

*Vale*

CURSUL FACULTĂȚII DE ȘTIINȚE. UNIVERSITATEA DIN CLUJ

---

LECTIUNI  
DE  
GEOMETRIE  
PURĂ  
INFINITEZIMALĂ

---

DE  
N. ABRAMESCU  
PROFESOR LA ~~FACULTATEA DE ȘTIINȚE DIN CLUJ~~

CU O PREFAȚĂ

DE  
MAURICE D'OCAGNE  
MEMBRU AL INSTITUȚIULUI FRANTEI  
PROFESOR LA ȘCOALA POLITEHNICĂ DIN PARIS



EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN CLUJ  
1930

R. P. R.



30613

*Sebilet*

BIBLIOTECA CENTRALĂ

UNIVERSITARĂ

DIN

BUCUREŞTI

Cota .....

Nr. Inventar *144* Anul .....

Secția *Stat.* Nr. *i*

5 lei

*MHI  
- t*

9/III/131  
778  
*Ace cunoștință este etală cunoștințelor*  
CURSUL FACULTĂȚII DE ȘTIINȚE. UNIVERSITATEA DIN CLUJ

LECTIUNI  
DE



GEOMETRIE  
PURĂ  
INFINITEZIMALĂ \*

DE

N. ABRAMESCU

PROFESOR LA FACULTATEA DE ȘTIINȚE DIN CLUJ

343620

CU O PREFAȚĂ

DE

MAURICE D'OCAGNE

MEMBRU AL INSTITUTULUI FRANTEI

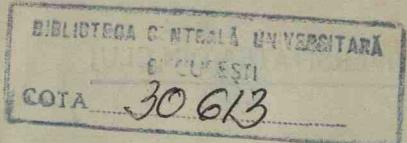
PROFESOR LA ȘCOALA POLITEHNICĂ DIN PARIS



L.144.  
EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN CLUJ

1930

C/1986



044

\*

100

ГЕОГРАФИЯ

РУСКИЙ

B.C.U. Bucuresti



G144



au professeur N. Abramescu  
de l'Université de Cluj  
M. d'Occagne

Dedic acest prim curs de Geometrie pură  
Infinitezimală imprimat în limba română,  
marelui geometru francez, Domnului

Maurice d'Ocagne,

Membru al Institutului Franței,  
Profesor la Scoala Politehnica din Paris,

în semn de admiratie și respectuos omagiu.

30613  
Dulelet

## PRÉFACE.

Certes, l'analyse peut être regardée comme l'instrument de recherche le plus puissant dont dispose le géomètre et l'on ne saurait trop s'émerveiller des conquêtes qui lui sont dues, mais l'enthousiasme que l'on en peut ressentir ne doit pas faire méconnaître le haut intérêt des méthodes de la géométrie dite synthétique et conduire à les négliger. Il est d'ailleurs possible de faire appel sur ce point à l'opinion d'un illustre analyste, LAGRANGE, qui, dans les Nouveaux mémoires de l'Académie de Berlin, écrivait en 1773 : „Quelques avantages que l'analyse algébrique ait sur les méthodes géométriques des anciens, qu'on appelle vulgairement, quoique fort improprement, synthèse, il est néanmoins des problèmes où celle-ci paraît préférable, tant par la clarté lumineuse qui l'accompagne que par l'élegance et la facilité des solutions qu'elle donne“. Un tel jugement, émanant d'une pareille autorité, suffit à légitimer le maintien d'un enseignement de pure géométrie dans le cycle des hautes études mathématiques. Mais ce maintien peut se justifier encore par un autre ordre de considération. Les méthodes de la géométrie synthétique se montrent d'une remarquable fécondité dans le domaine des applications techniques où il semble qu'on les ait un peu trop négligées dans la période contemporaine, ce qui s'explique, au surplus, par la commodité, la généralité qu'offre la méthode analytique, l'économie de pensée que comporte son emploi. Mais on pouvait déplorer que ces avantages fissent par trop négliger les admirables ressources que peut offrir aussi aux techniciens la méthode synthétique<sup>(1)</sup>. C'est pourquoi je me suis efforcé, par mon enseignement de l'Ecole polytechnique de Paris, de remettre, dans la plus large mesure possible, cette méthode en honneur, alors que,

---

(1) Je crois devoir signaler à ce propos le remarquable ouvrage qu'un de mes anciens élèves, M. WOLKOWITSCH, vient de publier sous le titre : Applications de la géométrie à la stabilité des constructions (en deux volumes ; Doin, éditeur ; 1928—1930).

