 46 hätte man ber Regel zufolge, anstatt nach 47, ebensogut nach 49

fpringen können. Wählt man, wie wir getan, 47. so ergibt sich die weitere Fortsetzung unzweideu= tig bis 51; von hier aus fteben 52 und 54 mit aleichen Rechten zur Bahl. Entscheidet man fich für 52, so geht es unzweibeutig weiter bis 59, worauf man die Wahl zwischen 60 und 64 hat. Hierauf ergibt sich ber Schluß eindeutig. - Der fo ent= ftehende Röffelfprung (f. Fig. 18) weift, ob= wohl er zu ungefähr drei Fünftel der Fig. 8 entlehnt war, nicht mehr die schöne Form dieses Diagramms auf. wie überhaupt die nach ber gebachten Regel ge= bildeten Röffelfprunge meist unschön sind. Da= für hat unfere Regel uns allerdings biefes Mal zu einem ge= ichloffenen Röffelsprung geführt (die Schlußfette ift in ber Figur gestrichelt gezeichnet), während der von Fig. 8 offen war.

56	17	34	1	54	19	50	3
35	12	55	18	33	2	53	20
distantantes de la constantante de	-	32		_	-	_	_
11	36	15	58	27	48	21	52
38	31	26	63	14	59	46	5
25	10	37	28	47	22	43	60
OF THE PERSON NAMED IN	<b>CONTRACTOR</b>	8		CONTRACTOR -	Management of the last	Real Property lies	
9	24	29	40	7	44	61	42

Fig. 17.

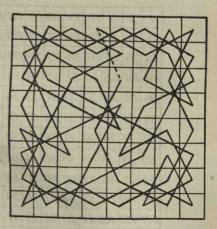


Fig. 18.

#### Rapitel IX.

Frage 24: Die Summe ber 81 Bahlen, in zwei Reihen unter einander geschrieben, gibt 82 × 81, jede Reihe allein also  $\frac{82\times81}{2}$ ; davon entfällt auf jede der 9 Reihen des magischen

Quadrats die Summe  $\frac{82 \times 81}{2 \times 9} = 369$ .

Frage 25:

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23
		74. 0	Va. H	



Frage 26: Durch Vertauschung der Zahlen aller in Fig. 8 mit b bezeichneten Gebiete ergibt fich das folgende Quadrat:

1	2	3	141	140	139	138	137	136	10	11	12
13	14	15	129	128	127	126	125	124	22	23	24
25	26	27	117	116	115	114	713	112	34	35	36
108	107	106	40	41	42	43	44	45	99	98	97
96	95	94	52	53	54	55	56	57	87	86	85
84	83	82	64	65	66	67	68	69	75	74	73
72	71	70	76	77	78	79	80	81	63	62	61
60	59	58	88	89	90	91	92	93	51	50	49
48	47	46	100	101	102	103	104	105	39	38	37
109	110	m	33	32	31	30	29	28	118	119	120
121	122	123	21	20	19	18	17	16	130	137	132
133	134	135	9	8	7	6	5	4	142	143	144

Fig. 10.

## Mathematische Unterhaltungen und Spiele.

[X u. 428 S.] gr. 8. 1901. In Originalband mit Zeichnung von P. Bürck. M. 10.-

Inhalt: 1. Erschwerte Überfahrten. 2. Ein Problem Taits. 3. Numerationssysteme. 4. Umfullungsaufgaben. 5. Parquetierungen. 6. Einige kleinere Unterhaltungen. 4. Brettspiele. 8. Das Nonnen- oder Einsiedler-(Solitär-)spiel. 9. Das Achtköniginnenproblem. 10. Die fünf Königinnen auf dem Schachbrett. 11. Der Rösselsprung. 12. Magische Quadrate. 13. Eulersche Quadrate. 14. Anordnungsprobleme. 15. Das Josephsspiel. 16. Einiges aus der Analysis situs. 17. Brücken und Labyrinthe: 18. Das Hamiltonsche Dodekaederspiel. 19. Das Farben-Karten-Problem. 20. Das Boß-Puzzle oder Fünfzehner-Spiel. 21. Das Dominospiel. 22. Zeit und Kalender. 23. Geometrische Konstruktionen durch Falten von Papier. Literarischer Index. Sachregister. Namenregister.

#### Aus Urteilen der Presse:

"Das Buch bietet, was Reichhaltigkeit des Inhalts sowie Korrektheit und Klarheit der Darstellung betrifft, auch dem anspruchsvollsten Rezensenten keine Handhabe zu ernsthaften Ausstellungen." (Prof. G. Wertheim. Hoffmanns Zeitschrift für den mathematischen Unterricht.

32. Jahrgang. 1901, p. 374.)

"Das fließend geschriebene, durch anschauliche Figuren erläuterte und gut ausgestattete Buch wird sich unzweifelhaft viele Freunde erwerben." (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Bd. 31. 1900.)

"Recueil extrêmement intéressant."

(Mathesis. 3ième Série. T. I. 1901, p. 140.)

"Wir machen die Schachfreunde auf das interessante Werk des den Lesern der Schachzeitung wohlbekannten Gelehrten besonders aufmerksam." (Deutsche Schachzeitung. Bd. 56. 1901, p. 32.)

"Eine Darstellung dieser eigentümlichen Materie darf sowohl bei dem Mathematiker als auch bei dem Laien auf Interesse zählen, der sich gern mit Zahlen und geometrischen Figuren abgibt, weil ihm ihre schönen und oft merk-würdigen Eigenschaften Vergnügen, gewiß ein Vergnügen der reinsten Art, bereiten. Sie darf des Interesses insbesondere dann sicher sein, wenn sie mit solcher Sachkenninis gearbeitet und mit wohlttender Eleganz geschrieben ist wie die vorliegende. Der Verfasser derselben wollts sowohl den Fachmann, den der theoretische Kern des Spieles interessiert, als den mathematisch gebildeten Laien befriedigen, dem es sich um ein anregendes Gedankenspiel handelt; und er hat den richtigen Weg gefunden, beides zu erreichen. Dem wissenschaftlichen Inter-esse wird er gerecht, indem er durch die sorgfältig zusammenget agene Literatur und durch Einschaltungen mathematischen Inhalts die Beziehungen zur Wissenschaft herstellt; dem Nichtmathematiker kommt er durch die trefflichen Erläuterungen entgegen, die er der Lösung der verschiedenen Spiele zuteil werden läßt, und die er, wo nur irgend nötig, durch Schemata, Figuren und de gleichen

Das Buch bietet sehr viel des Anregenden und Unterhaltenden, aber auch des Belehrenden. Ein 330 Nummern umfassender, chronologisch geordneter "Index" gibt die Literatur des Gegenstandes, und ein ausführliches Sach- und ein Namenregister erleichtern die Orientierung, in dem Buch, das hiermit auf das beste empfohlen sei." (Prof. Czuber in der Zeitschrift für das Realschulwesen. 26 Jahrgang, p. 173-174.)

"Das Buch dürfte sich in hohem Maße auch als Geschenk für eifrige Mathematiker unter den Schülern höherer Lehranstalten eignen." (Schlesische Zeitung. 24. Sept. 1901.)

# Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte.

[X u. 522 S.] gr. 8. 1904. In Leinward geb. M. 8.-

"Die in der deutschen, ja in der Weltliteratur noch vorhanden gewesene Lücke wird durch das vorliegende Buch in der glücklichsten Weise ausgefüllt. . . . Wir können diese Besprechung mit dem aufrichtigen Wunsche beschließen, daß das vortreffliche, auch äußerlich entsprechend ausgestattete Buch in Laienkreisen nicht minder wie in denen der Fachgelehrten sich bald der allgemeisten Verbreitung erfreuen möge." (Münchener Allgemeine Zeitung. 1905. Nr. 268.)

"Ich kann mir nicht anders denken, als daß dieses Buch jedem Mathematiker eine wahre Freude bereiten wird. Es ist zwar keineswegs bestimmt und auch nicht geeignet, in einem Zuge durchgelesen zu werden, und doch, als ich es zum ersten Male in die Hände bekam, konnte ich mich gar nicht wieder davon losreißen, und seit ich es unter meinen Büchern stehen habe, ziehe ich es gar oft hervor, um darin zu blättern." (Friedr. Engel, Literarisches Zentralblatt. 1905. Nr. 5.)

"... Der Verfasser der "Mathematischen Unterhaltungen" hat uns mit einem neuen, überaus fesselnden und originellen Werke überrascht, welches man als einen mathematischen "Büchmann" bezeichnen könnte, wenn es nicht neben aphoristischen Bemerkungen auch längere Briefe und Auseinandersetzungen brächte. Beginnt man zu lesen, so möchte man das Buch nicht aus der Hand legen, bis man zum Ende gelangt ist, und dann werden viele wieder von vorn beginnen. Jedem wird es Neues bringen, möge er noch so belesen sein.... Gerade das vorliegende Buch gibt einen tiefen Einblick in das Ringen der Geister, und manchem wird durch manche kurze, treffende Bemerkung ein Licht über ganze Gebiete der Wissenschaft aufgehen. Man lernt abwägen zwischen verschiedenen Richtungen und Schulen, und manches ungerechte Urteil wird durch das Buch korrigiert." (Prof. Dr. Holzmüller in der Zeitschr. f. lateinl. höhere Schulen. 16. Jahrg. p. 30 f.)

"Mit einiger Phantasie kann man dem Buche den Stoff und die Anregung für mehr als ein Drama entnehmen, dessen Handlung und Durchführung spezifisch mathematisch ist— der Schadenfreude gar nicht zu gedenken, welche es bereitet, große Geister in kleinen Dingen auch klein zu sehen, und der Genugtuung, daß die allergrößten auch in kleinen Dingen niemals kleinlich waren."

(Monatshefte für Mathematik und Physik. 1905.)

#### M. Cantor:

# Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens.

2. Auflage. [X u 155 S.] gr. 8. 1903. geb. M. 1.80.

"... Das schnelle Erscheinen dieser zweiten Auflage spricht von der guten Aufnahme des Buches. Und diese begreift man, wenn man betrachtet, welche Fülle von Fragen in diesem Werkchen in allgemein verständlicher Weise beantwortet werden. Was das tägliche Leben an rechnerischen Aufgaben mit sich bringt für den einzelnen wie für Gemeinschaften, wie für den laufenden Verkehr mit einer Bank, den Kauf und Verkauf von Wertpapieren, die Aufnahme von Anleihen und ihre Amortisation, die Wahrscheinlichkeit des Eintretens gewisser Freignisse, das Spielen in Lotterieanlehen, die mannigfachen Arten des Versicherungswesens usw., alles dies findet man in diesem kleinen Buche in gedrängter Kürze und doch so ausführlich erörtert, daß jedermann folgen kann, dem nicht jede Denkarbeit und der Anblick jeder mathematischen Formel durchaus unbequem ist. Zahlreiche breit ausgeführte, größtenteils dem wirklichen Leben unter Berteksichtigung der neuesten gesetzlichen und sonstigen Bestimmungen entnommene Beispiele dienen überdies dazu, den Inhalt der allgemeinen Theorien zu erläutern. . . Es erscheint kaum möglich, alle diese arithmetischen Fragen des täglichen Lebens für eine großen Büchlein geschehen ist. Die Ausstattung dieser zweiten Auflage entspricht allem Wünschen." (Hermann Fleischer in der Deutschen Literaturzeitung. 1903. Nr. 35.)

Sammlung wissenschaftlich = gemeinverständlicher Darstellungen aus allen Gebieten des Wissens

Geheftet 1 mart.

in Bandchen von 130-160 Seiten. Jedes Bändchen ift in sich abgeschlossen und einzeln fäuflich.

Gebunden mf. 1.25.

Die Sammlung "Aus Natur und Geifteswelt" fucht ihre Aufgabe nicht in der Dorführung einer Sulle von Lehrstoff und Cehrfagen ober etwa gar unerwiesenen Sypothesen, sondern darin, dem Lefer Derftandnis dafür gu vermitteln, wie die moderne Wissenschaft es erreicht hat, über wichtige Ergann von allgemeinstem Interesse Licht zu verbreiten. Sie will dem Einzelnen ermöglichen, wenigftens an einem Duntte fich über den engen Kreis, in den ihn heute meist der Beruf einschließt, zu erheben, an einem Puntte die Freiheit und Selbständigkeit des geistigen Cebens zu gewinnen. In diesem Sinne bieten die einzelnen in fich abgeschlossenen Schriften gerade dem "Laien" auf dem betreffenden Gebiete in voller Anschaulichkeit und lebendiger frifche eine gedrängte, aber anregende Uberficht.

Aberalaube f. Heilwiffenschaft.

Abstammungslehre. Abstammungslehre und Darwinismus. Don Professor Dr. R. Heffe. 2. Auflage. Mit 37 Siguren im Tert. Die Darftellung der großen Errungenschaft der biologischen Sorichung des vorigen Jahrhunderts. der Abstammungslehre, erörtert die zwei Fragen: "Was nötigt uns zur Annahme der Ab-stammungslehre?" und — die viel sawierigere — "wie geschach die Umwandlung der Tier- und Pflanzenarten, welche die Abstammungslehre sordert?" oder: "wie wird die Abstammung ertlärt?"

Algebra f. Arithmetik.

Altoholismus. Der Altoholismus, seine Wirkungen und seine Betämpfung. herausgegeben vom Zentralverband gur Befampfung bes

Alkoholismus. 3 Bändchen. (Nr. 103. 104. 145.)

Die drei Bändigen sind ein sleines wissensighes Kompendium der Alfoholfrage, veräuft von den besten Kennern der mit ihr verbundenen sozial-hygienischen und sozial-eitsischen. Sie enthalten eine Fülle von Material in überschilicher und schöner Darstellung und sind unentbehrlich sir alle, denen die Besämpfung des Alfoholismus als eine der wichtigken und bedeutungsvollsten Aufgaben ernster, sittlicher und sozialer Kulturarbeit am Herzen liegt. Band I. Der Alfohol und das Kind. Die Aufgaben der Schule im Kampf gegen den Alfoholis-nus. Der Alfoholismus und der Arbeiterstand. Alfoholismus und Armenpflege.

Sand II. Alfoholismus und Nervojität. Alfohol und Geiftestrankheiten. Alfoholismus und Orojittution. Alfohol und Derkehrswesen.

3 and III. Alfohol und Seelenleben. Alfohol und Strafgeseth. Einrichtungen im Kampf gegen een Alfohol. Einwirkungen des Alfohols auf die inneren Organe. Alfohol als Nahrungs-nittel. Alfeste deutsche Mäßigkeitsbewegung.

Ameifen. Die Ameisen. Don Dr. Friedrich Knauer. Mit 61 Siguren. Mr. 94.)

raßt die Ergebnisse der so interessanten Forschungen über das Aun und Areiben einheimischen der potischer Ameisen, über die Vielgestaltigkeit der Sormen im Ameisenstaate, über die dautäligkeit, Brutpflege und ganze Öbnomie der Ameisen, über ihr Jusammenleben mit nderen Tieren und mit Pstanzen, über die Sinnestätigkeit der Ameisen und über anderenteressanten Details aus dem Ameisenleben zusammen.

Jedes Bandden geheftet 1 Mf., gefchmadvoll gebunden 1 Mf. 25 pfg.

Amerifa (f. a. Schulwesen). Aus dem amerifanischen Wirtschaftsleben. Don Prof. J. Caurence Caughlin. Mit 9 graph. Darstellungen. (Nr. 127.)

Sin Amerikare behandelt für deutsche Seier die Fragen, die augenblidlich im Dordergrunde des öfsentlichen Lebens in Amerika stehen, den Wettbewerd zwischen den Dereinigten Staaten and Europa — Schutzoll und Reziprozität in den Dereinigten Siaaten — Die Arbeiterfrage in den Dereinigten Staaten — Die amerikanische Trussfrage — Die Eisenbahnfrage in den Dereinigten Staaten — Die Bantsfrage in den Vereinigten Staaten — Die herrschenden volls-wirschaftlichen Iden Vereinigten Staaten — Die herrschenden volls-wirschaftlichen Iden Vereinigten Staaten — Die herrschenden volls-

(Mr. 147.) Defdichte der Dereinigten Staaten von Amerifa. Don Dr. E. Daenell.

Gibt in großen Jügen eine übersichtliche Darstellung der geschichtlichen, kulturgeschichtlichen und wirtschaftlichen Entwicklung der Vereinigten Staaten von den ersten Kolonisationsversuchen bis zur jüngsten Gegenwart mit besonderer Berücksichtigung der verschiedenen politischen, ethnographischen, sozialen und wirtschaftlichen Probleme, die zur deit die Amerikaner besonders bewegen.

#### Anthropologie s. Mensch.

Arbeiterichut. Arbeiterschutz und Arbeiterversicherung. Don weil. Professor Dr. O. v. Zwiedined-Südenhorft. (Nr. 78.)

Das Buch bietet eine gedrängte Darstellung des gemeiniglich unter dem Citel "Arbeiterfrage" behandelten Stoffes; insbesondere treten die Fragen der Notwendigkeit, Imedmäßigeit und der ötonomischen Begrenzung der einzelnen Schutzmaßnahmen und Dersicherungseinrichtungen in den Dordergrund.

Arithmetif und Algebra ls. a. Mathematische Spiele) zum Selbstunterricht. Don Prosessor Dr. p. Crang. I. Teil: Die Rechnungsarten. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades. Mit 9 Figuren im Text. (Nr. 120.)

Will in leicht sahlicher und für das Selbststudium geeigneter Darstellung über die Anfangsgründe der Arithmetst und Algebra unterrichten und behandelt die sieben Rechnungsarten, die Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten und die Gleichungen weiten Grades mit einer Unbekannten und die Cogarithmen so ausführlich behandelt sind, daß semand an der hand des Buches sich auch vollständig mit dem Gebrauche der Cogarithmentaseln vertraut machen kann.

Astronomie (s. a. Kalender; Mond; Weltall). Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Don Prosessor Dr. S. Oppenheim. Mit 24 Abbildungen im Text. (Nr. 110.)

Schildert den Kampf der beiden hauptsächlichten "Weltbilder", des die Erde und des die Sonne als Mittelpunkt betrachtenden, der einen bedeutungsvollen Abschnitt in der Kulturgeschichte der Menschlichte der Menschlichte der Menschlichte der Menschlichte bildet, wie er schon im Altertum bei den Griechen entstanden ist, anderthalb Jahrtausende später zu Beginn der Neuzeit durch Kopernitus von neuem aufgenommen wurde und da erst mit einem Siege des heliozentrischen Spstems schloß.

#### Atome f. Molefüle.

Auge. Das Auge des Menschen und seine Gesundheitspflege. Don Privats dozent Dr. med. Georg Abelsdorff. Mit 15 Abb. im Text. (Nr. 149.)

Schildert die Anatomie des menschlichen Auges sowie die Letstungen des Gesichtsinnes, besonders soweit sie außer dem medizinischen ein allgemein wissenschaftliches oder ästheitsches Interesse beauspruchen können, und behandelt die Gesundheitspräse schwigenen des Auges, besonders Schwigungen, Erkrankungen und Derletzungen des Auges, Rurzsichtigkeit und ersehelliche Augenkrankheiten, sowie die künstliche Beleuchtung.

Jedes Bandden geheftet 1 Mf., gefcmadvoll gebunden 1 Mf. 25 Pfg.

Automobil. Das Automobil. Eine Einführung in Bau und Betrieb des modernen Kraftwagens. Don Ing. Karl Blau. Mit 83 Abb. (Nr. 166.)

Gibt in gedrängter Darstellung und leichtfahlicher form einen anschaulichen Überblick über das Gesamtgebiet des modernen Automobilismus, so daß sich auch der lichtstechniker mit den Grundprinzipien rasch vertraut machen kann, und behandelt das Benzimautomobil, das Clettromobil und das Dampsautomobil nach ihren Krastquellen und sonssitigen technischen Einrichtungen, wie Zündung, Kühlung, Bremsen, Stundung, Bereifung usw.

Bautunft (f. a. Städtebilder). Deutsche Baufunft im Mittelalter. Don Professor Dr. A. Matthaei. 2. Auflage. Mit Abbildungen im Text und auf 2 Doppeltafeln. (ITr. 8.)

Der Verfasser will mit der Darstellung der Entwicklung der deutschen Baukunst des Mittelsalters zugleich über das Wesen der Baukunst als Kunst austlären, indem er zeigt, wie se seine sich versauf der Entwicklung die Raumvorstellung klärt und vertieft, wie das technische Konnen wächt und die praktischen Ausgaben sich erweitern, wie die romanische Kunst geschaffen und

Beethoven f. Mufit.

Befruchtungsvorgang. Der Befruchtungsvorgang, sein Wesen und feine Bedeutung. Don Dr. Ernft Teichmann. Mit 7 Abbildungen im Text und 4 Doppeltafeln. (Nr. 70.)

Will die Ergebnisse der modernen Forschung, die sich mit dem Befruchtungsproblem vefaßt, darstellen. Ei und Samen, ihre Genese, ihre Ressung und ihre Dereinigung werden dehandelt, im Chromatin die materielle Grundlage der Dererbung ausgegigt und als die Bedeutung des Befruchtungsvorgangs eine Mischung der Qualität zweier Individuen.

**Beleuchtungsarten.** Die Beleuchtungsarten der Gegenwart. Von Dr. phil. Wilhelm Brüsch. Mit 155 Abbildungen im Text. (Nr. 108.) bibt einen Überblick über ein gewaltiges Arbeitsfeld deutscher Technik und Wissenschaft, noch die technischen und wissenschaftlichen Bedingungen für die Herkeltung einer wirtschaftschen Lichtquelle und die Methoden für die Beurteslung ihres wirklichen Wertes für den derbraucher, die einzelnen Beleuchtungsarten sowohl hinsichtlich ihrer physikalischen und emischen Grundlagen als auch ihrer Technik und herstellung behandelt werden.

Bevölferungslehre. Don Professor Dr. M. haushofer. (Mr. 50.) dil in gedrängter Form das Wesentliche der Bevölferungslehre geben über Ermittlung der oltszahl, über Gliederung und Bewegung der Bevölferung, Verhältnis der Bevölferung zum ewohnten Boden und die Itele der Bevölferungspolitik.

Bibel (f. a. Jesus; Religion). Der Text des Neuen Testaments nach seiner efchichtlichen Entwicklung. Don Div.-Pfarrer A. Pott. Mit 8 Cafeln. (Nr. 134.)

ill in die das allgemeine Interese an der Textritik bekundende Frage: "Ist der ursprüngsche Text des Iteuen Testamentes überhaupt noch herzustellen?" durch die Erörterung der erstältellen? durch die Erörterung der erstältnisses zum heutigen (deutschen) "berichtigten" Text, einführen, den "Aftesten Spuren Ergestellen und in "Theorie und Praxis" zeigen, wie der Text berichtigt und rekonstrukter überschungen" ben und in "Theorie und Praxis" zeigen, wie der Text berichtigt und rekonstrukter wird.

ildungswesen (s. a. Schulwesen). Das deutsche Bildungswesen in seiner ichichtlichen Entwidelung. Don Prof. Dr. Friedrich Paulfen. (Mr. 100.)

f beschränktem Raum löst der Versasser die schwierige Aufgabe, indem er das Bildungs-sen stets im Rahmen der allgemeinen Kulturbewegung daritellt, so daß die gesamte Kulturwidtung unseres Volkes in der Darfiellung seines Bildungswesens wie in einem verkleinerten iegelbild zur Erscheinung sommt. So wird aus dem Büchlein nicht nur für die Erkenntnis Dergangenheit, sondern auch für die Sorderungen der Jufunft reiche Frucht erwachsen.

Jedes Bandden geheftet 1 Mf., gefdmadvoll gebunden 1 Mf. 25 Pfg.

Biologie f. Abstammungslehre; Ameisen; Befruchtungsvorgang; Ceben; Meeresforfdung; Pflangen; Plantton; Tierleben.

Botanif f. Obstbau; Pflanzen; Wald.

Buchwesen f. Illustrationstunst; Schriftwesen.

Buddha. Leben und Lehre des Buddha. Don Professor Dr. Richard Pischel. Mit 1 Tafel. (Mr. 109.)

Gibt nach einer Übersicht über die Justande Indiens zur Jeit des Buddha eine Dar-stellung des Cebens des Buddha, seiner Stellung zu Staat und Kirche, seiner Cehrweise, sowie seiner Cehre, seiner Ethik und der weiteren Entwicklung des Buddhismus.

Chemie (s. a. Haushalt; Metalle). Luft, Wasser, Licht und Wärme. Neun Vorträge aus dem Gebiete der Experimental-Chemie. Don Profeffor Dr. R. Blochmann. 2. Auflage. Mit gahlreichen Abb. im Cert. (Ir. 5.) Suhrt unter befonderer Berudfichtigung der alltäglichen Ericeinungen des prattifchen Lebens in das Derständnis der chemischen Erscheinungen ein und zeigt die prattische Bedeutung des-

Christentum (f. a. Bibel; Jesus; Religion). Aus der Werdezeit des Christentums. Studien und Charafteriftifen. Don Prof. Dr. J. Geffden. (Ur. 54.) Gibt durch eine Reihe von Bildern eine Vorstellung von der Stimmung im alten Christen-tum und von seiner inneren Kraft und verschafft so ein Verständnis für die ungeheure und vielsettige welthistorische kultur- und religionsgeschichtliche Bewegung.

Dampf und Dampfmajdine. Don Professor Dr. R. Dater. Mit 44 Abbildungen. (Mr. 63.)

Sailbert die inneren Dorgange im Dampflessel und namentlich im Inlinder der Dampf-maschine, um so ein richtiges Derstandnis des Wesens der Dampfmaschine und der in der Dampfmafdine fich abspielenden Dorgange gu ermöglichen.

Darwinismus f. Abstammungslehre.

Deutschland f. Kolonien; Dolfsftamme; Wirtschaftsgefcichte.

Drama (f. a. Theater). Das deutsche Drama des neunzehnten Jahrhunderts. In feiner Entwidlung bargeftellt von Professor Dr. G. Witfowsti. 2. Auflage. Mit einem Bilonis Hebbels. (Ur. 51.)

Sucht in erster Linie auf historischem Wege das Derständnis des Dramas der Gegenwart such in erfer Cline das gestelligem wegt ods Seriamonis Beschaffenheit die Gestaltung anzubahnen und berücksichtigt die drei Faktoren, deren seweilige Beschaffenheit die Gestaltung des Dramas bedingt: Kunstanschauung, Schauspiellunst und Publikum.

Durer. Albrecht Durer. Don Dr. Rudolf Wuftmann. bildungen im Text. (Mr. 97.) Mit 33 Ab=

Stille fielichte und knappe Erzählung des gewaltigen menschlichen und künstlerischen Entwickungsganges Albrecht Dürers und eine Darstellung einer Kunst, in der nacheinander seine Selbse und Angehörigenbildnisse, die Zeichnungen zur Appolatypse, die Darstellungen von Minn und Weib, das Martenleden, die Stissungsgemälde, die Radierungen von Mittertum, Erauer und heiligkeit sowie de wichtigsten Werke aus der Zeit der Retse behandelt werden.

Che und Cherecht. Don Professor Dr. Ludwig Wahrmund. (Nr. 115.)

Schildert in gedrängter Sasjung die historische Entwicklung des Chebegriffes von den orientalischen und klassischen Döstern an nach seiner nachtlichen, sittlichen und rechtlichen seiner nachtlichen, sittlichen und rechtlichen der Seine des Eherechtes, behandelt darüber hinaus aber auch alle seine Fragen über die rechtliche Stellung der Frau und besonders der Mutter, die immer lebhafter die öffentliche Meinung beschäftigen.

Jedes Bandden geheftet 1 Mf., geschmadvoll gebunden 1 Mf. 25 pfg.

Eisenbahnen (f. a. Technif; Verkehrsentwicklung). Die Eisenbahnen, ihre Entstehung und gegenwärtige Verbreitung. Von Professor Dr. Ş. Hahn. Mit zahlreichen Abbildungen im Text und einer Doppeltafel. (Nr. 71.) Nach einem Rücklick auf die frühelten Zeiten des Eisenbahderes Wiedel.

Nach einem Rücklich auf die frühesten Seiten des Eisenbahnbaues führt der Derfasser die Eisenbahn im allgemeinen nach ihren Hauptmerkmalen vor. Der Bau des Bahnkörzers, der Tunnet, die großen Brückenbanten, sowie der Betrieb selbst werden besprochen, schließlich ein überblich über die geographische Derbreitung der Eisenbahnen gegeben.

Die technische Entwicklung der Eisenbahnen der Gegenwart. Don Eisenbahnbaus und Betriebsinspektor E. Biedermann. Mit zahlreichen Abbildungen im Text. (Ur. 144.)

Nach einem geschichstlichen Überblic über die Entwickung der Eisenbahnen werden die wichtigsten Gebiete der modernen Eisenbahntechnik behandelt, der Oberdan, Entwickung und Umstang der Spurbahnnetze in den verschiedenen Ländern, die Geschichte des Lofomotivenwesens bis zur Ausbildung der Heisdampslofomotiven einerseits und des elektrischen Betriebes andererseits, sowie der Sicherung des Betriebes durch Stellwerks und Blockanlagen.

Eisenhüttenwesen. Das Eisenhüttenwesen. Erläutert in acht Vorsträgen von Geh. Bergrat Professor Dr. H. Webbing. 2. Auflage. Mit 12 Figuren im Text. (Nr. 20.)

Schildert in gemeinfaßlicher Weise, wie Eisen, das unentbehrlichste Metall, erzeugt und in seine Gebrauchsformen gebracht wird. Besonders wird der hachosenprozeß nach seinen chemischen, physikalischen und geologischen Grundlagen geschildert, die Erzeugung der verschiedenen Eisenarten und die dabet in Betracht kommenden Prozesse erörtert.

Elektrotechnik (s. a. Funkentelegraphie). Grundlagen der Elektrotechnik. Don Dr. Rud. Blochmann. Mit zahlreichen Abb. im Text. (Nr. 168.) Eine durch lehreiche Abbitdungen unterführte Darktellung der elektrischen Erscheinungen, ihrer berundgelehe und ihrer Beziehungen zum Magnetismus, sowie eine Enkführung in das Dertändnis der zahlreichen praktischen Anwendungen der Elektristät in den Maschinen zur krasterzeugung, wie in der elektrischen Beleuchtung und in der Chemie.

**Entdeckungen** (s. a. Polarforschung). Das Zeitalter der Entdeckungen. Ion Professor Dr. S. Günther. 2. Auflage. Mit einer Weltkarte. (Nr. 26.)

Mit lebendiger Darstellungsweise sind hier die großen weltbewegenden Ereignisse der eographischen Renaissancezeit ansprechend geschildert, von der Begründung der portugiesischen Glonialherrschaft und den Fahrten des Columbus an dis zu dem Hervortreten der französischen, ritischen und holländischen Seefahrer.

**Erde** (s. a. Mensch und Erde; Wirtschaftsgeschichte). Aus der Vorzeit er Erde. Vorträge über allgemeine Geologie. Von Prosessor Dr. Fr. Frech. lit 49 Abbildungen im Text und auf 5 Doppeltaseln. (Nr. 61.)

rörtert die interessantesten und praffisch wichtigsten Probleme der Geologie: die Tätigseit er Duskane, das Klima der Dorzeit, Gebirgsbildung, Korallenrisse, Talbildung und Erosion, dilbäche und Wildbachverbauung.

erfindungswesen f. Gewerbe.

rnährung (j. a. Alfoholismus; Haushalt; Kaffee; Sängling). Ernährung nd Volfsnahrungsmittel. Sechs Vorträge von weil. Profesjor Dr. Johannes renhel. Mit 6 Abbildungen im Text und 2 Tafeln. (Nr. 19.)

ibt einen Überblid über die gejamte Ernährungslehre. Durch Erörterung der grundlegenden griffe werden die Inbereitung der Nahrung und der Derdauungsapparat besprochen und endlich herftellung der einzelnen Nahrungsmittel, insbesondere auch der Konserven behandelt.

Jedes Bandden geheftet 1 Mf., gefchmadvoll gebunden 1 Mf. 25 Pfg.

Erziehung. (f. a. Jugendfürsorge; Knabenhandarbeit; Pädagogif). Moderne Erziehung in haus und Schule. Dorträge in der humboldi-Afademie zu Berlin. Don J. Tews. (Mr. 159.)

Betrachtet die Erziehung als Sace nicht eines einzelnen Berufes, sondern der gesamten gegenwärtigen Generation, zeichnet scharf die Schattenseiten der modernen Erziehung und zeicht Mittel und Wege sur eine allseitige Durchdringung des Erziehungsproblems. In diesem Sinne werden die wichtigten Erziehungsfragen behandelt: Die Jamilie und ihre pädagogischen Nängel, der Lebensmorgen des modernen Kindes, Bureaufratie und Schenacktingung, Persönlichkeitspädagogik, Jucht und Juchtmittel, die resigiöse Frage, gemeinsame Erziehung der Geschlechter, die Armen am Gesse, Erziehung der resseren Jugend usw.

Sarben f. Licht.

Frauenarbeit. Die Frauenarbeit, ein Problem des Kapitalismus. Don Drivatdozent Dr. Robert Wilbrandt. (nr. 106.)

Das Thema wird als ein brennendes Problem behandelt, das uns durch den Kapitalismus aufgegeben worden ist, und behandelt von dem Derhältnis von Beruf und Mutterschaft aus, aufgegeven worden us, und venanden von dem Vergunns von Beruf und Austrelaust und als dem zentralen Problem der ganzen Frage, die Ursachen der niedrigen Bezahlung der weiblichen Arbeit, die daraus entstehenden Schwierigseiten in der Konfurrenz der Frauen mit den Männern, den Gegensatz von Arbeiterinnenschutz und Befreiung der weiblichen Arbeit.

Srauenbewegung. Die moderne Frauenbewegung. Don Dr. Kathe Schirmacher. (Ir. 67.)

Gibt einen Überblid über die haupttatsachen der modernen Frauenbewegung in allen Candern und schildert eingehend die Bestrebungen der modernen Frau auf dem Gebiet der Bildung, der

Srauentrantheiten. Gefundheitslehre für Frauen. Don Privatdogent Dr. R. Sticher. Mit 13 Abbildungen im Tert. (Nr. 171.)

Eine Gesundheitslehre für Frauen, die über die Anlage des weiblichen Organismus und seine Pflege unterrichtet, zeigt, wie diese bereits im Kindesalter beginnen muß, welche Bedeitung die allgemeine förperschie und geistige hygiene insbesondere in der Jeit der Entwicklung hat, um sich dann eingehend mit dem Beruf der Frau als Gattin und Mutter

Srauenleben. Deutsches Frauenleben im Wandel der Jahrhunderte. Don Direftor Dr. Ed. Otto. Mit 25 Abbilbungen. (Mr. 45.)

Gibt ein Bild des deutschen Frauenlebens von der Urzeit bis zum Beginn des 19. Jahr-hunderts, von Denken und Jühlen, Stellung und Wirksamkeit der deutschen Frau, wie sie sich im Wandel ber Jahrhunderte darftellen.

Friedensbewegung (f. a. Recht). Die moderne Friedensbewegung. Don Alfred f. Fried. (Mr. 157.)

Entwidelt das Wesen und die Ziele der Friedensbewegung, gibt dann eine Darstellung der Schiedsgerichtsbarteit in ihrer Entwickung und gegenwartigem Umsang mit besonderer Berücksichtigung der hohen Bedeutung der haager Friedenskonserenz, beschäftigt sich hierauf mit dem Abrüstungsproblem und gibt zum Schluß einen eingehenden Überblic über die Geschichte der Friedensbewegungen und eine dronologische Darstellung der für sie bedeutsamen Ereignise.

Sriedrich Srobel. Sein Leben und fein Wirfen. Don Abele von Portugall. (Mr. 82.)

Sehrt die grundlegenden Gedanten der Methode Grobels fennen und gibt einen Uberblid feiner wichtigften Schriften mit Betonung aller jener Kernaussprüche, die treuen und oft ratlofen Müttern als Wegweiser in Ausübung ihres hehrsten und heiligften Berufes dienen konnen.

Jedes Bandden geheftet 1 Mf., gefdmadvoll gebunden 1 Mf. 25 Pfg.

Sunkentelegraphie. Die Sunkentelegraphie. Don Ober-Postpraktikant f. Thurn. Mit 50 Illustrationen. (Ur. 167.)

Nach einer Übersicht fiber die elektrischen Dorgänge bei der Junkentelegraphie und einer eingehenden Darstellung des Systems Telesunken werden die für die verschiedenen Anwendungsgebiete erforderlichen einzelnen Konstruktionskypen vorgeführt. (Schiffsikationen, Canditationen, Millitärstationen und solche für den Elsenbahndienst), wobei nach dem neuesten Stand von Wissenschaft und Technik in süngster Zeit ausgesührte Anlagen beschrieben werden. Danzeck mird der Einstuh der Lunkentelegraphie auf Mirtikasisverken und des Mirte Stand bon Whenhagir und Ceanit in jungiter deit ausgehungen eintagen vergetreben werden. Danach wird der Einfluß der Funkentelegraphie auf Wirtschaftsverkehr und das Wirtschaftsleben (im Handels- und Kriegsseeverkehr, für den Heeresdienst, für den Wetterdienst und, sowie im Anjoluß daran die Regelung der Junkentelegraphie im deutschen und

Sürforgewesen f. Jugendfürforge.

Sürstentum. Deutsches Sürstentum und deutsches Verfassungswesen. Don Professor Dr. E. hubrich. (Nr. 80.)

Der Verfasser zeigt in großen Umrissen ben Weg, auf dem deutsches Sürstentum und deutsche Dollsfreiheit zu dem in der Gegenwart geltenden wechselseitigen Ausgleich gelangt sind, unter Dottsfreiheit zu dem in der Gegenwart genenden weugenenigen erusgietat getangt inde, unter besonderer Berücksichtigung der preußsischen Dersassungsverhältnisse. Nach fürzerer Beleuchtung der älteren Dersassungspartie schildert der Dersasser die Begrindung des fürstlichen Abso-lutismus und demgegenüber das Erwachen, Fortschreiten und Siegen des modernen Kon-

Gasmafdinen f. Wärmefraftmafdinen.

Geistesfrantheiten. Don Anstaltsoberarzt Dr. Georg Ilberg. (Nr. 151.)

Erörtert das Wesen der Geistestrantheiten und an eingehend zur Darstellung gelangenden Beispielen die wichtigsten Formen geistiger Erfrankung, um so ihre Kenntnis zu iördern, die richtige Beurteilung der Zeichen geistiger Erfrankung und damit eine rechtzeitige verfrandnisvolle Behandlung derfelben gu ermöglichen.

Geographie f. Entbedungen; Japan; Kolonien; Menfc; Palaftina; Polarforfdung; Städte; Doltsstämme; Wirtschaftsleben.

Geologie f. Erde.

Germanen. Germanifche Kultur in der Urzeit. Don Dr. G. Steinhaufen. Mit 17 Abbildungen. (Mr. 75.)