dans un autre cours, nos élèves reçoivent un enseignement très élevé de l'analyse. Aussi, est ce avec une particulière satisfaction que j'ai vu, à ma suite, M. le professeur N. ABRAMESCO s'engager dans la même voie, adoptant même, sur beaucoup de points, mes propres démonstrations pour en répandre la connaissance dans son pays, y ajoutant d'ailleurs — ai-je besoin de le dire? — bien des choses intéressantes, tirées de son propre fonds. Je souhaite vivement de voir le livre qu'il consacre à ce sujet trouver, auprès du public roumain, tout le succès qu'il mérite.

Maurice d'Ocagne,

Membre de l'Institut de France,  
Professeur à l'Ecole Polytechnique de Paris.

Paris, le février 1930.

## PRECUVÂNTARE.

Această lucrare este rezumatul lecțiunilor de Geometrie pură Infinitezimală, pe care le profesez la Universitatea din Cluj, cu scopul de a menține, alături de metoda de cercetare a Analizei matematice, și una intuitivă de Geometrie pură.

Primele lecțuni de acest gen la noi în țară, se datoresc D-lui Profesor universitar și Inginer ER. PANGRATI, fostul meu profesor, ale cărui neîntrecute prelegeri ce ne făcea la Universitatea din București mi-au rămas ca model, și de aceea îi aduc și pe această cale omagiile mele de recunoștință.

Acest curs este tipărit din fondul pe care Ministerul Instrucțiunii l'a pus la dispoziția Universității din Cluj pentru publicarea manualelor didactice universitare. Exprim aci recunoșcătoare mulțumiri Onor. Minister al Instrucțiunii și Comisiunei însărcinată cu îngrijirea publicării, precum și Senatului universitar din Cluj pentru că a aprobat publicarea acestor lecțuni.

Mulțumesc în același timp și Tipografiei Cartea Românească din Cluj, pentru stăruința depusă ca lucrarea să iasă cât mai bine.

N. Abramescu.

Cluj, Octombrie 1930.



# LECTIUNI DE GEOMETRIE PURĂ INFINITEZIMALĂ

## INTRODUCERE.

1. Geometria Infinitezimală (sau diferențială) studiază proprietăile figurilor geometrice în vecinătatea unuia din elementele sale. Astfel, tangenta la o curbă este dreapta care unește un punct cu un punct infinit vecin, cercul osculator trece prin trei punct infinit vecine.

Acest studiu se poate face, sau în mod analitic, sau pur geometric. Studiul analitic al Geometriei Infinitezimale a fost desăvârșit de marele geometru francez *Darboux*, în monumentala sa lucrare, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*.

Matematicile considerate independent de aplicațiunile lor, se divid în două ramuri distincte, Analiza și Geometria.

Dacă, cum spune D-l *M. d'Ocagne*<sup>(1)</sup>, Analiza constituie utilul prin excelență în cercetările matematice, dacă permite, chiar în domeniul faptelor din spațiu, să confere fundamentelor teorii toată soliditatea pe care o cere o critică riguroasă, nu este mai puțin adevărat, după justă observare a eminentului analist, *D. P. Appell*<sup>(2)</sup>, că, dacă prin întrebuiințarea Analizei se câștigă repede o oarecare îndemânare în mânuirea formulelor, se sfărșește prin a se pierde obișnuința rationamentului direct, se renunță la această metoadă, de altminterea foarte instructivă, care consistă în a considera lucrurile aşa cum se prezintă (în ele însăși) și fără a le pierde din vedere în cursul rationamentului (*Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps*, § II).

Mai mult, Geometria pură se impune prin nenumăratele sale mijloace de cercetare, prin claritatea propozițiunilor pe

(<sup>1</sup>) **M. d'Ocagne**, Prefața lucrării sale, *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'Ecole Polytechnique*, 1917.

(<sup>2</sup>) **P. Appell**, Prefața la lucrarea D-lui **Demartres**, *Cours de Géométrie Infinitésimale*, 1913.

care le pune în evidență, prin simplicitatea și eleganța soluțiunilor pe care le dă.

La toate ramurile de aplicație, în legătură cu matematicile, metoda geometrică aduce ajutorul cel mai eficace, oferă soluțiunile cele mai variate, cele mai elegante și mai potrivite, cele mai neprevăzute.