Das Buchlein beruht auf eingehender Quellenforschung und gibt in fesselnder Darstellung einen überblid über germanisches Leben von der Urzeit bis zur Berührung der Germanen

Germanische Mythologie. Von Dr. Julius von Negelein. (Nr. 95.) Der Verfasser gibt ein Bild germanischen Glaubenslebens, indem er die Äußerungen religiösen Cebens namentlich auch im Kultus und in den Gebräuchen des Aberglaubens auffucht, sich überall bestrebt, das zugrunde liegende psphologische Motiv zu entdecken, die verwirrende Sülle mythischer Catsachen und einzelner Namen aber demgegenüber zurückreten läßt.

Geschichte (f. a. Amerika; Bildungswesen; Entdedungen; Frauenleben; Surftentum; Germanen; Japan; Jefuiten; Ingenieurtednit; Kalender; Kriegswesen; Kultur; Kunftgeschichte; Literaturgeschichte; Luther; Munge; Mufit; Palaftina; Pompeji; Rom; Schulwesen; Stadtewesen; Dolfsstamme; Welthandel; Wirtschaftsgeschichte).

Jedes Bandden geheftet 1 Mt., geschmachvoll gebunden 1 Mt. 25 pfg.

Geschichte. Politische hauptströmungen in Europa im 19. Jahrhundert. Don Professor Dr. K. Ch. Beigel. (Mr. 129.)

Bietet eine finappe Darstellung der wichtigsten politischen Ereignisse vom Ausbrucke der französischen Revolution bis zum Ausgang des 19. Jahrhunderts, womit eine Schilberung der politischen Ideen hand in hand geht und wobei überall Ursache und Folge, d. h. der innere Jusammenhang der einzelnen Vorgänge, dargelegt, auch Sinvesart und Taten wenigstens der einfluhreichsten Persönlichkeiten gewürdigt werden.

Don Luther zu Bismard. 12 Charafterbilder aus deutscher Geschichte. Don Prosessor Dr. Ottokar Weber. 2 Bandchen. (Nr. 123. 124.) Ein knappes und doch eindrucksvolles Bild der nationalen und kulturellen Entwickelung der Reuzeit, das aus den vier Jahrhunderten je drei Perjönlichkeiten herausgreift, die bestimmend eingegriffen haben in den Werdegang deutscher Geschichte. Der große Reformator, Regenten großer und kleiner Staaten, Generale, Diplomaten kommen zu Wort. Was Martin Luther einst geträumt: ein nationales deutsches Kasserreich, unter Bismard sieht es begründet da.

—— 1848. Sechs Vorträge von Professor Dr. Ottofar Weber. (Ur. 53.) Bringt auf Grund des überreichen Materials in fnapper form eine Darftellung der wichtigen Ereignisse des Jahres 1848, diefer nahezu über gang Europa verbretteten großen Bewegung in ihrer bis gur Gegenwart reichenden Wirfung.

Restauration und Revolution. Skiggen gur Entwidlungsgeschichte ber deutschen Ginheit. Don Professor Dr. Richard Schwemer. (Mr. 37.)

— Die Reaktion und die neue Ara. Skiggen gur Entwidelungsgeschichte der Gegenwart. Don Professor Dr. Richard Schwemer. (Mr. 101.)

Dom Bund zum Reich. Neue Skizzen zur Entwickelungsgeschichte der beutschen Einheit. Don Professor Dr. Richard Schwemer. (Ar. 102.) Die 3 Bändden geben zusammen eine in Aufsaljung und Darfellung durchaus eigenartige Geschichte des deutschen Dolles im 19. Jahrhundert. "Restauration und Revolution behandeit das Leben und Streben des Geducken Dolles in der ersten Hälste des 19. Jahrhunderts, von dem ersten kusselnen des Gedantens des nationalen Staates dis zu dem tragischen Sturze in der Mitte des Jahrhunderts. "Die Reaktion und die neue Krac", beginnen dit der Zeit der Vermattung nach dem großen Aussichung von 1848, stellt in den Mittelpunkt des Prinzen von Preußen und Ötto von Bismards Schaffen. "Dom Bund zum Reich" zeigt uns Bismard mit sicherer sand die Grundlage des Reiches vorbereitend und dann immer entschiedener allem Geschehenen das Gepräge seines Geistes versetztend.

Gefundheitslehre (f. a. Alfoholismus; Ernährung; Frauenfrantheiten; Geistesfrankheiten; Haushalt; Heilwissenschaft; Krankenpflege; Leibessübungen; Mensch; Kervensnstem; Säugling; Schulhngiene; Stimme; Cuberfulose). Acht Vorträge aus der Gesundheitslehre. Don Prosessor Dr. H. Buchner. 2. Auflage, besorgt von Prosessor Dr. M. Gruber. Mit zahlreichen Abbildungen im Cert. (Nr. 1.)

In klarer und überaus fesselnder Darstellung unterrichtet der Derfasser über die äußeren Lebensbedingungen des Menschen, über das Derhältnis von Luft, Licht und Wärme zum neuschilden Körper, über Kleidung und Wohnung, Bodenverhällntisse und Wasservorgung, die krankheiten erzeugenden Pilze und die Infektionskrankheiten, kurz über wichtige Fragen

Gewerbe. Der gewerbliche Rechtsschut in Deutschland. Don Patentanwalt B. Tolfsborf. (Mr. 138.)

Nach einem allgemeinen Uberblid über Entstehung und Entwidlung des gemerblichen Rechtsfounges und einer Bestimmung der Begriffe Patent und Erfindung wird gunachst das deutsche

Jedes Bandden geheftet 1 Mf., gefdmadvoll gebunden 1 Mf. 25 Pfg.

Patentrecht behandelt, wobei der Gegenstand des Patentes, der Patentberechtigte, das Verfahren in Patentsachen, die Rechte und Pflichten des Patentinhabers, das Erlöschen des Patentrechtes und die Verletzung und Anmahung des Patentschuses erörtert werden. Sodann wird das Mustere und Warenzeichenrecht dargestellt und dabei besonders Art und Gegenstand der Muster, ihre Nachbildung, Eintragung, Schusdauer und Löschung klargesegt. Ein weiterer Abschult besoht sich mit den internationalen Verträgen und dem Ausstellungsschutz. Jum Schusse von des Verlungsschutz der Patentanwälte bespröchen.

#### Handfertigfeit f. Knabenhandarbeit.

Handwerk. Das deutsche Handwerk in seiner kulturgeschichtlichen Entwicklung. Don Direktor Dr. Ed. Otto. 2. Aufl. Mit 27 Abb. auf 8 Taseln. (Nr. 14.)

Eine Darstellung der Entwicklung des deutschen handwerts bis in die neueste Zeit, der großen Umwälzung aller wirtschaftlichen Derhältnisse im Zeitalter der Eisenbahnen und Dampflebens, seiner Sitten, Bräuche und Dichtung.

**Haus** (f. a. Kunst). Das deutsche Haus und sein Hausrat. Von Prosessor. Rudolf Meringer. Mit 106 Abbildungen, darunter 85 von Prosessor. R. von Schroetter. (Ur. 116.)

Das Buch will das Interesse an dem deutschen Haus, wie es geworden ist, fördern; mit gahlreichen fünstlerischen Illustrationen ausgestattet, behandelt es nach dem "Herdhaus" das oberdeutsche Haus, sührt dann anschaulich die Einrichtung der sür dieses characterspisschen Sinde, den Osen, den Tisch, das Eßgerät vor und gibt einen Überblick über die Hertunst von Haus und Hausrat.

Kulturgeschichte des deutschen Bauernhauses. Von Regierungsbaumeister a. D. Chr. Ranck. Mit 70 Abbildungen. (Nr. 121.)

der Verfasser führt den Ceser in das Haus des germanischen Landwirtes und zeigt dessen Entwicklung, wendet sich dann dem Hause der Kandinavischen Bauern zu, um hierauf die Entwicklung des deutschen Bauernhauses während des Mittelaiters darzustellen und mit einer Schilderung der heutigen Form des deutschen Bauernhauses zu schließen.

Jaushalt (f. a. Kaffee). Die Naturwissenschaften im Haushalt. Von dr. J. Bongardt. 2 Bändchen. (Nr. 125. 126.)

. Teil: Wie sorgt die Hausfrau für die Gesundheit der Samilie? Mit 31 Abbildungen. . Teil: Wie sorgt die Hausfrau für gute Nahrung? Mit 17 Abbildungen.

elbst gebildete hausfrauen können sich Fragen nicht beantworten wie die, weshalb sie 3. B. ondensierte Utilch auch in der heihen Seit in offenen Gefähen aufbewahren können, weshalb Obst im kupfernen Kessel nicht erkalten som den hander Beispiele, untersührt durch Experimente und Abbildungen, was naturwissenschaftliche Deuten der Leierinnen so geschult werden, daß sie befähigt werden, ich solche Fragen selbst zu beantworten, die das Buch unberücssicht läht.

Themie in Küche und Haus. Don Professor Dr. G. Abel. Mit bbildungen im Text und einer mehrfarbigen Doppeltafel. (Nr. 76.)

ns Bändigen will Gelegenheit bieten, die in Küche und haus täglich sich vollziehenden emischen und physikalischen Prozesse richtig zu beobachten und nugbringend zu verwerten, wird heizung und Beleuchtung, vor allem aber die Ernährung eröriert, werden tierssche die sich kannelt.

andn f. Musik.

Jedes Bändchen geheftet 1 Mf., geschmadvoll gebunden 1 Mf. 25 Pfg.

Beilwiffenschaft (f. a.Auge; Geisteskrankheiten; Gefundheitslehre; Krankenpflege; Säugling). Die moderne Beilwiffenschaft. Wefen u. Grenzen des ärztlichen Wiffens. Don Dr. E. Biernadi. Deutsch von Badearzt Dr. S. Ebel. (Mr. 25.)

Will in den Inhalt des ärztlichen Wissens und Könnens von einem allgemeineren Standpuntte toft in den Injust des arzutagen wissens und konnens von einem augemeineren Iumopnungen aus einführen, indem die geschichtliche Entwicklung der medizinischen Grundbegriffe, die Leistungsfähigfeit und die Fortschritte der modernen Heilkunft, die Beziehungen zwischen der Diagnose und der Behandlung der Krankheit, sowie die Grenzen der modernen Diagnostit

Der Aberglaube in der Medigin und feine Gefahr für Gefundheit und Leben. Don Professor Dr. D. von hansemann. (Ir. 83.)

Behandelt alle menichlichen Derhalmiffe, die in irgend einer Beziehung zu Ceben und Gefundheit stehen, besonders mit Rudsicht auf viele schädliche Aberglauben, die geeignet sind, Arantheiten zu fordern, die Gesundheit herabzusegen und auch in moralischer Beziehung zu schädigen.

Herbarts Cehren und Leben. Von Paftor O. Slügel. (Nr. 164.)

herbarts Cehre zu kennen, ist für den Philosophen wie für den Pädagogen gleich wichtig. Aber seine eigenartige Terminologie und Deduktionsweise erschwert das Einleben in seine Gedantengefilde. Slügel übernimmt es mit musterhaftem Geschick, der Interpret des Meisters zu sein, dessen Werder, seine Philosophie und Pädagogit gemeinverständlich

Bilfsichulwesen (f. a. Geiftestrankheiten; Jugendfürforge). Dom Hilfsiculwefen. Don Reftor Dr. B. Maennel. (Ir. 73.)

Es wird in kurzen Jügen eine Theorie und Praxis der Hilfsschulpädagogik gegeben. An Hand der vorhandenen Literatur und auf Grund von Erkahrungen wird nicht allein zusammensgestellt, was bereits geleistet worden sit, sondern auch hervorgehoben, was noch der Entschule

Japan (f. a. Kunft). Die Japaner und ihre wirtschaftliche Entwicklung. Don Professor Dr. K. Rathgen. (Mr. 72.)

Vermag auf Grund eigener langjähriger Erfahrung ein wirkliches Verständnis der merkwürdigen und für uns wirtichaftlich so wichtigen Erscheinung der fabelhaften Entwicklung Japans zu eröffnen.

Jesuiten. Die Jesuiten. Eine historische Skigge von Professor Dr.

Ein Büchlein nicht für oder gegen, sondern über die Jesuiten, also der Dersuch einer gerechten Würdigung des vielgenannten Ordens, das nicht nur von der jogenannten Zesuiten noral oder von der Ordensverfassung, sondern auch von der Jesuitenschule, von den Ceistungen des Ordens auf dem Gebiete der geistigen Auftur, von dem Jesuitenstaate usw. handelt.

Jesus (f. a. Bibel; Christentum; Religion). Die Gleichnisse Jesu. Zugleich Anleitung zu einem quellenmäßigen Derftandnis der Evangelien. Don Lic. Professor Dr. f. Weinel. 2. Auflage. (Mr. 46.)

will gegenüber tirchlicher und nichtfirchlicher Allegorisierung der Gleichnisse Jesu mit ihrer richtigen, wortlichen Auffassung bekannt machen und verbindet damit eine Einführung in die

Jefus und feine Zeitgenoffen. Don Paftor K. Bonhoff. (Mr. 89.) Die gange herbheit und töltliche Frische des Dollstindes, die hinreißende hochherzigkeit und prophetische Uberlegenheit des genialen Volksmannes, die reise Weisheit des Jüngerbildners und die religiose Tiefe und Weite des Evangeliumverkinders von Nagareth wird erit empfunden, wenn man ihn in seinem Derkehr mit den ihn umgebenden Menidengestalten, Dolfs- und Parteigruppen gu verftehen fucht, wie es diefes Buchlein tun will.

Jedes Bandden geheftet 1 Mt., gefcmadvoll gebunden 1 Mt. 25 Pfg.

Jesus. Wahrheit und Dichtung im Ceben Jesu. Von Pfarrer Dr. Paul Mehlhorn. (Ur. 137.)

Will zeigen, was von dem im Neuen Testament uns überlieferten Leben Jesu als wirklicher Tatbestand festzuhalten, was als Sage oder Dichtung zu betrachten ist, durch Darlegung der Grundsäge, nach denen die Scheidung des geschichstlich Glaubwürdigen und der es umrankenden Phantasiegebilde vorzunehmen ist und durch Dollziehung der so gekennzeichneten Arr chemischer Analyse an den wichtigien Stoffen des "Lebens Jesu".

Mustrationskunft. Die deutsche Illustration. Von Professor Dr. Rudolf Kaugsch. Mit 35 Abbildungen. (Nr. 44.)

Behandelt ein besonders wichtiges und besonders lehrreiches Gebiet der Kunst und leistet zugleich, indem es an der hand der Geschichte das Charafteristische der Ilustration als Kunst zu ersorschen such, ein gut Stüd "Runsterziehung".

Ingenieurtechnik. Schöpfungen der Ingenieurtechnik der Neuzeit. Don Baurat Kurt Merckel. 2. Auflage. Mit 55 Abbildungen im Text und auf Tafeln. (Nr. 28.)

Sührt eine Reihe hervorragender und interessanter Ingenieurbauten nach ihrer technischen und wirtschaftlichen Bedeutung vor: die Gebirgsbahnen, die Bergbahnen, und als deren Dorsläuser die bedeutenden Gebirgsstraßen der Schweiz und Tirols, die großen Eisenbahnverbindungen in Ksien, endlich die modernen Kanal- und hafenbauten.

Bilder aus der Ingenieurtechnik. Don Baurat Kurt Merdel. Mit 43 Abbildungen im Text und auf einer Doppeltafel. (Nr. 60.)

Zeigt in einer Schilderung der Ingenieurbauten der Babnsonter und Assprer, der Ingenieurtechnik der alten Ägnpter unter vergleichsweiser Behandlung der modernen Irrigationsanlagen daselbst, der Schöpfungen der antiken griechtschaft Ingenieure, des Städtebaues im Altertum und der römischen Wasserleitungsbauten die hohen Leistungen der Völker des Altertums.

Israel f. Religion.

Jugend - Sürsorge. Von Direktor Dr. Joh. Petersen. 2 Bände. (Ur. 161. 162.)

Band I: Die öffentliche Sürsorge für die hilfsbedürftige Jugend, Band II: Die öffentliche Sürsorge für die sittlich gefährdete und die gewerblich tätige Jugend.

Erörtert alle das Jürsorgewesen betreffenden Fragen, dedt die ihm anhastenden Mängel auf, zeigt zugleich aber auch die Mittel und Wege zu ihrer Beseitigung. Besonders eingehend werden behandelt in dem I. Bändchen das Dormundschaftsrecht, die Säuglingssterblichteit, die Sürsorge für uneheliche Kinder, die Gemeindewassenstellege, die Dors und Nachteile der Antalfiss und Familienpslege, in dem 2. Bändchen die gewerbliche Ausnuhung der Kinder und der Kinderschaft im Gewerbe, die Kriminalität der Jugend und die Iwangserziehung, die Hinderschaft und die Jürsorge für die schulentlassen Jugend.

Kaffee, Tee, Kakao und die übrigen narkotischen Aufgußgetränke (f. a. Ernährung; Haushalt). Don Professor Dr. A. Wieler. Mit 24 Abbildungen und 1 Karte. (Nr. 132.)

Behandelt, durch zwedentsprechende Abbildungen unterstützt, Kaffee, Tee und Kakao eingehender, Mate und Kola fürzer, in bezug auf die botanische Abstammung, die natürliche Derbreitung der Stammpslanzen, die Derbreitung ihrer Kultur, die Wachstumsbedingungen und die Kulturmethoden, die Erntzzeit und die Ernte, endlich die Gewinnung der fertigen Ware, wie der Weltmarkt sie aufnimmt, aus dem geernteten Produkte.

Katao f. Kaffee.

Jedes Bandden geheftet 1 Mf., gefcmadvoll gebunden 1 Mf. 25 Pfg.

Kalender. Der Kalender. Von Professor Dr. W. F. Wislicenus. (Mr. 69.)

Erflärt die aftronomischen Erscheinungen, die für unsere Zeitrechnung von Bedeutung sind, und schlicher die historische Entwickung des Kalenderwesens vom römischen Kalender ausgehend, den Werdegang der christlichen Kalender bis auf die neueste Zeit versolgend, seht siehe Einrichtungen auseinander und sehrt die Berechnung kalendarischer Angaben für Vergangenheit und Jukunft, sie durch zahlreiche Beispiele erläuternd.

Kant (f. a. Philosophie). Immanuel Kant; Darftellung und Würdigung. Don Professor Dr. O. Kulpe. Mit einem Bilonisse Kants. (Nr. 146.)

Kant hat durch seine grundlegenden Werke ein neues Jundament für die Philosophie aller Dölker und Seiten geschaffen. Dieses in seiner Tragfähigkeit für moderne doen darzussellen, die die der Derfasser zu Aufgabe gestellt. Es ist ihm gelungen, den wirtigen kant mit hijtorischer Treue zu schildern und doch auch zu beleuchten, wie die Nachwelt berufen ist, die dach er ein Kind seiner Sekremeinungen neroänglicher Art hein million. Sett ift und manche feiner Lehrmeinungen vergänglicher Art fein muffen.

Kinderpflege f. Säugling.

Knabenhandarbeit. Die Knabenhandarbeit in der heutigen Erziehung. Don Seminardireftor Dr. Alw. Pabft. Mit 21 Abbildungen im Cert und 1 Titelbild. (Mr. 140.)

Gibt einen Überblid über die Geschichte des Unabenhandarbeitsunterrichts, untersucht seine Stellung im Lichte der modernen pädagogischen Strömungen und erhärtet seinen Wert als Erziehungsmittel, erörtert sodann die Art des Betreibes in den verschiedenen Schulen und gibt jum Schlusse eine vergleichende Darftellung der Sufteme in den verschiedenen Candern.

Kolonien. Die deutschen Kolonien. Cand und Leute. Don Dr. Abolf Beilborn. Mit gahlreichen Abbildungen und 2 Karten. (Ur. 98.)

Bringt auf engem Raume eine durch Abbildungen und Karten unterstützte, wissenschaftlich genaue Schilderung der deutschen Kolonien, sowie eine einmandfreie Darstellung ihrer Dölfer nach Nahrung und Kleidung, haus und Gemeindeleben, Sitte und Recht, Glaube und Aberglaube, Arbeit und Vergnügen, Gewerbe und handel, Waffen und Kampsesweise.