Primele cercetări de Geometrie pură Infinitezimală sunt tot atât de vechi ca și începuturile Calculului Infinitezimal, iar ridicarea lor la rangul unui corp de doctrină este datorită geometrilor *Monge*, *Poncelet*, *Ossian Bonnet*, *Chasles*, *Mannheim*, *M. d'Ocagne*. Primele lucrări în acest sens (în Franță) sunt ale lui *Chasles*, *Traité de Géométrie Supérieure* (1852), *Aperçu historique* (1889); *Mannheim*, *Principes et développements de Géométrie Cinématique* (1894); *Schoenflies* (traducere Speckel), *Géométrie du mouvement*, conținând *Notions géométriques sur les complexes et les congruences de droites de Fouret* (1893); a D-lui *M. d'Ocagne*, *Cours de Géométrie Descriptive et de Géométrie Infinitésimale* (1896). *Chasles*, *Mannheim* și D-l *M. d'Ocagne* sunt intemeitorii Geometrii pure Infinitezimale. O altă lucrare în acest sens este a lui *Demartres*, *Cours de Géométrie Infinitésimale* (1913) și în fine cea mai nouă, este a D-lui *M. d'Ocagne*, *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique* (1917), a cărei nouă ediție, *Cours de Géométrie de l'École Polytechnique*, a apărut în 1930 și de care ne-am servit în mare parte în alcătuirea acestor lectiuni, expunând uneori chiar propriile și neintrecutele demonstrații a D-lui *M. d'Ocagne*.

## INFINIȚII MICI.

**2. Infiniții mici.** Un infinit mic este, prin definiție, o cantitate variabilă, care tinde către zero. Când se compară doi infiniții mici  $\alpha$  și  $\beta$ , care variază simultan, se pot prezenta următoarele cazuri:  $\frac{\beta}{\alpha}$  tinde către zero, când se zice că  $\beta$  este infinit mic în raport cu  $\alpha$ ; dacă  $\frac{\beta}{\alpha}$  tinde către o limită diferită de zero sau infinit, sau mai general, rămâne cuprins între două numere de același semn, se zice că  $\beta$  și  $\alpha$  sunt infiniții mici de același ordin.

Se compară, în general, infiniții mici care figurează în aceeași chestiune, cu unul dintre ei,  $\theta$ , care se numește infinit

mic principal. Un infinit mic  $\alpha$  este de ordinul  $n$ , când raportul  $\alpha : \theta^n$  tinde către o cantitate  $k$ , finită și diferită de zero, adică

$$\lim \frac{\alpha}{\theta^n} \rightarrow k, \quad \alpha = k\theta^n + \varepsilon\theta^n,$$

$\varepsilon$  tinzând către zero în acelaș timp cu  $\theta$ .  $k\theta^n$  se zice partea principală a infinitului mic  $\alpha$ .

Asupra infinițiilor mici putem arăta următoarele proprietăți.

1º Suma unui număr mărginit de infiniți mici de acelaș ordin este un infinit mic de acelaș ordin. În adevăr, să considerăm infiniții mici de ordinul  $n$ ,

$$\alpha = k\theta^n + \varepsilon\theta^n, \quad \alpha' = k'\theta^n + \varepsilon'\theta^n \dots$$

Avem

$$\alpha + \alpha' + \dots = (k + k' + \dots)\theta^n + (\varepsilon + \varepsilon' + \dots)\theta^n,$$

relație care probează că suma  $(\alpha + \alpha' + \dots)$ , de un număr determinat de termeni, este un infinit mic de acelaș ordin  $n$  cu cei dați.

2º Diferența a doi infiniți mici de acelaș ordin este un infinit mic de un ordin cel puțin egal cu acela al infinițiilor mici considerați. În adevăr, avem

$$\alpha - \alpha' = (k - k')\theta^n + (\varepsilon - \varepsilon')\theta^n.$$

Diferența  $(\alpha - \alpha')$  este un infinit mic de ordinul  $n$  când  $k \neq k'$  și este de ordin superior lui  $n$  când  $k = k'$ .

3º Produsul a doi infiniți mici este un infinit mic de un ordin egal cu suma ordinelor infinițiilor mici considerați. Fie

$$\alpha = k\theta^n + \varepsilon\theta^n, \quad \alpha' = k'\theta^m + \varepsilon'\theta^m; \quad \varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0.$$

Avem

$$\alpha\alpha' = kk'\theta^{m+n} + (k\varepsilon' + k'\varepsilon)\theta^{m+n} + \varepsilon\varepsilon'\theta^{m+n}.$$

Se vede că

$$\lim \frac{\alpha\alpha'}{\theta^{m+n}} \rightarrow kk',$$

ceea ce probează că produsul  $\alpha\alpha'$  este un infinit mic de un ordin  $(m+n)$ , egal cu suma ordinelor  $m$  și  $n$  ale infinițiilor mici considerați.