Kraftfahrzeuge f. Automobil.

Krankenpflege. Dorträge gehalten von Chefargt Dr. B. Leid. (Mr. 152.) Gibt zunächst einen Überblic über Bau und Junktion der inneren Organe des Körpers und deren hauptsächlichte Erfrankungen und erörtert dann die hiebei zu ergreifenden Mahnahmen. Besonders eingehend wird die Krankenpflege bei Infektionskrankheiten sowie bei plöglichen Ungludsfällen und Erfrankungen behandelt.

Kriegswesen. Dom Kriegswesen im 19. Jahrhundert. Zwanglose Skizzen von Major O. von Sothen. Mit 9 Übersichtskärtchen. (Nr. 59.)

In einzelnen Abschnitten wird insbesondere die Napoleonische und Moltfesche Kriegführung an In engenen ropaminen wird insvejonore die tupoleoninge und indirelgie artegjugtung an Betipielen (Jena-Königgräß-Sedan) dargestellt und durch Kartenstigen erläutert. Damit verbunden ihnd furze Schilderungen der preußischen Armee von 1806 und nach den Bestelungs-kriegen, sowie nach der Reorganisation von 1860, endlich des deutschen Heeres von 1870 bis

Der Seekrieg. Seine geschichtliche Entwidlung vom Zeitalter der Entdedungen bis gur Gegenwart. Don Kurt Freiherr von Malhahn, Dize=Admiral a. D. (Nr. 99.)

Der Verf. bringt den Seefrieg als Kriegsmittel wie als Mittel der Politik zur Darstellung, indem er zunächst die Entwicklung der Kriegsssotte und der Seefriegsmittel schlieber und dan die heutigen Weltwirtschaftsstaaten und den Seefrieg behandelt, wobei er besonders an den Applicatiesverhältnis, in dem unsere Weltwirtschaftsstaaten kommerziell und politisch

## Jedes Bandden geheftet 1 Mf., gefdmadvoll gebunden 1 Mf. 25 pfg.

Kultur (f. a. Germanen; Geschichte; griech, Städtebilder). Die Anfänge der menschlichen Kultur. Don Prosessor Dr. Endwig Stein. (Ur. 93.) Behandelt in der Überzeigung, daß die Kulturprobleme der Gegenwart sich uns nur durch einen tieseren Einbild in ihren Werdegang erschließen, Natur und Kultur, den vorgeschichtlichen Menschen, die Anfänge der Arbeitsteilung, die Aufänge der Anseinstellen, moralischen und sozialen Kultur.

Kunst (s. a. Baukunst; Dürer; Städtebilder; Illustrationskunst; Rembrandt; Schristwesen). Bau und Leben der bildenden Kunst. Don Direktor Dr. Theodor Dolbehr. Mit 44 Abbildungen. (Nr. 68.)

Sührt von einem neuen Standpunste aus in das Verständnis des Wesens der bildenden Kunst ein, erörtert die Grundlagen der menschlichen Gestaltungstraft und zeigt, wie das künstlerische Interesse sich allmählich weitere und immer weitere Stoffgebiete erobert.

Mit 14 Abbildungen. (Nr. 77.)

Will, ausgehend von der Überzeugung, daß zu einem vollen Menschensein und Volkstum die Psiege des Schönen unabweisdar gehört, die Augen zum rechten Sehen öffnen lehren und die ganze Cebensführung, Kleidung und häuslichkeit älthetisch gefaldten, um auch zur Erkentnis dessen zu führen, was an heimatkunkt und heimatschaft zu hegen ist, und auf diesengroßen Gebiete persönlichen und allgemeinen äschetischen Sebens ein praktischer Ratgeber sein.

Die ostasiatische Kunst und ihre Einwirkung auf Europa. Don Direktor Dr. R. Graul. Mit 49 Abb. im Text und auf 1 Doppeltasel. (Nr. 87.) Bringt die bedeutungsvolle Einwirkung der japanischen und chineisischen Kunst auf die europäische zur Darstellung unter Mittellung eines reichen Bildermaterials, den Einsluß Thinas auf die Entwicklung der zum Kotofo drängenben freien Richtungen in der betrativen kunst des 18. Jahrhunderts wie den auf die Entwicklung des 19. Jahrhunderts. Der Detschien der die Eszehungen der Malerei und Farbendruckunst Japans zum Impressionus der modernen europäischen Kunst hin.

**Leben.** Die Erscheinungen des Lebens. Grundprobleme der modernen Biologie. Don Privatdozent Dr. H. Miehe. Mit 46 Siguren im Text. (Nr. 130.) verjucht eine umfassend Totalansicht des organischen Lebens zu geben, indem nach einer Frörterung der spekulativen Vorstellungen über das Leben und einer Beschreibung des Protoplasmas und der Zelle die hauptsächlichten Aeußerungen des Lebens behandelt werden, als Entwicklung, Ernährung, Atmung, das Sinnesleben, die Fortpslanzung, der Tod, die Variabilität und im Anschließ daran die Theorien über Entstehung und Entwicklung der Cebewelt, sowie die mannigsachen Beziehungen der Lebewelen unteretnander.

**Leibesübungen.** Die Leibesübungen und ihre Bedeutung für die Gesundheit. Don Professor Dr. R. Jander. 2. Auflage. Mit 19 Abb. (Nr. 13.) will darüber auftlären, weshalb und unter welchen Umständen die Leibesübungen segensreich wirken, indem es ihr Wesen, andererseits die in Betracht kommenden Organe bespricht; Leibesübungen der Frauen, die Bedeutung des Sportes und die Gefahren der sportlichen übertreibungen.

Cicht (s. a. Beleuchtungsarten; Chemie). Das Licht und die Farben. Sechs Dorfesungen, gehalten im Volkshochschulverein München. Von Professor Dr. C. Graey. 2. Auflage. Mit 116 Abbildungen. (Nr. 17.)

Sührt, von den einsachsten optischen Erscheinungen ausgehend, zur tieferen Einsicht in die Natur des Lichtes und der Karben, behandelt, ausgehend von der scheinbar geradlinigen Ausbreitung, Juruckwersung und Brechung des Lichtes, das Wesen der Farben, die Beugungserscheinungen und die Photographie.

Literaturgeschichte f. Drama; Schiller; Theater; Dolfslied.

Jedes Bandden geheftet 1 Mt., gefdmadvoll gebunden 1 Mf. 25 Pfg.

Euther (f. a. Geschichte). Luther im Lichte ber neueren Sorfdung. fritischer Bericht. Don Professor Dr. G. Boehmer. (Ir. 113.)

Derjucht durch sorgsättige historische Untersuchung eine erschöpsende Darstellung von Cuthers Ceben und Wirten 3u geben, die Persönlichseit des Resormators aus ihrer Jeit heraus zu ersassen, und gibt so nicht nur ein psichologisches Porträt, sondern bietet zugleich ein intervallenten Stiek Aussurgabilite

Madaenschule (f. a. Bildungswesen; Schulwesen). Die höhere Madchenfoule in Deutschland. Don Oberlehrerin M. Martin. (fir. 65.) Bietet aus berufenster Seder eine Darstellung der Jiele, der historischen Entwicklung, der heutigen Gestalt und der Jufunftsaufgaben der hoheren Madchenschulen.

Mathematische Spiele (f. a. Arithmetik). Don Dr. W. Ahrens. (Nr. 170.) Sucht in das Derftändnis all der Spiele, die "ungleich voll von Nachderflen" vergnügen, weil man dei ihnen rechnet, ohne Doraussehung trgend welcher mathematischer Kenntnisse eingsten und so ihren Reiz für Nachdenkliche erhöhlich zu erhöhen. So werden unter Beigabe von einfachen, das Mitarbeiten des Cesers belebenden Fragen Weitspringen, Boß-Puzzle, der Rösselspringen und die Magischen Pragen Weitspringen, Boß-Puzzle, der Rösselsprung und die Magischen Quadrate behandelt.

Meeresforschung. Meeresforschung und Meeresleben. Don Dr. O. Janfon. 2. Auflage. Mit 41 Siguren. (Mr. 30.)

Schildert turz und lebendig die Sortschritte der modernen Meeresuntersuchung auf geographischem, physitalisch-achemischem und biologischem Gebiete, die Verteilung von Wasser und Land auf der Erde, die Tiefen des Meeres, die physitalischem und chemischen Verhältnisse des Meeres, endlich die wichtigsten Organismen des Meeres, die Pslanzen und Tiere.

Menich (f. a. Auge; Kultur; Stimme). Der Mensch. Sechs Vorlesungen a. d. Gebiete der Anthropologie. Don Dr. A. Heilborn. Mit gahlr. Abb. (Nr. 62.) Stellt die Cehren der "Wissenschaft aller Wissenschaften" streng sachlich und doch durchaus vollstümtlich dar: das Wissen vom Ursprung des Menschen, die Entwicklungsgeschichte des Idrengens, die fünstlerische Betrachtung der Proportionen des menschlichen Korpers und die freng wissenschaftlichen Mehmethoden (Schädelmessung uf.), behandelt ferner die Menschen rassen, die rassensachung uf.), behandelt ferner die Menschen.

Bau und Tätigfeit des menschlichen Körpers. Don Privatdogent Dr. H. Sachs. 2. Auflage. Mit 37 Abbilbungen. (Mr. 32.)

Stellt eine Reihe ichematifcher Abbilbungen bar, erläutert die Einrichtung und die Catigleit Stellt eine neine sogenatigmer erobuoungen var, erlautert vie Einstigung und die Lautyset-der einzelnen Organe des Körpers und zeigt dabei vor allem, wie diese einzelnen Organe in ihrer Tätigfeit aufeinander einwirken, miteinander zusammenhängen und so den mensch-lichen Körper zu einem einheitlichen Ganzen, zu einem wohlgeordneten Staate machen.

Die Seele des Menfchen. Don Prof. Dr. J. Rehmte. 2. Aufl. (Nr. 36.) Behandelt, von der Catsache ausgehend, daß der Mensch eine Seele habe, die ebenso gewiß sei wie die andere, daß der Körper eine Gestalt habe, das Seelenwesen und das Seelenkeben und erörtert, unter Abwehr der materialistischen und halbmaterialistischen Anschaumgen, von dem Standpunkt aus, daß die Seele Untörperliches Immaterielles sei, nicht etwa eine Bestimmtheit des menichlichen Einzelwesens, auch nicht eine Wirkung oder eine "Sunktion" des Gebeitens Absenden Antickeitenschaumgen des als Sale Kraunten Gehirns, die verschiedenen Tätigteitsäuferungen des als Seele Erfannten.

Die fünf Sinne des Menschen. Don Prosessor Dr. Jos. Clem. Kreibig. Mit 30 Abbildungen im Text. 2. Auflage. (Nr. 27.)
Beantwortet die Fragen über die Bedeutung, Anzahl, Benennung und Ceistungen der Sinne mirtenden außeren Weise, indem das Organ und seine Juntitionsweise, dann die als Reiz Merkmal der Empfindungen heinrachen werden. Merfmal der Empfindungen besprochen werden.

Jedes Bandden geheftet 1 Mf., geschmadvoll gebunden 1 Mf. 25 Pfg.

Menich und Erde. Menich und Erde. Sfiggen von den Wechfelbeziehungen zwifden beiben. Don Prof. Dr. A. Kirchhoff. 2. Aufl. (Mr. 31.) Seigt, wie die Landernatur auf den Menschen und seine Kultur einwirkt, durch Schilderungen allgemeiner und besonderer Art, über Steppen und Wiltenwöller, über die Entstehung von Mationen, wie Deutschland und China u. a. m.

- und Cier. Der Kampf zwischen Mensch und Cier. Don Professor

Dr. Karl Ecffein. Mit 31 Abbildungen im Text. (Ur. 18.)
Der hohe wirtschaftliche Bedeutung beauspruchende Kampf erfährt eine eingehende, ebenso 
nieteressante wie lehrreiche Darziellung; besonders werden die Kampfmittel beider Gegner 
geschildert: Schuswassisch, Sallen, Giffe, oder auch besondere Wirtschaftsmethoden, dort spissige 
kralse, scharfer Jahn, surchtbares Gist, List und Gewandtheit, der Schussärbung und Anpassungsfähigkeit nicht zu vergessen.

Menichenleben. Aufgaben und Biele des Menschenlebens. Don Dr.

3. Unold. 2. Auflage. (Mr. 12.)

3. Unoto. 2. etustuge. (ttt. 12.) Beantwortet die Frage: Cibt es keine bindenden Regeln des menschlichen handelns? in zu-versichtlich bejahender, zugleich wohl begründeter Weise und entwirft die Grundzüge einer wissenschaftlich haltbaren und für eine nationale Erziehung brauchbaren Lebensanschauung

Metalle. Die Metalle. Von Professor Dr. K. Scheid. Mit 16 Abb. (Nr. 29.) Behandelt die für Kulturleben und Industrie wichtigen Metalle, schildert die mutmaßliche Bildung der Erze, die Gewinnung der Metalle aus den Erzen, das hüttenwesen mit seinen verschiedenen Systemen, die Jundorte der Metalle, thre Eigenschaften und Derwendung, unter Angabe historischer, fulturgeschichtlicher und statistischer Daten, jowie die Derarbeitung der Metalle.

#### Meteorologie f. Wetter.

Mitroftop (f. a. Optik; Tierwelt). Das Mikroftop, seine Optik, Geschichte und Anwendung, gemeinverständlich dargeftellt. Don Dr. W. Scheffer. Mit

66 Abbildungen im Tert und einer Tafel. (Nr. 35.) Nach Erläuterung der optischen Konstruktion und Wirkung des Mikrostops, und Darstellung per historischen Entwicklung wird eine Beschreibung der modernsten Mikrostoptypen, hilfs-apparate und Instrumente gegeben, endlich gezeigt, wie die mikrostopische Untersuchung die Einsicht in Naturvorgänge vertieft.

Molefüle. Molefüle - Atome - Weltäther. Don Professor Dr. G. Mie.

2. Auflage. Mit 27 Siguren im Tert. (Nr. 58.) iellt die phylitalische Atomlehre als die kurze, logische Iusammenfassung einer großen llenge physikalischer Tatsachen unter einem Begriffe dar, die aussührlich und nach Möglicheit als einzelne Experimente geschildert werden.

nond (s. a. Weltall). Der Mond. Don Professor Dr. J. Franz. Mit

1 Abbildungen im Text und auf 2 Doppeltafeln. (Mr. 90.)

sibt die Ergebnisse der neueren Mondforschung wieder, erörtert die Mondbewegung und Mond-ahn, bespricht den Einfluß des Mondes auf die Erde und behandelt die Fragen der Gber-ächenbedingungen des Mondes und die carafteristischen Mondgebilde anschaulich zusammenefaßt in "Beobachtungen eines Mondbewohners", endlich die Bewohnbarkeit des Mondes.

#### Nozart f. Musik.

Rünze. Die Münze als historisches Denkmal sowie ihre Bedeutung im echts- und Wirtschaftsleben. Don Dr. A. Lufdin v. Ebengreuth. Mit

3 Abbildungen im Text. (Mr. 91.)

gigt, wie Mungen als geschichtliche Überbleibsel der Vergangenheit zur Aufhellung der wirtagi, der Auftande und der Rechtseinrichtungen früherer Zeiten dienen, die verschiedenen eten von Mingen, ihre äußeren und inneren Merkmale sowie ihre Herstellung werden in itorischer Entwicklung dargelegt und im Anschuß daran Münzsammlern beherzigenswerte

Jedes Bandden geheftet 1 Mt., gefdmadvoll gebunden 1 Mt. 25 Pfg.

Mufit. Einführung in das Wefen der Mufit. Don Professor C. R. Hennig.

Die hier gegebene Afthetit der Contunit untersucht das Wefen des Cones als eines Kunft-Die gier gegebene eistgert der Contunst untersucht das toesen des Cones als eines kausternals; sie prüft die Natur der Darstellungsmittel und untersucht die Obseite der Darstellung, indem sie karlegt, welche Ideen im musikalischen Kunstwerke gemäß der Natur des Tommateriales und der Darstellungsmittel in idealer Gestaltung zur Darstellung gebracht

- Geschichte der Musit. Don Dr. Friedrich Spiro. (Mr. 143.)

Gibt in großen Jugen eine übersichtliche außerst lebendig gehaltene Darsiellung von der Entwicklung der Musik vom Altertum bis zur Gegenwart mit besonderer Berücksichtigung der führenden Persönlichselten und der großen Strömungen und unter strenger Ausscheidung alles dessen, was für die Entwicklung der Musik ohne Bedeutung war.

- Banon, Mogart, Beethoven. Mit vier Biloniffen auf Tafelr. Don Professor Dr. C. Krebs. (Mr. 92.)

Eine Darstellung des Entwicklungsganges und der Bedeutung eines seden der dre' großen komponisten für die Musikgeschichte. Sie gibt mit wenigen, aber scharfen Stricken ein Bild der menichtlichen Personlichkeit und des fünstlertschen Wesens der drei Kercen mit Hervordsbung dessen, was ein seder aus seiner Jeit geschöpft und was er aus eignem hinzugebracht hat.

Muttersprache. Entstehung und Entwicklung unserer Mutterspraches Don Professor Dr. Wilhelm Uhl. Mit vielen Abbildungen im Text und auf Tafeln, sowie mit 1 Karte. (Nr. 84.)

Eine Jusammenfassung der Ergebnisse der sprachlich-wissenschaftlich lautphysiologischen wie der philologisch-germanistischen Sorichung, die Ursprung und Organ, Bau und Bildung, andererfetts die Hauptperioden der Entwidlung unferer Mutterfprace gur Darftellung bringt.

Minthologie f. Germanen.

Nahrungsmittel f. Alfoholismus; Chemie; Ernährung; Haushalt; Kaffee.

Mationalotonomie f. Arbeiterschut; Bevölferungslehre; Soziale Bewegungen; Frauenbewegung; Schiffahrt; Welthandel; Wirtschaftsleben.

Maturlehre. Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. Don Professor. Selig Auerbach. 2. Auflage. Mit 79 Siguren im Text. (Nr. 40.) Eine gusammenhangende, für jeden Gebildeten verständliche Entwidlung der in der modernen und Masse und die allgemeine und exafte Rolle spiesenden Begriffe Raum und Bewegung, Kraft und Masse und die allgemeinen Eigenschaften der Materie, Arbeit, Energie und Entropie.

Maturwissenschaften f. Abstammungslehre; Ameisen; Aftronomie; Befruchtungsvorgang; Chemie; Erde; haushalt; Licht; Meeresforfdung; Menich; Moletule; Naturlehre; Obitbau; Pflangen; Plantton; Religion; Strahlen; Tierleben; Wald; Weltall: Wetter.

Merveninstem. Dom Nervensustem, seinem Bau und seiner Bedeutung für Leib und Seele im gefunden und franken Suftande. Don Profesfor Dr. R. Jander. Mit 27 Siguren im Text. (Nr. 48.)

Erörtert die Bedeutung der nervojen Dorgange für den Korper, die Geistestätigfeit und das Seelenleben und sucht Harzulegen, unter welchen Bedingungen Störungen der nervojen Dorgänge auftreten, wie sie zu beseitigen und zu vermeiden find.

Jedes Bandchen geheftet 1 Mt., geschmackvoll gebunden 1 Mf. 25 Pfg.

Obitbau. Der Obitbau. Don Dr. Ernft Doges. Mit 13 Abbildungen im Text. (Mr. 107.)

Will über die wissenschaftlichen und technischen Grundlagen des Obstbaues, sowie seine Naturgeschichte und große vollswirtschaftliche Bedeutung unterrichten. Die Geschichte des Obstbaues, das Leben des Obstbaumes, Obstbaumpslege und Obstbaumschaft, die wissenschaftliche Obstbaues gelangen zur Behandlung.