4º Câțul a doi infiniți mici este un infinit mic de un ordin egal cu diferența ordinelor celor doi infiniți mici considerați. Fie

$$\alpha = k\theta^m + \varepsilon\theta^m, \quad \alpha' = k'\theta^n + \varepsilon'\theta^n, \quad m > n.$$

Avem

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{k+\varepsilon}{k'+\varepsilon'} \theta^{m-n}, \quad \lim \frac{\alpha'}{\theta^{m-n}} = \lim \frac{k+\varepsilon}{k'+\varepsilon'} \rightarrow \frac{k}{k'},$$

ceea ce probează că  $\frac{\alpha}{\alpha'}$  este un infinit mic de ordinul  $(m-n)$ .

5º *Infiniți mici echivalenți.* Doi infiniți mici se zic echivalenți dacă au aceeași parte principală. De ex.,

$$\alpha = k\theta^n + \varepsilon\theta^n, \quad \alpha' = k'\theta^n + \varepsilon'\theta^n.$$

Raportul a doi infiniți mici echivalenți este egal cu 1, căci

$$\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = \lim \frac{k\theta^n + \varepsilon\theta^n}{k'\theta^n + \varepsilon'\theta^n} = \lim \frac{k + \varepsilon}{k' + \varepsilon'} = \frac{k}{k'} = 1 \quad (\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0).$$

6º *Limita raportului a doi infiniți mici este egală cu limita raportului infiniților mici echivalenți.* În adevăr, fie  $\alpha, \beta$  doi infiniți mici și  $\alpha', \beta'$  infiniții mici echivalenți. Avem

$$\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1, \quad \lim \frac{\beta}{\beta'} = 1,$$

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \left( \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\beta} \right) = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

De aici rezultă că limita raportului a doi infiniți mici nu se schimbă când înlocuim pe fiecare din ei cu partea lor principală.

7º *Limita sumei mai multor infiniți mici, de același ordin, nu se schimbă dacă înlocuim infiniții mici cu alții echivalenți.* În adevăr, fie  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ,  $p$  infiniți mici și  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  echivalenți lor, adică

$$\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1, \dots, \lim \frac{\alpha_p}{\beta_p} = 1.$$

Să considerăm rapoartele

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad \dots, \quad \frac{\alpha_p}{\beta_p}.$$

Să presupunem că am aranjat astfel notațiile, în cat  $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$  să fie cel mai mic și  $\frac{\alpha_p}{\beta_p}$  să fie cel mai mare din aceste rapoarte.

Avem

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} < \frac{\alpha_p}{\beta_p},$$

deci

$$\alpha_1 < \beta_1 \frac{\alpha_p}{\beta_p},$$

$$\alpha_2 < \beta_2 \frac{\alpha_p}{\beta_p},$$

$$\alpha_{p-1} < \beta_{p-1} \frac{\alpha_p}{\beta_p},$$

$$\alpha_p = \beta_p \frac{\alpha_p}{\beta_p}.$$

Adunând aceste relații, avem

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p < \frac{\alpha_p}{\beta_p} (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p),$$

$$(1) \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p} < \frac{\alpha_p}{\beta_p}.$$

De asemenea,

$$\alpha_p > \beta_p \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \alpha_{p-1} > \beta_{p-1} \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \dots \alpha_2 > \beta_2 \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \alpha_1 = \beta_1 \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

De unde, adunând,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p > \frac{\alpha_1}{\beta_1} (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p),$$

$$(2) \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Comparând (1) cu (2), urmează

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} < \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p} < \frac{\alpha_p}{\beta_p},$$

adică raportul

$$(3) \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p}$$

este cuprins între cel mai mic și cel mai mare din rapoartele

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \dots, \frac{\alpha_p}{\beta_p}.$$

Dar la limită aceste rapoarte tind către 1. Raportul (3) fiind cuprins între două cantități care tind către 1, urmează că acest raport are limita 1, adică

$$\lim \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p} = 1,$$

$\lim (\alpha_1 + \dots + \alpha_p) = \lim (\beta_1 + \dots + \beta_p)$   
 și astfel proprietatea enunțată este verificată.