Optif (f. a. Mifrostop; Stereostop). Die optischen Instrumente. Don Dr. M. von Rohr. Mit 84 Abbilbungen im Tert. (Mr. 88.)

Gibt eine elementare Darstellung der optischen Instrumente nach modernen Anschauungen, wobei weder das Ultramitrostop noch die neuen Apparate zur Mitrophotographie mit ultrautolettem Licht (Monochromate), weder die Prismens noch die Siessenrochre, weder die Projektionsapparate noch die stereostopischen Entsernungsmessen und der Stereoste

Ostasien f. Kunft.

**Pädagogit** (s. a. Bildungswesen; Erziehung; Fröbel; Herbart; Hilfsschulswesen; Jugendfürsorge; Knabenhandarbeit; Mädchenschule; Schulwesen). Allgemeine Pädagogik. Don Prosessor Dr. Th. Ziegler. 2. Aufl. (Nr. 33.) Behandelt die großen Fragen der Volkserziehung in praktischer, allgemeinverständlicher Weise und in sittliche sallem Geiste. Die Iwede und Motive der Erziehung, das Erziehungsgeschäft selbst, dessen Organisation werden erörtert, die verschiedenen Schulgattungen dargestellt.

**Palästina.** Palästina und seine Geschichte. Sechs Dorträge von Professor. H. Freiherr von Soden. 2. Auslage. Mit 2 Karten und 1 Plan von Jerufalem und 6 Anfichten des Beiligen Candes. (Mr. 6.)

Ein Bild, nicht nur des Candes selbst, sondern auch alles dessen, was aus ihm hervor- oder über es hingegangen ist im Cause der Jahrhunderte — ein wechselvolles, sarbenreiches Bild, in dessen Derlauf die Patriarchen Israels und die Kreuzsahrer, David und Christus, die alten Kisprer und die Scharen Mohammeds einander ablösen.

Patentrecht f. Gewerbe.

Pflanzen (s.a. Obstbau; Plantton; Tierleben). Unsere wichtigften Kulturpflangen. (Die Getreibegräfer.) Sechs Dortrage aus ber Pflangenfunde. Don Professor Dr. K. Giesenhagen. Mit 38 Siguren im Text. 2. Auflage. (Mr. 10.)

Behandelt die Getreidepflanzen und ihren Anbau nach botanischen wie kulturgeschichtlichen Geichtspuntten, damit zugleich in anschaulichster Sorm allgemeine botanische Kenntnisse vermittelnd.

Dermehrung und Segualität bei ben Pflangen. Don Privatdozent Dr. Ernst Küster. Mit 38 Abbildungen im Text. (Nr. 112.)

hibt eine furze Übersicht über die wichtigften Formen der vegetativen Vermehrung und velfährigt sich eingehend mit der Serualität der Pflanzen, deren überraschend vielfache und nannigsaltige Außerungen, ihre große Verbreitung im Pflanzenreich und ihre in allen Einzelheiten erfennbare Übereinstimmung mit der Sexualität der Liere zur Varstellung gelangen.

ohilosophie (s. a. Buddha; Herbart; Kant; Menschenleben; Schopenhauer; Deltanschauung; Weltproblem). Die Philosophie der Gegenwart in Deutschand. Eine Charafteriftif ihrer hauptrichtungen. Don Professor Dr. O. Kulpe. Auflage. (Mr. 41.)

hildert die vier Hauptrichtungen der deutschen Philosophie der Gegenwart, den Positivis-nus, Materialismus, Naturalismus und Idealismus, nicht nur im allgemeinen, sondern auch urch eingehendere Würdigung einzelner inpischer Vertreter wie Mach und Dühring, Haecel, iehsche, Sechner, Lohe, v. Hartmann und Wundt.

Jedes Bandden geheftet 1 Mt., gefdmadvoll gebunden 1 Mt. 25 Pfg.

Philosophie. Einführung in die Philosophie. Sechs Vorträge von Professor Raoul Richter. (Nr. 155.)

Bietet eine gemeinverständliche Darstellung der philosophischen hauptprobleme und der Richtung ihrer Sölung, insbesondere des Erfenntnisproblems und nimmt dabet zu den Stand-punkten des Materialismus, Spiritualismus, Theismus und Pantheismus Stellung, um zum Schluss die religions und moralphilosophischen Fragen zu beleuchten.

Physik f. Licht; Mifroftop; Molekule; Naturlehre; Optit; Strahlen.

Plantton. Das Sugwasser-Plantton. Einführung in die freischwebende Organismenwelt unferer Teiche, Sluffe und Seebeden. Don Dr. Otto

Jacharias. Mit 49 Abbilbungen. (Mr. 156.)

Gibt eine Anleitung zur Kenntnis der interessantellen Planktonorganismen, sener mitro-flopisch kleinen und für die Erstenz der höheren Lebewesen und für die Naturgeschichte der Gewässer in wichtigen Teven und Pflanzen. Die wichtigsten Formen werden vorgesichte und die merkwürdigen Lebensverhaltnisse und sbedingungen dieser unsichtbaren Welt einsach und boch vielseitig erörtert.

Polarforschung. Die Polarforschung. Geschichte der Entdedungsreisen zum Nords und Südpol von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart. Don Drofessor Dr. Kurt haffert. Mit 6 Karten auf 2 Tafeln. (Ir. 38.)

Das in der neuen Auflage bis auf die Gegenwart fortgeführte und im einzelnen nicht unerheblich umgestaltete Buch faßt in gedrängtem Überblid die Hauptergebnisse der Nordund Südvolarsorichung zusammen. Nach gemeinverständlicher Erörterung der Tiele arktischer und antarktischer Forschung werden die Polarressen selbst von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart geschildert unter besonderer Berücksichtigung der topographischen Ergebnisse.

Dompeji, eine helleniftische Stadt in Italien. Don hofrat Professor Dr.

fr. v. Duhn. Mit 62 Abbildungen. (Mr. 114.)

Sucht, durch zahlreiche Abbildungen unterfüligt, an dem besonders greifbaren Beispiel Pompesis die Übertragung der griechsichen Kulfur und Kunst nach Italien, ihr Werden zur Welffulfur und Wussen der Entwicklung Pompesis, tunwe Welfkunst verständlich zu machen, wobei die Hauptphasen der Entwicklung Pompesis, immer im hindlick auf die gestadtende Bedeutung, die gerade der hellenisus sur die Aussellung der Stadt, ihrer Lebens- und Kunstformen gehabt hat, zur Darstellung gelangen.

Poft. Das Postwesen, seine Entwidelung und Bedeutung. Don Postrat

J. Bruns. (Mr. 165.) Shilbert immer unter besonderer Berüchsichtigung der geschichtlichen Entwickung die Post a.s Staatsverfehrsanitalt, ihre Organisation und ihren Wirkungstreis, das Carifs und Ge-bührenwesen, die Besorderungsmittel, den Betriebsdienst, den Weltpostverein, sowie die deutsche Post im In- und Ausland.

Dinchologie f. Menich; Nerveninstem; Seele.

Recht (f. a. Gewerbe). Moderne Rechtsprobleme. Don Professor Josef.

Kohler. (Mr. 128.)

Behandelt nach einem einleitenden Abidnitte über Rechtsphilosophie die michtigften und interesantesten Probleme der modernen Rechtsprüfung, insbesondere die des Strafrechts, des Strasprozesses, des Genossenschaftsrechts, des Ivilprozesses und des Völkerrechtes.

Religion (f. a. Buddha; Chriftentum; Germanen; Jefuiten; Jefus; Luther). Die Grundzuge ber israelitischen Religionsgeschichte. Don Professor Dr. Sr. Giefebrecht. (Mr. 52.)

Schilbert, wie Israels Religion entsteht, wie fie die nationale Schale fprengt, um in ben Propheten die Anfage einer Menschheitsreligion auszubilden, wie auch dieje neue Religion

fich verpuppt in die formen eines Priefterstaats.

Jedes Bandden geheftet 1 Mf., gefchmadvoll gebunden 1 Mf. 25 Pfg.

Religion. Religion und Naturwiffenschaft in Kampf und Frieden. Ein geschichtlicher Rüchlick von Dr. A. Pfanntuche. (Ur. 141.)

Will durch geschichtliche Darstellung der Beziehungen beider Gebiete eine vorurteilsfreie Beurteilung des heiß umstrittenen Problems ermöglichen. Ausgehend von der ursprünglichen Einheit von Religion und Naturersennen in den Naturresigionen schildert der Versasser das Entstehen der Naturwissenschaft in Griechendand und der Religion in Israel, um dann zu zeigen, wie aus der Verschwisterung beider jene ergreisenden Konflitte erwachsen, die sich besonders an die Namen von Kopernitus und Darwin knüpsen.

Die religiösen Strömungen der Gegenwart. Von Superintendent D. A. H. Braafch. (Nr. 66.)

Will die gegenwärtige religiöse Lage nach ihren bedeutsamen Setten hin darlegen und ihr geschicktliches Derständnis vermitteln; die markanten Persönlichkeiten und Richtungen, die durch wissenschaftliche und wirtschaftliche Entwicklung gestellten Probleme, wie die Ergebnisse der Forschung, der Ultramontanismus wie die cristliche Lebestätigkeit gelangen zur Behandlung.

Rembrandt. Von Professor Dr. Paul Schubring. Mit einem Titelbild und 49 Textabbildungen. (Nr. 158.)

Eine durch zahlreiche Abbildungen unterstützte lebensvolle Schilderung des menschlichen und fünstlerungen Entwicklungsganges Rembrandts. Jur Darstellung gelangen so seine persönstenen Schlösle bis 1642, die Frühzeit, die Zeit bis zu Sassias Tode, die Nachtwache, Rembrandts Derhältnis zur Bibel, die Radierungen, Urkundliches über die Zeit nach 1642 die Periode des farbigen helldunkels, die Gemälde nach der Nachtwache und die Spätzeit. Beigesügt sind die beiden ältesten Biographien Rembrandts.

Rom. Die ständischen und sozialen Kämpfe in der römischen Republit. Don Privatdozent Dr. Ceo Bloch. (Ur. 22.)

Behandelt die Sozialgeschichte Roms, soweit sie mit Kücksicht auf die die Gegenwart bewegenden Fragen von allgemeinem Interesse it. Insbesondere gelangen die durch die Großmachifellung Roms bedingte Entstehung neuer sozialer Unterschiede, die Herrschaft des Amtsadels und des Kapitals, auf der anderen Sette eines großstädtischen Prosetariats zur Darstellung, die ein Ausblic auf die Lösung der Parteikämpse durch die Monarchie beschließt.

Säugling. Der Säugling, seine Ernährung und seine Pflege. Von Dr. Walther Kaupe. Mit 17 Textabbildungen. (Nr. 154.)

will der jungen Mutter oder Pflegerin in allen Fragen, mit denen sie sich im Interesse des kleinen Erdenbürgers beschäftigen müssen, den nötigen Rat erteilen. Außer der allgemeinen gelitigen und lörperlichen Pflege des Kindchens wird besonders die natürliche und künfiliche Ernährung behandelt und für alle diese Sälle zugleich praktische Anleitung gegeben.

Schiffahrt. Deutsche Schiffahrt und Schiffahrtspolitik der Gegenwart. Don Professor Dr. K. Thieß. (Nr. 169.)

Derfasser will welteren Kreisen eine genaue Kenntnis unserer Schiffahrt erschließen, indem er in leicht faßlicher und doch erschöpfender Darstellung einen allgemeinen Überblick über as gesamte deutsche Schiffswesen gibt mit besonderer Berücksichtigung seiner geschichtlichen entwicklung und seiner großen volkswirtschaftlichen Bedeutung.

öchtller. Don Professor Dr. Th. Ziegler. Mit dem Bildnis Schillers on Kügelgen in Heliogravüre. (Ur. 74.)

sedacht als eine Einführung in das Derständnts von Schillers Werdegang und Werfen, ehandelt das Büchlein vor allem die Dramen Schillers und sein Leben, ebenso aber auch nzelne seiner Inrischen Gedichte und die historischen und die philosophischen Studien als ein ichtiges Glied in der Kette seiner Entwicklung.

19

Jedes Bandchen geheftet 1 Mt., geschmadvoll gebunden 1 Mt. 25 Pfg.

Schopenhauer. Seine Perfonlichfeit, seine Lehre, seine Bedeutung. Sechs Dortrage von Oberlehrer f. Richert. Mit dem Bilonis Schopen-

hauers. (Ur. 81.) Unterrichtet über Schopenhauer in seinem Werden, seinen Werten und seinem Fortwirten, in seiner historischen Bedingtheit und seiner bleibenden Bedeutung, indem es eine gestellte Einführung in die Schriften Schopenhauers und zugleich einen zusammenfassenen Überblid über das Ganze seines philosophischen Spitems gibt.

Schriftwefen. Schrift- und Buchwefen in alter und neuer Zeit. Don Professor Dr. O. Weise. 2. Auflage. Mit 37 Abbildungen. (Mr. 4.) Derfolgt durch mehr als vier Jahrtaujende Schrift. Brief- und Zeitungsweien, Buchbandel und Bibliothefen.

Schulhngiene. Don Privatdogent Dr. Ceo Burgerstein. Mit einem

Bilonis und 33 Siguren im Tert. (Mr. 96.)

Bietet eine auf den Sorichungen und Erfahrungen in den verichiedenften Kulturlandern berubende Darstellung, die ebenso die Hygiene des Unterrichts und Schullebens wie jene des Haules, die im Jusammenhang mit der Schule stehenden modernen materiellen Wohlsabriseinstichtungen, endlich die hygienische Unterweisung der Jugend, die Hygiene des Cehrers und die Schularzifrage behandelt.

Schulwesen (s. a. Bildungswesen; Fröbel; hilfsschulwesen; Mädchenschule; Pädagogik). Geschichte des deutschen Schulwesens. Don Oberrealschuldirektor

Dr. K. Knabe. (Mr. 85.)

Stellt die Entwidlung des deutschen Schulmejens in feinen hauptperioden dar und bringt jo Anfange des deutschen Schulwesens, Scholaftif, humanismus, Reformation, Gegenreformation, neue Bildungsziele, Pietismus, Philanthropismus, Aufilärung, Neuhumanismus, Prinzip der allseitigen Ausbildung vermittels einer Anstalt, Teilung der Arbeit und den nationalen humanismus der Gegenwart gur Darftellung.

Schulfämpfe der Gegenwart. Dortrage gum Kampf um die Dolfsichule in Preugen, gehalten in der humboldt-Atademie in Berlin. Don J. Tems. (Nr. 111.)

Knapp und doch umfassend stellt der Derfasser die Probleme dar, um die es sich bet der Reorganisation der Volkssaule handelt, deren Stellung zu Staat und Kirche, deren Abhängigtett von Seitgeist und Seitbedursnissen, deren Wichtigkeit für die herausgestaltung einer volksfreundlichen Gesantkultur icharf beleuchtet werden.

— Dolksschule und Lehrerbildung der Vereinigten Staaten in ihren hervortretenden Zügen. Reiseindrude. Don Direktor Dr. Franz Kunpers. Mit 48 Abbildungen im Text und einem Titelbild. (Nr. 150.)

Schildert anschausig im Erzie und Kindergarten bis zur hochschule, überall das Wesentliche der amerikanischen Erziehungsweise solie stete Erziehung zum Leben, das Weden des Bekätigungstriebes, das sindrängen auf practische Derwertung usw.) hervoerhebend und unter dem Geschaptungen der untere deutentlassen zugend in den Fortbildungsschulen zum Vergleich mit der heimischen Unterrichtsweise anregend.

Seetriea f. Krieaswesen.

Seele f. Menich.

Sinnesleben f. Menfch.

Soziale Bewegungen (f. a. Arbeiterschut; Frauenbewegung). Soziale Bewegungen und Theorien bis gur modernen Arbeiterbewegung. Don Professor Dr. G. Maier. 3. Auflage. (Mr. 2.)

In einer geschichtlichen Betrachtung, die mit ben altorientalifden Kulturvölfern beginnt, werden an den zwei großen wirticaftlichen Schriften Platos die Wirticaft ber Griechen, Jedes Bandden geheftet 1 Mt., gefdmadvoll gebunden 1 Mt. 25 Pfg.

an der Gracchischen Bewegung die der Römer beleuchtet, ferner die Utopie des Chomas Morus, andererseits der Bauernfrieg behandelt, die Bestrebungen Colberts und das Merkantispitem, die Physiotraten und die ersten wissenschaftlichen Staatswirtschaftslehrer gewürdigt und über die Entistehung des Sozialismus und die Ausänge der neueren Handelse, Joll- und Derkehrspolitik ausgeklärt.

Spiele f. Mathematik.

Sprache f. Muttersprache; Stimme.

Städtewesen. Die Städte. Geographisch betrachtet. Don Professor Dr. Kurt haffert. Mit 21 Abbildungen. (Nr. 163.)

Behandelt als Derjuch einer allgemeinen Geographie der Städte einen der wichtigsten Abichnitte der Siedlungstunde, erörtert die Ursache des Entstehens, Wachsens und Dergehens der Städte, charatterisiert ihre landwirtschaftliche und Derkehrs-Bedeutung als Grundlage der Großstadtbildung und schildert das Städtebild als geographische Erscheinung

Deutsche Städte und Bürger im Mittelalter. Don Oberlehrer Dr. B. Heil. 2. Auflage. Mit zahlreichen Abbildungen im Text und auf 1 Doppeltafel. (Nr. 43.)

Stellt die geschichtliche Entwicklung dar, schildert die wirtschaftlichen, sozialen und staatsrechtlichen Verhältnisse und gibt ein zusammenfassendes Bild von der äußeren Erscheinung und dem inneren Leben der deutschen Städte.

— historische Städtebilder aus holland und Niederdeutschland. Vorträge gehalten bei der Oberschulbehörde in hamburg. Von Regierungs-Baumeister Albert Erbe. Mit 59 Abbildungen. (Nr. 117.)

will dem als Jeichen wachsenden Kunstverständnisse zu begrüßenden Sinn für die Reize der alten malerischen Städebilder durch eine mit Abbildungen reich unterstützte Schilderung der de eigenartigen und vielsachen Herrlichtett Alt-Hollands wie Usedredeutschlands, serner Danzigs, Lübecks, Bremens und hamburgs nicht nur vom rein fünstlerischen, sondern auch vom kulturgeschicklichen Standpunkt aus entgegenkommen.

Sucht ein anschauliches Bild zu entwersen von dem Aussehen einer altgriechischen Stadt und von dem städtischen Leben in ihr, auf Grund der Ausgrabungen und der inscriftlichen Dentmäler; die altgriechischen Bergstädte Thera, Pergamon, Priene, Milet, der Tempel von Didyma werden geschildert. Stadtpläne und Abbildungen suchen die einzelnen Städtebilder zu erläutern.

Stereoftop (s. a. Optif). Das Stereoffop und seine Anwendungen. Von Prosessor Th. Hartwig. Mit 40 Abbildungen im Text und 19 stereostopischen Taseln. (Nr. 135.)

Behandelt die verschiedenen Erscheinungen und praktischen Anwendungen der Stereostopie, insbesondere die stereostopischen himmelsphotographien, die stereostopische Darstellung mitrostopischer Objekte, das Stereostop als Mehimstrument und die Bedeutung und Anwendung des Stereosomparators, insbesondere in bezug auf photogrammetrische Messungen. Beigegeben sind 19 stereostopische Tafeln.

Stimme, die menichliche, und ihre fingiene. Sieben volkstümliche Dorlefungen. Don Professor Dr. P. Gerber. Mit 20 Abbildungen. (Nr. 136.)