De aci urmează că *limita sumei de infiniți mici nu se schimbă dacă înlocuim infiniții mici cu părțile lor principale*.

**3. Metoda infinitezimală** constă în a înlocui infiniții mici, care figurează în problema de rezolvat, cu alții echivalenți, pe care îi alegem astfel ca să simplificăm cât mai mult raționamentele și calculele. Rezultatul final nu va fi greșit din cauza acestor înlocuiri, căci, în definitiv, n'avem de calculat de cât limite de rapoarte sau limite de sume.

## CURBELE PLANE.

### CURBURA CURBELOR PLANE.

**4. Lungimea unui arc de curbă.** Să considerăm un arc decurbă plană AB (Fig. 1)

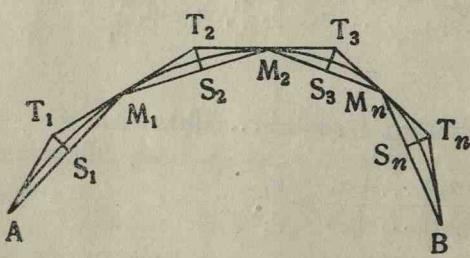


Fig. 1.

cu simplă conexiune. Fie M și M' două puncte infinit vecine ale acestui arc. Tangenta în punctul M la curba AB este limita către care tinde dreapta MM' când M' tinde către M. Normala

în M este perpendiculară în M pe tangentă în acest punct.

Să considerăm pe arcul AB punctele M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>, ..., M<sub>n</sub>, în ordinea după care un mobil ar descrie arcul AB, de la A spre B. Să presupunem că aceste puncte sunt aşa de apropiate, în cărui arcele AM<sub>1</sub>, M<sub>1</sub>M<sub>2</sub>, ..., M<sub>n</sub>B să fie convexe și că coardele subîntinse de aceste arce să facă unghiuri ascuțite cu tangentele duse la cele două extremități ale fiecărui arc. Fie T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>, ..., T<sub>n</sub> punctele de intersecție ale tangentelor duse în A, M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>, ..., M<sub>n</sub>, B. Așa fiind, linia poligonală AM<sub>1</sub>...M<sub>n</sub>B este înscrisă, iar linia poligonală AT<sub>1</sub>...T<sub>n</sub>B este circumscrisă arcului AB.

In aceste condiții, *lungimea arcului AB este limita către care tinde perimetru liniei poligonale înscrise în acest arc, când laturile acestei linii poligonale tind către zero*.

Pentru a justifica această definiție, va trebui să arătăm că această *limită există și că este unică*, adică este independentă de legea după care laturile tind către zero.

1º Vom arăta, mai întâi, că *raportul perimetrelor unei linii poligonale inscrise și a liniei poligonale circumscrise corespunzătoare, tinde către 1, oricare ar fi legea după care laturile liniei inscrise tind către zero*.

In adevăr, fie  $S_1, S_2, \dots, S_n$  proiecțiile punctelor  $T_1, T_2, \dots, T_n$  pe laturile  $AM_1, M_1M_2, \dots, M_nB$ . Fiindcă fiecare coardă face unghiuri ascuțite cu tangentele la extremitățile sale, punctele  $S_1, S_2, \dots, S_n$  cad respectiv în interiorul segmentelor  $AM_1, M_1M_2, \dots, M_nB$ .

Raportul perimetrelor liniilor poligonale circumscrise și inscrise este egal cu

$$(4) \quad \frac{AT_1 + T_1M_1 + M_1T_2 + \dots + M_nT_n + T_nB}{AS_1 + S_1M_1 + M_1S_2 + \dots + M_nS_n + S_nB}.$$

Dar, această valoare este cuprinsă între cel mai mare și cel mai mic din rapoartele

$$(5) \quad \frac{AT_1}{AS_1}, \frac{T_1M_1}{S_1M_1}, \dots, \frac{T_nB}{S_nB}.$$

Să considerăm unul oarecare din aceste rapoarte, de ex.,  $\frac{M_1T_2}{M_1S_2}$ , care este egal cu

$$\frac{M_1T_2}{M_1S_2} = \frac{M_1T_2}{M_1T_2 \cos T_2M_1S_2} = \frac{1}{\cos T_2M_1S_2}.$$

Dar când coardele  $M_1M_2, \dots$  tind către zero, unghiul  $T_2M_1S_2$  tinde către zero, iar cosinusul său către 1, prin urmare, acest raport tinde către 1.