Nach den notwendigsten Erörterungen über das Zustandesommen und über die Natur der Töne wird der Kehltopf des Menschen, sein Bau, seine Derrichtungen und seine Junktion als musikalisches Instrument behandelt; dann werden die Gesange und die Hengelitumne, sies Ausbildung, ihre Sehler und Erkrankungen, sowie deren Derhütung und Behandlung, insbesondere Erkältungstrankseiten, die professionelle Stimmschwäche, der Alkoholeinslug und die Abhärtung erörtert. Jedes Bändchen geheftet 1 Mf., geschmackvoll gebunden 1 Mf. 25 Pfg.

Strahlen (f. a. Licht). Sichtbare und unfichtbare Strahlen. Don Professor Dr. R. Börnftein und Professor Dr. W. Mardwald. Mit 82 Abb. (Mr. 64.) Schildert die verschiedenen Arten der Strahlen, barunter die Kathoden- und Röntgenstrahlen, die Hertsichen Wellen, die Strahlungen der radioaftiven Körper (Uran und Radium) nach ihrer Entstehung und Wirtungsweise, unter Darstellung der charafteristischen Vorgänge der Strahlung.

#### Sügwasser=Plantton s. Plantton.

Technit (f. a. Automobil; Beleuchtungsarten; Dampf; Eisenbahnen; Eisenhuttenwesen; Eleftrotechnit; Suntentelegraphie; Ingenieurtechnit; Metalle: Mitroftop; Poft; Rechtsschung; Stereoftop; Wärmetraftmaschinen). Am sausenden Webstuhl der Zeit. Übersicht über die Wirkungen der Entwidlung der Naturwissenschaften und der Tednit auf das gesamte Kulturleben. Don Geh. Regierungsrat Professor Dr. W. Caunhardt. 2. Auf-Mit 16 Abbildungen im Tert und auf 5 Tafeln. (Mr. 23.) Ein geiftreicher Rudblid auf die Entwidlung der Naturwillenichaften und der Technit, der

die Weltwunder unferer Jeit verdantt merden.

Tee f. Kaffee.

#### Telegraphie f. Suntentelegraphie.

Theater (f. a. Drama). Das Theater. Sein Wefen, seine Geschichte, seine Meifter. Don Professor Dr. K. Borinsfi. Mit 8 Biloniffen. (Mr. 11.) Begreift das Drama als ein Selbstgericht des Menschentums und charafterisiert die größten Dramatiter der Weltstieratur bei aller Knappheit liebevoll und geistvoll, wobet es die dramatischen Meister der Völker und Zeiten tunlichst selber lätzt.

Theologie f. Bibel; Chriftentum; Jefus; Paläftina; Religion.

Tierleben (f. a. Ameise; Mensch und Tier; Plankton). Die Beziehungen der Tiere gueinander und gur Pflangenwelt. Don Profesor Dr. K. Kraepelin. (Mr. 79.)

Stellt in großen Zugen eine Sulle wechselseitiger Begiehungen der Organismen queinander bar. Samilienleben und Staatenbildung der Tiere, wie die interessanten Beziehungen der Tiere und Dflangen gueinander werben geschilbert.

- Tierfunde. Eine Einführung in die Joologie. Don Privatdogent Dr. Kurt hennings. Mit 34 Abbildungen. (Mr. 142.)

Will die Einheitlichkeit des gefannten Tierreiches zum Ausdruck bringen, Bewegung und Empfindung, Stoffwechsel und Fortpslanzung als die charakteristerenden Etgenschaften aller Tiere darstellen und sodann die Tätigteit des Tierleibes aus seinem Bau verständlich machen, woder Schwerpuntt der Darstellung auf die Tebensweise der Tiere gelegt ist. So werden nach einem Dergleich der bereichte der Korpers behandelt, sodann ein Uberdisch über die sie sie sein Uberdisch über die sie sie nach einem Dergleich über die sie sie nach kreise des Tierreiches gegeben, serner Bewegung und Bewegungsorgane, Aufenthaltsort, Bewußtieln und Empfindung, Nervenspstem und Sinnesorgane, Stoffwechsel, Fortpslanzung und Entwicklung erörtert.

- 3wiegeftalt der Gefchlechter in der Tierwelt (Dimorphismus). Don Dr. Friedrich Knauer. Mit 37 Abbildungen. (Mr. 148.)

Zeigt, von der ungeschlechtlichen Sortpflanzung gahlreicher niederster Tiere ausgehend, wie sich aus diesem hermaphroditismus allmählich die Zweigeschlechtigteit herausgebildet hat und lich die verschiedenen Tierarten zu auffälligitem geschlechtlichem Dimorphismus entwicklich in interessanten hollen die verschieden Auflichen der Männigen und Weibigmus, wobei vielsach die Brutpflege in der Tierwelt und das Verhalten der Männigen zu derselben erörtert wird

Jedes Bandden geheftet 1 Mf., gefchmadvoll gebunden 1 Mf. 25 Pfg.

Tierleben. Die Tierwelt des Mitrostops (die Urtiere). Don Privatdogent Dr. Richard Goldschmidt. Mit 39 Abbildungen. (Mr. 160.)

Bietet nach dem Grundsatz, daß die Kenntnis des Einfachen grundlegend zum Derständnis des Komplizierten ist, eine einführende Darstellung des Lebens und des Baues der Urtiere, dieses mitroftopiid Heinen, formenreichen, unendlich gahlreichen Geichlechtes der Cierwelt und ftellt maiot nur eine anregende und durch Abbildungen instruktive Lektüre dar, sondern vermag namentlich auch zu eigener Beobachtung der wichtigen und interessanten Catsachen vom Bau und aus dem Ceben der Urtiere anguregen,

\_\_\_\_ Cebensbedingungen und Derbreitung der Tiere. Don Profesfor Dr. Otto Maas. Mit Karten und Abbildungen. (Mr. 139.)

Cehrt das Derhaltnis der Cierwelt zur Gesamtheit des Lebens auf der Erde verständnisvoll ahnen, zeigt die Tierwelt als einen Teil des organischen Erdgangen, die Abhangigfeit der Derbreitung des Tieres nicht nur vor dessen Lebensbedingungen, sondern auch von der Erdgeschichte, ferner von Nahrung, Temperatur, Licht, Luft, Seuchtigkeit und Degetation, wie von dem Eingreifen des Menschen und betrachtet als Ergebnis an der hand von Karten die geographische Einteilung der Tierwelt auf der Erde nach besonderen Gebieten.

Tubertuloje. Die Tuberfuloje, ihr Wefen, ihre Derbreitung, Urfache, Derhütung und heilung. Sür die Gebildeten aller Stände gemeinfahlich dargeftellt von Oberstadsarzt Dr. W. Schumburg. Mit 1 Tafel und 8 Siguren im Text.

Schildert nach einem Überblid über die Derbreitung der Tuberfuloje das Wejen berfelben, beschäftigt sich eingehend mit dem Tuberkelbazillus, bespricht die Maßnahmen, durch die man ihn von sich fernhalten kann, und erörtert die Fragen der heilung der Tuberkulose, vor allem die hygienisch-diatetische Behandlung in Sanatorien und Lungenheilstätten.

Turnen f. Leibesübungen.

Verfassung (f. a. Fürstentum). Grundzüge der Verfassung des Deutschen Reiches. Sechs Dortrage von Professor Dr. E. Coening. 2. Aufl. (Mr. 34.)

Beablichtigt in gemeinverständlicher Sprache in das Derfassungsrecht des Deutschen Reiches einzuführen, soweit dies für seden Deutschen erforderlich ist, und durch Ausweisung des Su-lammenhanges sowie durch geschichtliche Rückblicke und Dergleiche den richtigen Standpunkt für das Derständnis des geltenden Rechtes zu gewinnen.

Verfehrsentwicklung (j. a. Automobil; Eisenbahnen; Funkentelegraphie, Poft; Technit). Verfehrsentwicklung in Deutschland. 1800—1900. Vorträge über Deutschlands Eisenbahnen und Binnenwasserstraßen, ihre Entwicklung und Derwaltung, sowie ihre Bedeutung für die heutige Dolkswirtschaft von Drofessor Dr. W. Con. 2. Auflage. (Mr. 15.)

Gibt nach einer furzen Übersicht über die Hauptfortschritte in den Verkehrsmitteln und deren ober mag einer angen der eine Geschächte des Eisenbahnwesens, schilden den vor der der eine Geschäftliche Wirkungen eine Geschächte des Eisenbahnwesens, schilden den der der eine der Eisenbahnwestassung, des Gitters und das Personentarssweigen, die Keformversiche und die Reformfrage, ferner die Bedeutung der Binnenwasserstaßen und endlich die Wirkungen der

Dersicherung (s. a. Arbeiterschutz). Grundzüge des Versicherungswesens. Don Professor Dr. A. Manes. (Nr. 105.)

Behandelt sowohl die Stellung der Versicherung im Wirtschaftsleben, die Entwicklung der Verseganoet stoots die Steiling der Verlanerung im Wirsichaftsleben, die Entwicklung der Verscherung, die Organisation ihrer Unternehmungssormen, den Geschäftsgang eines Versicherungssetriebs, die Versicherungspositif, das Dersicherungsvertragsrecht und die Versicherungswissenhaft, als die einzelnen Zweige der Versicherung, wie Lebensversicherung, Unfallversicherung, afripsischierung Transportversicherung, Feuerversicherung, Hagelversicherung, Diehsersicherung, Keinere Versicherungszweige, Rückversicherung. Jedes Bandden geheftet 1 Mt., gefdmadvoll gebunden 1 Mt. 25 Pfg.

**Volkslied.** Das deutsche Volkslied. Über Wesen und Werden des deutschen Volksgesanges. Von Privatdozent Dr. J. W. Bruinier. 2. Auflage. (Nr. 7.)

handelt in schwungvoller Darstellung vom Wesen und Werden des deutschen Dolksgesanges, unterrichtet über die deutsche Dolksliederpslege in der Gegenwart, über Wesen und Ursprung des deutschen Volksgesanges, Stop und Spielmann, Geschichte und Mär, Leben und Liebe.

Volksschule s. Schulwesen.

**Volksstämme.** Die deutschen Volkstämme und Candschaften. Von Prosessor Dr. G. Weise. 3. Auflage. Mit 29 Abbildungen im Text und auf 15 Tafeln. (Nr. 16.)

Schildert, durch eine gute Auswahl von Städte, Candicafts, und anderen Bildern unterstützt, die Eigenart der deutschen Gaue und Stämme, die characterstitischen Eigentümlicheiten der Candicaft, der Einstug auf das Temperament und die gestitige Anlage der Menschen, die Leistungen hervorragender Männer, Sitten und Gedräuche, Sagen und Märchen, Besonderheiten in der Sprache und hauseinrichtung u. a. m.

**Volkswirtschaftslehre** f. Amerika; Arbeiterschutz; Bevölkerungslehre; Frauenbewegung; Japan; Soziale Bewegungen; Verkehrsentwicklung; Versicherung; Wirtschaftsgeschichte.

**Wald.** Der deutsche Wald. Don Professor Dr. Hans Hausrath. Mit 15 Textabbildungen und 2 Karten. (Nr. 153.)

Schildert unter besonderer Berücklichtigung der geschichtlichen Entwicklung die Lebensbedingungen und den Zustand unseres deutschen Waldes, die Verwendung seiner Erzeugnisse, sowie beime günstige Einwirkung auf Ulima, Fruchtbarkeit, Sicherheit und Gesundheit des Landes und erdriert zum Schlusse die des Waldes und die Aufgaben seiner Eigentümer, ein Büchlein also für jeden Waldsreund.

Warenzeichenrecht s. Gewerbe.

Warme f. Chemie.

Wärmekraftmaschinen (f. a. Dampf). Einführung in die Theorie und den Bau der neueren Wärmekraftmaschinen (Gasmaschinen). Von Prosessor Dr. Richard Vater. 2. Auflage. Mit 34 Abbildungen. (Nr. 21.) will Interesse und Verständnis für die immer wichtiger werdenden Gass. Verroseume und

will Interesse und Verständnis für die immer wichtiger werdenden Gas-, Detroseum- und Benzinmaschinen erwecken. Nach einem einleitenden Abschnitte folgt eine kurze Beprechung der verschiedenn Betriebsmittel, wie Ceuchigas, Krastgas usw., der Diertatte und Sweitaltwirtung, woran sich dann das Wichtigste über die Bauarten der Gas-, Benzin-, Petroseumund Spiritusmaschinen sowie eine Darstellung des Wärmemotors Patent Diesel anschließt.

neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Wärmekraftmaschinen. Don Professor Dr. Richard Vater. Mit 48 Abbildungen. (Nr. 86.)

Ohne den Streit, ob "Cokomobile oder Sauggasmaschine", "Dampsturbine oder Großgasmaschine", entscheiden zu wollen, behandelt Derfaser die einzelnen Maschinengatungen mit Rücksich auf ihre Dorteile und Nachtelle, wobei im zweiten Teil der Dersuch unternommen ist, eine möglicht einsache und leichtverständliche Einsührung in die Theorie und den Bau der Dampsturbine zu geben.

Waffer f. Chemie.

Jedes Bandden geheftet 1 Mt., gefcmadvoll gebunden 1 Mf. 25 Pfg.

Weltall (f. a. Aftronomie). Der Bau des Weltalls. Don Professor. 3. Scheiner. 2. Auflage. Mit 24 Figuren im Text und auf einer Tasel.

stellt nach einer Ginführung in die wirflichen Derhaltnife von Raum und Zeit im Weltall dar, wie das Weltall von der Erde aus erscheint, erörtert den inneren Bau des Weltalls, d. h. die Struftur der selbständigen himmelskörper und schließtich die Frage über die äußere

Weltanichauung (f. a. Kant; Menschenleben; Philosophie; Weltproblem). Die Weltanschauungen der großen Philosophen der Heuzeit. Don Profesfor Dr. C. Buffe. 2. Auflage. (Mr. 56.)

Will mit den bedeutendsten Ericheinungen der neueren Philosophie befannt machen; die Beschräntung auf die Darstellung der großen Hassischen Spsteme ermöglicht es, die beherrschenden und charafteristischen Grundgedanken eines jeden scharf herauszuarbeiten und so ein möglichft flares Gefamtbild der in ihm enthaltenen Weltanichanung gu entwerfen.

Weltäther f. Molefüle.

welthandel. Geschichte des Welthandels. Don Oberlehrer Dr. Mar Georg Schmidt. (Mr. 118.)

Eine zusammenfassende Übersicht der Entwicklung des handels sührt von dem Altertum an über das Mittelalter, in dem Konstantinopel, seit den Kreuzzigen Italien und Deutschland den Weltverlehr beherrschen, zur Neuzeit, die mit der Aussindung des Seewegs nach Indien und der Entdedung Amerikas beginnt und dis zur Gegenwart, in der auch der deutschland kaufmann nach dem alten hansawort "Mein Seld ist die Welt" den ganzen Erdball erobert.

Weltproblem (f. a. Philosophie; Weltanschauung). Das Weltproblem von positivistischem Standpuntte aus. Don Privatdozent Dr. J. Pegoldt. (Mr. 133.)

Such die Geschichte des Nachdenkens über die Welt als eine sinne sinnvolle Geschichte von Irrilimern plychologisch verständlich zu machen im Dienste der von Schuppe, Mach und Avenarius verstenen Anschauung, daß es keine Welt an sich, sondern nur eine Welt sir uns gibt. Ihre Eemente sind nicht ktome oder sonstige absolute Existenzen, sondern Farben, Tons, Druck, Braums, Seits usw. Empfindungen. Trohdem aber sind die Nicht bloß ubseltie, nicht bloß Bemußseinserscheinungen, vielmehr müssen de aus senen Empsichungen zusammengelegten Bestandteile unserer Umgebung forteristierend gedacht werden, auch wenn wir sie

wetter. Wind und Wetter. Sunf Vortrage über die Grundlagen und wichtigeren Aufgaben der Meteorologie. Don Professor Dr. Leonh. Weber. Mit 27 Siguren im Tert und 3 Tafeln. (Mr. 55.)

Schildert die historischen Wurgeln der Meteorologie, ihre physitalischen Grundlagen und ihre Bedeutung im gesamten Gebiete des Wiffens, erortert die hauptfachlichften Aufgaben, die dem ausübenden Meteorologen obliegen, wie die praktische Anwendung in der Wettervorhersage.

Wirtschaftsgeschichte (f. a. Amerika; Eisenbahnen; Geographie; Handwert; Japan; Rom; Soziale Bewegungen; Derfehrsentwicklung). Die Ents widlung des deutschen Wirtschaftslebens im 19. Jahrhundert. Don Professor Dr. L. Pohle. (Mr. 57.)

Gibt in gedrängter Sorm einen Überblid über die gewaltige Umwalgung, die die deutsche dolfswirtschaft im legten Jahrhundert durchgemacht hat: die Umgestaltung der Candwirtschaft; die Lage von handwerk und hausindustrie; die Entstehung der Großindustrie mit ihren Be-gleiterscheinungen; Kartellbewegung und Arbeiterfrage; die Umgestallung des Verkehrswesens und die Wandlungen auf dem Gebiete des handels.

Jedes Bandden geheftet 1 Mt., geschmadvoll gebunden 1 Mt. 25 Pfg

wirtschaftsgeschichte. Deutsches Wirtschaftsleben. Auf geographischer Grundlage gefchildert von Prof. Dr. Chr. Gruber. Mit 4 Karten. (Mr. 42.)

Beabsichtigt, ein gründliches Derständnis für den sieghaften Aufschwung unseres wirtschaft-lichen Lebens seit der Wiederaufrichtung des Reichs herbeizuführen und darzulegen, inwieweit fich Produktion und Verkehrsbewegung auf die natürlichen Gelegenheiten, die geographischen Dorzüge unseres Vaterlandes stützen können und in ihnen sicher verankert liegen.

- Wirtschaftliche Erdfunde. Don Professor Dr. Chr. Gruber. (Nr. 122.)

Will die ursprünglichen Busammenhange gwischen der natürlichen Ausstattung der einzelnen könder und der wirtschaftlichen Krastäußerung ihrer Bewohner star machen und das Verständerung ihre Bewohner star machen und das Verständenis sür die wahre Machistellung der einzelnen Völker und Staaten eröffnen. Das Welfimeer als Hochstraße des Weltwirtschaftsversehrs und als Quesse der Volkergröße, – die Tandmassen ist Schauplaß alles Kulturlebens und der Weltproduktion, – Europa nach seiner wirtschaftsgeographischen Veranlagung und Bedeutung, – die einzelnen Kulturstaaten nach ihren wirtschaftsgeographischen Euchschaftsgeographischen Euchschaftsgeographis threr wirtschaftlichen Entfaltung (viele geiftreiche Gegenüberstellungen!): all dies wird in anichaulicher und großgügiger Weise vorgeführt.

Joologie f. Ameisen; Tierleben.

### Übersicht nach den Autoren.

Abel, Chemie in Küche und haus. Abelsdorff, Das Auge. Ahrens, Mathematische Spiele. Alkoholismus, der, seine Wirkungen und seine Bekämpfung. 3 Bände. Auerbach, Die Grundbegrifse der mobernen Naturlehre.

Biedermann, Die technische Entwickl. der Gijenbahnen der Gegenwart.

Biernacti, Die moderne Heilwissenschaft. Blau, Das Automobil. Bloch, Die ständischen u. sozialen Kämpfe.

Blochmann, Luft, Waffer, Lichtu. Warme. - Grundlagen der Eleftrotednif.

Boehmer, Jesuiten. Boehmer, Luther im Lichte ber neueren

Soridungen.

Bongardt, Die Naturwissenschaften im faushalt. 2 Bandden.

Bonhoff, Jejus und seine Seitgenossen. Borinsti, Das Theater. Börnstein und Mardwald, Sichtbare und unfichtbare Strahlen.

Braafd, Religiofe Stromungen. Bruinier, Das deutsche Dolfslied.

Bruich, Die Beleuchtungsarten der Gegenwart.

Buchner, 8 Dorträge a. d. Gefundheitslehre. Burgerstein, Schulhngiene. Bürfner, Kunstpflege in haus u. Heimat.

Buffe, Weltanichauung. d. gr. Philosoph. Erang, Arithmetif und Algebra. I. Daenell, Geschichte der Der. Staaten

von Amerifa.

v. Duhn, Pompeji. Edftein, Der Kampf zwijchen Mensch und Cier. Erbe, hist. Städtebilder aus Holland und

Miederdeutschland.

Slügel, herbarts Lehren und Leben. Frang, Der Mond. Frech, Aus der Dorzeit der Erde.

Frengel, Ernähr. u. Dolfsnahrungsmittel.

Fried, Die moderne Friedensbewegung. Geffden, A. d. Werdezeit d. Christentums. Gerber, Die menschliche Stimme.

Giesebrecht, Die Grundzüge israelitifden Religionsgeschichte. Giefenhagen, Unfere wichtigften Kultur-

pflanzen.

Jedes Bändchen geheftet 1 Mf., geschmacvoll gebunden 1 Mf. 25 Pfg.

Goldichmidt, Die Tierwelt d. Mifroftops. Graeg, Lidt und Sarben. Graul, Gitafiatifche Kunft. Gruber, Deutides Wirtschaftsleben. Gruber, Wirticaftliche Erofunde.

Günther, Das Beitalter ber Entdedungen. hahn, Die Eisenbahnen.

b. hansemann, Der Aberglaube in ber medigin. hartwig, Das Stereostop. hassert, Die Polarforschung. hassert, Die deutschen Städte.

haufter, Bevölderungslehre.
haushofer, Bevölderungslehre.
hausrath, Der deutsche Wald.
heigel, Politische Haupströmungen in Europa im 19. Jahrh.
heil, D. Städte u. Bürger im Mittelaster, heilborn, Die deutschen Kolonien. (Cand

und Ceute.) Heilborn, Der Mensch. Heinnig, Einführung in das Wesen

Bennings, Tierfunde. Gine Ginführung in die Joologie.

hesse, Abstammungslehreu. Darwinismus. hubrid, Deutsches Sürftentum

deutsches Verfassungswesen

Janjon, Meeresforichung u. Meeresleben. 31berg, Geistestrantheiten. Raupe, Der Säugling.

Kaugich, Die deutsche Ilustration. Kirchhoff, Menich und Erde. Knabe, Geschichte d. deutsch. Schulwesens.

Knauer, Zwiegestalt ber Geschlechter in ber Tierwelt.

Knauer, Die Ameisen. Kohler, Moderne Rechtsprobleme. Kraepelin, Die Beziehungen der Tiere queinander.

Krebs, Handn, Mozart, Beethoven. Kreibig, Die fünf Sinne des Menschen. Külpe, Die Philosophie der Gegenwart. Külpe, Immanuel Kant.

Küster, Dermehrung und Sexualität bei den Pflangen,

Kunpers, Dolfsschule und Lehrerbildung der Der. Staaten.

Caughlin, Aus dem amerifanischen Wirtschaftsleben.

Caunhardt, Am faufenden Webftuhl der Zeit. Seid, Krankenpflege.

Loening, Grundzüge der Derfassung des Deutschen Reiches.

Con, Derfehrsentwalg. i. Difchl. 1800-1900. Sufdin von Ebengreuth, Die Munge. Maas, Lebensbedingungen der Tiere. Maier', Soziale Bewegungen u. Theorien. von Malkahn, Der Seefrieg. Manes, Grundzüge d. Dersicherungswes.

Maennel, Dom Hilfsschulwesen. Martin, Die höh. Mädchenschule in Dischlo. Matthael, Deutsche Baufunftl. Mittelalt. Mehlhorn, Wahrheit und Dichtung im Ceben Zefu.

Merdel, Bilber aus der Ingenieurtechnif. Merdel, Schöpfungen ber Ingenieur-

technif der Neugeit. Meringer, Das deutsche Baus und fein

Hausrat. Mie, Moletule - Atome - Weltather. Miehe, Die Ericheinungen des Lebens. von Negelein, Germ. Mythologie, Oppenheim, Das aftronomische Welt-

bild im Wandel der Zeit. Otto, Das deutsche Handwerk. Otto, Deutsches Frauenleben. Pabst, Die Knabenhandarbeit.

pavijen, Des Anadenganoatoett.
Pauljen, Des deutsche Bildungswesen.
Petersen, Össentliche Fürsorge für die hilfsbedurstige Jugend.
Peholdt, Das Weltproblem.

pegolot, das Beupronem. Pfannfluche, Religion u. Naturwissensch, Discher, Leben und Lehre des Buddha, Pohle, Entwicklung des deutschen Wirt-ichaftslebens im 19. Jahrhundert, von Portugall, Priedrich Fröbel. Pott, Der Cert des Neuen Testaments

nach feiner geschichtl. Entwidlung. Rand, Kulturgeschichte bes beutschen

Bauernhauses.

Batternfaujes.
Rathgen, Die Japaner.
Rehmte, Die Seele des Menschen.
Reukauf, Die Pslanzenwelt d. Mikrostops.
Richert, Schopenhauer.
Richert, Einführung in die Philosophie.
von Rohr, Optische Instrumente.
Sach, Ban und Tätigkeit des menschlichen

Körpers.

Scheffer, Das Mitroftop. Scheid, Die Metalle.

Scheiner, Der Bau des Weltalls. Schirmader, Die mod. Frauenbewegung. Schmidt, Geich. des Welthandels.

Shubring, Rembrandt.

Schumburg, Die Tuberfulofe. Schwemer, Restauration und Revolution. Schwemer, Die Reattion u. die neue Ara. Schwemer, Dom Bund gum Reich.

von Soden, Palästina. von Sothen, D. Kriegswesen i. 19. Jahrh.

Spiro, Geschichte der Musit. Stein, Die Anfänge der menfchl. Kultur. Steinhaufen, Germanifche Kultur inder

Sticher, EineGesundheitslehre für grauen. Ceichmann, Der Befruchtungsvorgang. Cews, Schulfämpfe der Gegenwart. Cews, Mod. Erziehung in Haus u. Schule. Thieß, Deutsche Schiffahrt.

Jedes Bandden geheftet 1 Mf., geschmadvoll gebunden 1 Mf. 25 Pfa.

Thurn, Die Sunkentelegraphie, Tolksborf, Gewerblicher Rechtsichut in Deutschland.

Uhl, Entsteh. u. Entwidl. unf. Mutteripr. Unold, Aufgab. u. Biele d. Menichenlebens. Dater, Theorie u. Bau der neueren Warme-

fraftmaschinen. - Die neueren Sorts idritte auf dem Gebiete der Warmefraftmajdinen. - Dampf u. Dampfmaidine.

Doges, Der Obitbau. Dolbehr, Bau u. Ceben d. bildenden Kunft. Wahrmund, Che und Cherecht.

Weber, Wind und Wetter.

Weber, Don Luther gu Bismard. 2 Bod. Wedding, Eisenhüttenwesen.

Weinel, Die Gleichniffe Jefu.

Weise, Schrifts und Budwesen in alter und neuer Zeit.

Weise, Die b. Dolfsftamme u. Canbicaft. Wieler, Kaffee, Tee, Kafao und die übrigen narfotifden Aufgungetrante,

Wilbrandt, Die Frauenarbeit. Wislicenus, Der Kalender. Wittowsti, Das d. Dramad. XIX. Jahrh.

Wustmann, Albrecht Dürer. Zacharias, Sugwasserplantton.

3 and er, Herveninftem. - Leibesübungen. Siebarth, Kulturbilder aus griechtichen Städten.

3tegler, Allgem. Pabagogit. - Schiller. v. 3miebined - Suben borit. Arbeiterfoun und Arbeiterversicherung.

#### Es werden folgen:

Alt, Phufit der Kälte. Anselmino, Das Waffer.

Arnot, Deutschlands Stellung in der Weltwirtschaft.

Auhagen, Agrarpolitische Zeitfragen. Badhaus, Die Milch.

Bardeleben, Die menfoliche Anatomie. Barind, Erforschung und fünftliche Berstellung der Stoffe des Dflangen- und Tierreichs.

Bendir, Gelomarft.

Bitterauf, Die franz. Revolution.
— Napoleon und seine Zeit.

- Friedrich der Groke.

Bod, Zeitmeffer.

Bodel, Die deutsche Dolfsfage. Börnftein, Wärmelehre.

Brandenburger, Deutschland u. Polen

in ihren geschichtlichen Begiehungen. Braun, Ethif.

Braun, Cthif.

Buchgewerbe und die Kultur. (Vorträge von: Jode, Hermelink, Kauhich, Wäntig, Wittowski und Wuttke.)

Buchka, Geschichte der Chemie.

Buhl, Kultur des Islams.
Claasen, Deutsche Landwirtschaft.
Cohn, Jührende Denker.
Cornils, Einführung in das Studium der Theologie.
Dähnhardt, Das Märchen.
Dippe, Die Hygiene des käglichen Lebens.
Doren, Die Hygiene des käglichen Lebens.

der deutschen Seemacht.

Edert, Kolonialpolitit. Endell, Städtebau.

Seffler, Die neueren Sortidritte der Chirurgie.

Signer, Allgemeine Dolferfunde.

Frante, Geschichte des deutschen Gefühls. Fried, Internationales Leben der Gegenwart.

Sriedrich, Die wirtschaftlichen Derhalt-

niffe Aftens.

Frig, Das moderne Volksbildungswesen. Gaehde, Das Theater. Gaupp, Kinderpinchologie.

Gefften, Grundguge des Dölferrechts. Gifevius, Die Dilangen.

Graul, Die Entwidelung der deutiden Malerei im 19. Jahrhundert. Gutgeit, Die Bafterien.

haendte, Die deutsche Kunft im täglichen Leben.

haguenin, hauptströmungen der fran-gösischen Literatur.

v. Halle, Truste und Kartelle. Heinrici, Recht und Rechtspflige in

Deutschland. hellwig, Derbrechen und Aberglaube. Benfel, Rouffeau.

hoffmann, Die europäischen Sprachen. Jacob, Einlettung in das Studium der Geschichte.

Jaefchte, Dante. Ihering, Wasserkraftmaschinen. Iiriezek, Geschichte der engl. Dichtung. Istel, Die musikalische Romantik in Deutschland.

Das Kunftwert Wagners.

Kahle, Ibjen, Björnson und ihre Beitgenoffen.

Kaugia, Die Krebsfrantheit.

Kirn, Die sittlichen Cebensanschauungen der Gegenwart.

Knabe, Das deutsche Schulwesen der Gegenwart.

Tedes Bandden geheftet 1 Mt., geschmadvoll gebunden 1 Mf. 25 Dfg.

Köhler, Aufflärung. Krumm, Das Drama. Kühne, Geschichte ber freiheitsfriege.

Kummel, Photodemie. Campert, Welt ber Organismen.

Candauer, Calmub.

Candsberg, Biologie. Cangenbed, Englands Weltmacht.

Cehmann, Minitif.
— Die tierische Form in Beziehung zur Lebensweise der Ciere. Cehmann . Baupt. Die babploniiche

Kultur.

Schliemanns Ausgrabungen. Cehner, Römische Kultur in Deutschland. Cefer, Borfe und Borfengeschäfte.

Couis, Lifgt und Berliog.

Enon, Einführung in die deutsche Sprachund Literatur-Sorfdung.

Maas, Die geiftige Entwidelung des Kindes.

Marcuse, Prattifche himmelstunde. Matthäi, Die deutsche Baufunft vom 15. Jahrhundert bis zur Gegenwart. Man, Gefteinsbildende Tiere.

Maner, Gefdichte des westeuropaischen Beamtentums.

Menger, Grundguge der Afthetif. Mener, Der Krieg im Jeitalter des Derfehrs.

— Das Neue Testament. Mener, R. M., Neuzeitliche Meister der Weltliteratur.

Mielfe, Das deutsche Dorf.

Mollwo, Die deutschen Erwerbsgesell-

Morgenroth, Die Statistit. Most, Die Boden- und Wohnungsfrage. Müller, Methoden der Phyfiologie. Die demische Industrie. Uller, S., Amerikanische technische

müller, S., Bochiculen.

Natorp, Peftalo33i. Neurath, Antike Wirtschaftsgeschichte. Ohr, Staat und Kirche im Mittelalter. Oppenheim, Die Probleme der neueren

Aftronomie. Peter, Die Planeten.

Dinder, Einführung in das Studium der Kunftgeschichte.

Doidel, Die Luftidiffahrt.

potonie, Morphologie der Pflanzen. Rehm, Deutsche Dolksfeste und Dolksfitten. Reutauf, Die Pflangenwelt des Mifroitops.

Richert, Einleitung in das Studium der Philojophie.

Riemann, Geschichte des Romans.

Rietich, Die Grundlagen der Tonfunft.

Rofin, Berg, Blutgefäße, Blut und deren Erfrantungen.

Sallwürf, Einleitung in die wissen-schaftliche Pädagogik. Salomon, Die politische und kulturelle Entwidelung Ruhlands.

Saenger, Das englische Kulturleben ber Gegenwart.

v. Scala, Die Entwidelung bes grie-

Scheibe, Die Minerale.

Scheler, Erfenntnislehre.

Schmidt, Bedeutung der Seemacht in der neueren Geschichte.

Schone, Politifche Geographie. Schulg, Antite Wirtschaft, Technik und Kultur.

Schwarg, Allgemeine Sinanzverwaltung. Sieger, Der moderne Begriff der Nation. Shateipeare.

Solmsen, Die russische Literatur des 19. Jahrhunderts.

Spiro, Antifes Leben im Liede.

Steinborf, Kultur des alten Ägnptens. Steinmann, Die Eiszeit und ber ur-geschichtliche Mensch.

Stöder, Die Frau und die moderne

Kultur. Strauß, Mietrecht.

Thieß, Jeitungsmefen.

Thumb, Die Dölfer der Balfanhalbinfel. Tobler, Kolonialbotanit. Tobler, Kolonialbotanik. Troeltsch, Einführung in die Arbeiter-

frage. Trömner, Suggestion und Hypnotismus. Trüper, Die Charaftersehler im Kindes-

und Jugenbalter. Überschaer, Die beutsche Zollpolitik. Unger, Das Buch und seine Herstellung.

Dater, Majdinenfunde.

Derroorn, Mechanit des Geifteslebens. Difder, Paulus.

Dogt, Deutsches Dogelleben. Dollers, Weltreligionen.

Walgel, Geschichte ber deutschen Romantif. Weber, Probleme der großindustriellen Entwidelung.

Weinstein, Entstehung der Welt und der Erde.

Wendicher, Goethes Welt- und Lebensanichauuna.

Wenticher, Geschichte und Kritit des Materialismus.

Wernide, Anftedende Dolfsfrantheiten. Wiedenfeld, Derfehrswesen.

Die Seehafen des Weltverfehrs. Wobbermin, Wesen und Wahrheit der

Religion. Bur Stragen, Seelenleben ber Tiere.

# Aus deutscher Wissenschaft u. Kunst

Die Sammlung foll dagu dienen, alle, die beftrebt find, ihre Bilbung gu er weitern, in die Lekture wissenschaftlicher Werke einzuführen. Aus geiftes wiffenschaftlichen, naturwiffenschaftlichen, religiofen und philosophischen Werter wird eine Auslese getroffen, die geeignet ift, in die wichtigften Gragen au den einzelnen Gebieten einzuführen, den Weg zu den Quellen zu weisen und zugleich die Kunftsormen der Darftellung in Musterbeispielen zu zeigen. Die Erläuterungen räumen unter Beiseitelaffen unnotiger Gelehrsamfeit und auf das fnappfte Maß beschränft, nur solche Schwierigkeiten aus dem Wege, die eine unbefangene und rafche Aufnahme der Cefture verhindern. Junadit erschienen folgende Bandchen:

Jur Geschichte der deutschen Siteratur. Proben literar-historischer Darftellung für Schule und haus ausgewählt und erläutert von Dr. R. Weffeln. geb. M. 1.20.

Inhalt: Dogt, Der Heliand. Uhland, Walther von der Vogelweide. v. Treitschle, Die neue Literatur. Gervinus, Cessing. Hettner, herder. Bielschowsty, Goethe und Schiller. Beller-mann, Schillers Don Carlos. Brahm, Kleists Hermannsschlacht. Scherer, Grillparzer. Manne, Mörife als Lyrifer. Schmidt, Gustav Frentag.

Jur Kunft. Ausgewählte Stude moderner Profa gur Kunftbetrachtung und gum Munftgenuß herausgegeben von Dr. M. Spanier. Mit Ginleitung,

Anmerkungen und Bilderanhang. geb. M. 1.20.

Anhalt: Avenarius, Kunstgenuß und helsendes Wort. Avenarius, Rethel: Der Tod als Freund v. Seidlig, Deutsche Kumst. Springer, Albrecht Dürers Phantasiekunit: Ritter, Tod und Teusch. Hith, Malerische Ausstallungen und Techniken des Mittelalters und der Renaissance. Hirth, Das Natürliche Ausstallungen und Techniken des Mittelalters und der Renaissance. Hirth, Das Natürliche in der Kumst. Lichtwarf, Rembrandt: Der blinde Todias. Lichtwarf, Remformen. Borrmann, Andreas Schliker. Bauersdorfer, Die Lichtwarf, Entschwerze Schliker. Bauersdorfer, Wertherk Gerische Schmuckbarperdorfer, über Kunst. (Aphorismen.) Wölfslin, Die Teppichtartons Raffaels: Der munderdare Flichzug. Justi, Delazueg: Die Übergabe von Breda. Schulke-Naumburg, Dom Bauernhaus. Gurlitt, Sachlicher Stil im Gewerbe. Gurlitt, Was will die Hellmalerei? Brindmann, Meihner Porzellan. Hoerde, Etwas über Böcklin. Thoma, Ansprache an die Freunde bet Gelegenheit seines 60. Geburtstages.

Bur Geschichte. Proben von Darftellungen aus der deutschen Geschichte für Schule und haus ausgewählt und erläutert von Dr. W. Scheel. geb. M. 1.20. Inhalt: Mommjen, Kelten und Germanen vor Cäjar. Brunner, Kriegswesen und Gesolgschaft. Frentag, Karl der Große. v. diesebrecht, Gründung des Deutschen Reichs durch zeinrich I. v. Kugler, Der Kreuzzug Kaiser Friedrichs I. v. Besow, Die Stadtverwaltung in ihrer Beziehung zu hande und Gewerbe. Schäfer, Die Hanse, Lamprecht, Entwicklung der ritterlichen Gesellschaft. v. Teritigke, Luther und die deutsche Nation. v. Ranke, Die Epoche der Kesormation und der Religionstriege. Schüler, Die Schlacht bei Lügen. Dronzen, Sehrbellin. Friederich, Blücher und Gneisenau. v. Molike, Schlacht bei Dionville — Mars la Tour (16. August). Marck, Kaiser Wilhelm I. Anhänge.

Jur Erdfunde. Proben erdfundlicher Darftellung für Schule und faus ausgewählt und erläutert von Dr. S. Campe. geb. M. 1.20.

## Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

ur Einführung in die Philosophie der Gegenwart. Ucht Vorträge von Prof. Dr. U. Riehl. 2. Auflage. Gesin Leinward gebunden M. 3.60.

"Wir gestehen, daß uns selen die Ceftüre eines Buches so viel geistigen Genug bereitet hat, als die des vorliegenden. Der Derfasser hat es meisterhaft verstanden, die vielsach als ausgert langweilig und trocken verschriene Diszipsin nicht nur interessant und fessend arguntellen, jeder Gebildete getrojt nach dem Buche greisen kann." (Ceipziger Cehrerzeitung.)

jeder Gebildete gerton nach dem Suche greisen kann."
"Don den üblichen Einleitungen in die hilosophie unterscheidet sich Riehls Zuch nicht bloß durch die Jorm der freien Aede, sondern auch durch seine ganze methodische Aufgastund und Antage, die wir nur als eine höchst glückliche bezeichnen können. Nichts von langatmigen logischen, psychologischen oder gelehrten hildrischen Entschendungen, sondern eine lebendig anzegende und doch nicht obersächliche, vielnicht in das sophilosophie führende Betrachtungsweise. : Wir mödigten sonit das philosophische Interesse. nicht obersächliche vor eine gehonen das hildes von der Aufgebergen und der Pilosophischen sonit das philosophische Interesse. nie Nachburd auf Riehls Schrift hinweisen. (Monatsschr. f. höh, Schulen.)

Irbeit und Rhythmus. Don Prof. Dr. Karl Bücher. Dritte, flark verniehrte Auflage. Geheftet M. 7.—, in Celinwand gebunden M. 8.—

"... Die übrige Gemeinde allgemein Gebildeter, welche nicht blog diese oder jene Einzelheit der in der Bucherichen Urbeit enthaltenen wiffenschaftlichen Errungenschaften interespiert, Einzeiger der in der Saugeringen Erweit einganenen willenigarinigen Ertungenigigten interepliete, iondern die sich gir die Gesamtheit des selbständigen und weitgreifenden Ubersblicks über den vielverschlungenen Jusammenhang von Urbeit und Ahythmus aufrichtig freuen darf, wird meines Erachtens dem bewährten Forder auch dier berschlungenen der ihr einen wertvollen Zeitrag zu einer Lehre geliefert hat, welche sonders oantbar jein, oah er ihr einen wertbouen Setirag zu einer kente genesen yar, weige die edessten Genüsse in unserm armen Menschenleben vermittelt, namlich zur Cehre von der denkenden Beobachtung nicht bloß welterschäfternder Ereignisse, sondern auch alltäglicher, auf Schrift und Tritt uns begegnender Geschehnisse." (B. p. Mayr in der Beilage 3. Milgem. 3tg.)

Fimmelsbild und Weltanschauung im Wandelder Zeiten.
Don Prof. Croels-Lund. Autorisierte übersetzung von E. 210 ch. Zweite
Auflage. In Ceinwand gebunden A 5.—

aber nie ermiddenden Wege zu solgen, deiem kundigen und gestireichen Jührer auf dem langen, imm und Militelalter bis herad in die Neuzeit führt. "Es sie ein Wert aus einem Euf, in und anregnden Albare grochen Jügen und ohne alle Kleinlichfeit geschrieben. "Wir möchten dem schem Euf, in und anregenden Buche einen recht großen Leierkeis nicht nur unter den zünftigen Gelepten, d. h. der Vergangenheit augehörige Frage, die darin erörtert wird, sonden eine solche, die jedem Denkenden auf den fingern bernnt. Und nicht inmer wird über solche, fundig nob der die zörert wird, sonden auf eine solche, fundig nob frei, so leidenschaftlick, die jedem Denkenden auf den Jingern brennt. Und nicht inmer wird über solche Dinge so wie es hier geschieht. "" (W). Ne file in den Neuen Jahrbüchern für das klassische Allertum.)

Das Erlebnis und die Dichtung. Cessing, Boethe, Novalis, Hölderlin. Vier Auf- Wilhelm Dilthey. Geheftet in keinwand gebunden M 5.60.

"... Dieses tiefe und schone Buch gewährt einen ftarten Beig, Dilthers feinfühlig wägende und leitende hand das fünulerische Sagit so außerordentlicher Obanomene im unmittels dagende und einende gand das einniteringe gazu jo augerordenunger phanomene im unmittelbaren Alinfaluft an die Inappe, größlinige Darftellung ihres Wefens und Cebens ziehen zu sehen. Hier, das fühlt man auf Schritt und Citit, liegt auch wahrhaft inneres Erlebnis eines Annes zugrunde, dessen Seiges Geisesbeschaffenheit ihn zum nachichhertigen Eindringen in die Welt unserer Dichter und Denfer geradezu bestimmen mußte. . . Was diesen auf einen kebenszeitraum von 40 Jahren verteilten — man wendet hier das Wort fast instinktiv an — flassischen Auffägen ein ganz besondere edles Gepräge gibt, das ist der goldene Schimmer geistiger Jugendreische, der sie verklart, die lautere Verehrung unserer höchsten literarische zur lebendige Ehrfurcht, der sich den Ausdruck überall durchzittert. Hier schieden Erkenntnisdrange (Das literarifche Echo.) 31, 100

## Verlag von B. G. Ceubner in Leipzig und Berlin.

ie hellenische Kultur. Dargestellt von fritz Baumgarten, franz Poland, Richard Wagner. mit 7 farbi-2 Harten und gegen 400 Abbildungen im Cert und auf 2 Doppeltafeln. Geheftet M. 10 .in Ceinwand gebunden M 12 .-

in Ceinwand gebunden M. 12.—
"Ein Buch, das, ohne mit Gelehrlamkeit zu prahlen, die wissenschaftliche Tächtigkeit der Derfassen bezeugt. Weberal sind auch, bei der Behandlung der Kunst wie der des Schriftums und der politischen Verhältnisse, die neuessen zuwe eingehend beräcksichtigt. Die Darstellung ist meist knapp, aber inhaltreich, verständlich und gefällig. Tresslich ist gleich der kurze Abschwitze füber Sprache und Keligion in der Einseltung. Ganz meisterhaft scheint mir die Behandlung der Kunst. Altigends bloße Kedensarten, selsten Urteile, die für den Cefer in der Eust schweben, weil ihm die Asschwangen sehlen. Was zu sagen ist, wird meist an gut gewählte Beispiele angeknäpft. Ueben der äußersichen Geschichte der Kunst kommt auch die Stilentwicklung zu vollem Kecht. Das staatliche Eeben, beionders in Uthen, wird in allen seinen Betätigungen ausschallich und doch nicht zu aussschiedung verschieden. Dersächtliche Geschieder der Schens beionders die gespalliaeren Oerfänlichseiten hervor, begnügt sich aber nicht mit bloßen Catlachen und Urteilen, waltigeren Personlichseiten hervor, begnügt fich aber nicht mit bloßen Catsachen und Urteilen sondern führt, soweit tunlich, auch Proben an ober gibt Inhaltsangaben der überlieserten Werfe, die auch dem mit der griechischen Literatur unbekannten Ceser ein Verpandnis für die Bedeutung diefer Beifteshelden eröffnen." (Cehrproben und Cehrgange. 1906.)

Das Mittelmeergebiet. Seine geograph, u. fulturelle Eigenart. Mit Higher und 10 Karten auf i5 Tafeln.

Don Professor Dr. A. Ohilippson. Seh. M. 6.—, in Eeinwand geb. M. 7.—

Gebildeter eine Dorftellung von dem zu geben, was Geographie heute ift, namentlich aber der steine machten geb. M. 7.—

Betildeter eine Dorftellung von dem zu geben, was Geographie heute ift, namentlich aber der steile einer des Mittelmeergebietes ein tieferes Derständnits für des, was sie sehn, zu erschließen. Jeder sollte sich das Auch als Ergänzung seines Zeissehandbuchsmitnehmen, und dem Sistorifer, dem Austruchistorifer, dem Soziologen bringt das Buch bedeutenden Gewinn. . Die Zistor ind vorzäglich gewählt und gut ausgesschaft, de Karten sehr stare Deranschaulthungen des Cextes."

Oventsche Liegenschaft und gut ausgesschaft, de Karten sehr stare Deranschaulthungen des Cextes." fehr flare Deranschaulichungen des Tertes." (Deutsche Citeraturgeitung.)

ie Renaissance in florenz und Rom. Mot Dor= trage von Prof. Dr. K. Brandi. 2. Unfl. Geh. M 5 .- , in Ceinwand geb. M 6 .-

heit, Schönheit und Karze des Ausmisellt sich die gewaltigste Seit dar, mit einer Kraft und Gedrungenseit, Schönheit und Karze des Ausdrucks, die klassische Gerade was das größere Publitungerlangen will und soll, kann es daraus gewinnen, ohne doch mit obersächlichem Halbkennen sibersächen zu werden. Den tiefer Deringenden gibt das schöne Wert den Genuß einer nechmaligen, knappen Jusammenkasiung; als habe man lange in einer fernen, großartigen Welt gelebt, ganz von ihrem Sein und Wesen erfüllt, müße nun Ubschied nehmen und sehe sie nech einmal mit einem Schlage vor sich, groß, kihn, sarbenreich und nahe und ins Gedächnis unwandelbar eingegraben, indes man sich wieder der eigenen Zeit zuwendet und weiterwandert. (Die Austien)

(Die Mation.)

Die Entwicklung des deutschen Städtewesens. Don Hugo Preuß.

L. 3and. Entwicklungsgeschichte der deutschen Stödtewesens.

Das volltegende Werk stellt sich als erstes die Aufgabe einer zusammenhange seiner hatchtung des deutschen Städtewesens in entwicklungsgeschichtlichem Jusammenhange seiner Organisation und seiner funktionen. Der erste, geschichtliche Band betrachtet so die deutsche Textorialitaaten aus behandelt wird, unter dem Gesichtspunkte der bürgerlichen Entwicklung middem Ergebnis, daß der ungelöste Gegensatz zwischen dem urdanen Derfassungsprinzip der freien Genossenschaft und dem agaratischen Organisationsprinzip des herrschaftlichen Derbandes alle Jahrhunderte der deutschung durchzieht. alle Jahrhunderte der deutschen Entwidlung durchzieht.

So darf auch icon diefer erfte Band - ein zweiter wird die probleme der fiddtifden Derfasing und Derwaltung untersuchen, die fich aus der neueffen Entwidlung namentlich der großflädtischen Ugglomerationen mit unabweislicher Untwendigfeit ergeben atwelles Interesse beanspruchen und von feinem ungelesen bleiben, der irgendwie an der Entwidsung unserer inneren Juftande praftisch oder ideell beteiligt ift.

VERIFICAT 1987

# DIE KULTUR DER GEGENWART

## IHRE ENTWICKLUNG UND IHRE ZIELE HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR PAUL HINNEBERG

## Teil I: Die geisteswissenschaftlichen Kulturgebiete. J. Hälfte. Religion und Philosophie, Liferatur, Musik und Kunst mit vorangehender

# Teil II: Die geisteswissenschaftlichen Kulturgebiete. 2. Hälfte.

Peil III: Die naturwissenschaftlichen Kulturgebiete. Mathematik, norganische und organische Naturwissenschaften, Medizin.

eil IV: Die technischen Kulturgebiete. Bautechnik, Maschinen-

Probeheft und Spezial-Prospekte über die einzelnen Abaus dem Vorwort des Herausgebers, der Inhaltsübersicht des Gesamtwerkes, dem Autoren-Verzeichnis und mit Probestücken aus dem

#### Von Teil I and II sind erschienen:

Teil I, Abt. 1: Die allgemeinen Grundiagen der Kultur der Gegenwart. Inhalt: Das Wesen der Kultur: W. Lexis.— Das moderne Bildungswesen: Fr. Phulisen.— Die wichtigsten Bildungsmittel. A. Schulen und Hochschulen. Das Yolkschulwesen: G. Schöppa. Das höhere Knabenschulwesen: A. Mathlias. Das höhere Mischulwesen: A. Mathlias. Das höhere Mischulwesen: G. Kerschen steiner. Die geisteswissenschaftliche Hochschulausbildung: Fr. Pauls en. Die naturwissenschaftliche Hochschulausbildung: Fr. Pauls en. Die naturwissenschaftliche Hochschulausbildung: Fr. Pauls en. Die naturwissenschaftliche Hochschulausbildung: K. Kraepelin. C. Ausstellungen: J. Lessing. Naturwissenschaftlich-technische Museen: K. Kraepelin. C. Ausstellungen: F. Das Zeitungswesen: K. Bucher. G. Das Buch. R. Pietschmann. H. Die Bibliotheken: F. Milkau.— Die Organisation der Wissenschaft: H. Diels. [AV u. 671 S.]

1611, ADC. 3, 1: Die Orientalischen Religionen. Inhalt: Die Anfänge der Religion und die Religion der primitiven Völker: Ed. Lehmann.— Die ägyptische Religion: A. Erman.— Die asiatischen Religionen: Die babylonisch-assyrische Religion: C. Brezold.— Die indische Religion: H. Oldenberg.— Die iranische Religion: H. Oldenberg.— Die iranische Religion: H. Oldenberg.— Die Religion des Islams: J. Goldziher.— Der Lamaismus: A. Grünwedel.— Die Religion der Chinesen: J. J. M. de Groot.— Die Religion der Japaner: a) Der Shintoismus: K. Florenz, b) Der Buddhismus: H. Haas. [VII n. 25; S.]. 1906. Preis geh. M. 7.—, in Leinwand geb. M. 9.—

Teil I, Abt. 4: Die christliche Religion mit Einschluß der israelitisch-jüdischen Religion. Inhalt: Die israelitisch-jüdische Religion: J. Wellhausen. — Die Religion Jesu und die Anfänge des Christentums bis zum Nicaenum (325): A. Jülicher. — Kirche und Staat bis zur Gründung der Staatskirche: A. Harnack. — Griechisch-orthodoxos Christentum und Kirche in Mittelsiter und Neuzeit: N. Bonweisch. — Christentum und Kirche westeuropas im Mittelsiter und Neuzeit: N. Bonweisch. — Christentum und Kirche in der Neuzeit: E. Troelisch. — Wesen der Religion und der Religionswissenschaft: E. Troelisch. — Gristlich-katholische Dogmatik: J. Pohlis. — Christlich-katholische Dogmatik: J. Pohlis. — Christlich-katholische Dogmatik: J. Pohlis. — Christlich-katholische Etik: J. Maus. — ach — Christlich-katholische praktische Theologie: C. Krieg. — Christlich-protestantische Dogmatik: W. Herrmann. — Christlich-protestantische Ethik: K. Seeberg. — Christlich-protestantische praktische Theologie: W. Faber. — Die Zukunftsaufgeben der Religion und die Religionswissenschaft: H. J. Holtzmann. (KI u. 758 S.) 1906. Prisgeh. M. 16. —, in Leinwand geb. M. 18. — Auch in 2 Hälften: 1. Geschichte der christlichen geb. M. 8. —

Teil I, Abt. 5: Allgemeine Geschichte der Philosophie. verfasser: H. v. Arnive Cl. Baeumker, J. Goldziner, W. Grube, Ynouye, H. Oldenberg, W. Windelband, W. Wundt. [ca. 25 Bogen.] Preis geh. ca. 1/6.8.— in Liehw. geb. ca. 1/6.10—

Teil I, Abt. 6: System der Philosophie. Inhalt: Das Wesen der Philosophie. W. Dilthey. — Logik und Erkenntnistheorie: A. Richl. — Metaphysik: W. Wandt. — Naturphilosophie: W. Ostwald. — Psychologie: H. Ebbinghans. — Philosophie der Geschichte: R. Eucken. — Ethile: Fr. Paulsen. — Padagogik: W. Munch. — Asthetis: Th. Lipps. — Die Zukunftsaufgaben der Philosophie: Fr. Paulsen. [cs. 25 Bogen.] geh. cs. ./k 9.— in Leinwand geb. cs. ./k 11.—

## Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Teil I, Abt. 7: Die orientalischen Literaturen. Inhalt: Die Anfange der Literatur umd die Literatur der primitiven Völker: E. Schmidt. — Die Sypptische Literatur: A. Erman. — Die habylonisch-assyrische Literatur: C. Bezold. — Die israelitische Literatur: H. Gunkel. — Die aramische Literatur: Th. Nöldeke. — Die arabische Literatur: M. Nöldeke. — Die arabische Literatur: M. J. de Goeje. — Die indische Literatur: R. Pischel. — Die altpersische Literatur: K. Geldnez. — Die mittelpersische Literatur: P. Horn. — Die auchersische Literatur: P. Horn. — Die und here die Literatur: P. Horn. — Die atterstische Literatur: P. Horn. — Die und here die Literatur: F. N. Pinck. — Die gergische Literatur: F. N. Finck. — Die gergische Literatur: K. Florenz. [IX n. 419 S.] 1906. Preis geh. M. 10. —, in Leinwand geb. M. 12. —

Teil I, Abt. 8: Die griechische und lateinische Literatur und Sprache. Inhalt: I Die griechische Literatur und Sprache. Die griechische Literatur des Alteraturs. U. v. Wilamowitz-Moellendorff. — Die griechische Literatur des Mittelalierische K. Krumbacher. — Die griechische Sprache: J. Wackernagel. — II Die lateinische Literatur und Sprache. Die römische Literatur des Alteratur in Chergang vom Altertam zum Mittelalter: E. Norden. — Die lateinische Sprache: F. Skutsch. [VIII u. i6t S.] 1905. Preis geh. M. 10. —, im Leinwand geh. M. 12. —

Teil I. Abt. 10: Die romanische und englische Literatur und Sprache und die skandinavische Literatur. Verfasser: A. Brandl, A. Heusler, K. Luick, W. Meyer-Lubke, H. Morf, H. Schück, H. Zimmer. [ca. 30 Bogen.] Preis geh. ca. 36. 10.—, in Leinwand geb. ca. 36. 12.—

Teil II, Abt. 5: Staat und Gesellschaft Europas und Amerikas in der Neuzeit. Verfasser: Fr. v. Bezold, E. Gotheln, R. Koser, E. Marcks, Th. Schiemann. [ca. 50 Bogen.] Preis geh. ca. sk. 10.—, in Leinwand geb. ca. sk. 12.—

Teil II, Abt. 8: Systematische Rechtswissenschaft. Inhalt: Wesen des Rechtes und der Rechtswissenschaft: R. Stammler. — Die einzelnen Teilgebiete: Privatrecht: B. Sohm. — Handels- und Wechschrecht: K. Gareis. — Versicherungsrecht: V. Ehrenberg. — Internationales Privatrecht: L. v. Bar. — Zivilsecht: L. v. Sauffort. — Strafrecht und Strafprozefrecht: E. v. Bar. — Zivilsecht: W. Kahl. — Staatsrecht: P. Laband. — Verwaltungsrecht. Justiz und Verwaltung. G. Anschutz. — Polizei- und Kulturpflege: E. Bernatzik. — Volkerrecht: P. v. Martiz. — Die Zukunftsaufgaben des Rechtssund der Rechtswissenschaft: R. Stammler. [X, LX u. 526 S] 1896. geh. & 14.—, in Leinwand geb. & 16.—

## B. G. Teubners Allgemeiner Katalog

gibt eine reich illustrierte, durch ausführliche Inhaltsangaben, Proben, Besprechungen eingehend über jedes einzelne Werk unterrichtende Übersicht aller derjenigen Veröffentlichungen des Verlages, die von allgemein Interesse für die weitesten Kreise der Gebildeten sind. Der Katalog liegt in folgenden Abteilungen vor, die jedem Interessenten auf Wunsch umsenst und postfrei übersandt werden:

- Allgemeines (Sammelwerke, Zeitschriften, Eildungswesen).
- Klassisches Aitertum (Literatur, Sprache, Mythologie, Religion, Kunst, Geschichte, Recht und Wirtschaft).
  - Religion. Philosophie.
  - Geschichte. Kulturgeschichte. Kunst.
- 6. Neuere fremde Literaturen und Sprachen.
- 8. Volkswirtschaft. Handel und Gewerbe. Fortbildungsschulwesen.
- 9. Pädagogik.
- 10. Mathematik. Naturwissenschaften. Technik.

Vollständige Ausgabe

B. G. Teubner.

Leipzig, Poststraße 3.