Deci, fiecare din rapoartele (5) tinde către 1 și deci și raportul (4) tinde către 1, adică raportul perimetrelor a unei linii poligonale inscrise și a liniei poligonale circumscrise corespunzătoare tinde către 1.

2º Acestea fiind stabilite, să arătăm că *perimetrul unei linii poligonale inscrise ale cărei laturi tind către zero, are o limită determinată și independentă de legea de inscriere a liniei poligonale*.

In adevăr, fiind încrisă o linie poligonală în arcul  $AB$ , să unim un punct oarecare al fiecărui arc subîntins de laturile liniei poligonale cu extremitățile laturii corespunzătoare. Obțin-

nem, astfel, o nouă linie poligonală, înscrisă în arcul AB, având de două ori mai multe laturi ca prima. Operând cu aceasta la fel ca cu prima, și aşa mai departe, vom obține o serie nelimitată de linii poligonale înschise, după o lege particulară. Perimetrelle  $p_1, p_2, \dots$  ale acestor linii vor crește, și cum sunt mai mici de cât perimetrul unei linii poligonale circumscrise arcului AB, ele vor tinde către o limită determinată L. De asemenea, perimetrelle  $P_1, P_2, \dots$  ale liniilor poligonale circumscrise arcului AB, vor tinde (No. 4, 1<sup>o</sup>) către aceeași limită L.

Așa fiind, să considerăm acum un sir de linii poligonale înschise în arcul AB, după o lege oarecare, și ale căror laturi să tindă către zero. Fie  $\hat{p}$  perimetrul uneia din aceste linii poligonale înschise și  $P$  perimetrul liniei poligonale circumscrise corespunzătoare.  $P$  fiind mai mare de cât oricare din perimetrelle  $p_1, p_2, \dots$ , va fi mai mare sau egal cu limita lor L. De altă parte,  $\hat{p}$  fiind mai mic de cât unul oarecare din perimetrelle  $P_1, P_2, \dots$ , va fi cel mult egal cu limita lor L.

Vom avea deci

$$\text{de unde} \quad \begin{aligned} \hat{p} &\leq L \leq P, \\ 1 &\leq \frac{L}{\hat{p}} \leq \frac{P}{\hat{p}}. \end{aligned}$$

Dar (No. 4, 1<sup>o</sup>)  $\frac{P}{\hat{p}}$  are ca limită pe 1. Deci, raportul  $\frac{L}{\hat{p}}$  este cuprins între 1 și o cantitate care tinde către, 1, are deci ca limită unitatea, adică și  $\hat{p}$  are ca limită pe L. Prin urmare, perimetrul unei linii poligonale înschise, ale cărui laturi tind către zero, are o limită determinată și independentă de legea de inscriere a liniei poligonale, astfel că lungimea unui arc de curbă AB este limită către care tinde perimetrul unei linii poligoale înschise în arcul AB, când laturile liniei poligonale înschise tind către zero.

**5. Raportul dintre un arc infinit mic și coarda sa.** Să considerăm un arc infinit mic  $M_1 M_2$  (Fig. 1) și fie  $T_2$  punctul de intersecție a tangentelor duse la extremitățile  $M_1$  și  $M_2$  ale arcului  $M_1 M_2$ . Avem

$$\text{coarda } M_1 M_2 < \text{arc } M_1 M_2 < M_1 T_2 + T_2 M_2,$$

de unde

$$1 < \frac{\text{arc } M_1 M_2}{\text{coarda } M_1 M_2} < \frac{M_1 T_2 + T_2 M_2}{M_1 S_2 + S_2 M_2}.$$

Dar, ultimul raport tinde (No. 4, 1<sup>o</sup>) către 1, când arcul  $M_1 M_2$  tinde către zero, deci raportul

$$\frac{\text{arc } M_1 M_2}{\text{coarda } M_1 M_2}$$

tinde către 1, când arcul  $M_1 M_2$  tinde către zero.

Deci, *raportul dintre arcul infinit mic și coarda sa tinde către 1 când arcul tinde către zero.*

In studiul proprietăților curbelor se ia ca infinit mic principal arcul infinit mic de curbă. Arcul infinit mic și coarda sa fiind infiniti mici echivalenți, vom lua, după împrejurări, ca infinit mic principal, fie arcul infinit mic, fie coarda corespunzătoare.

**6. Curbura intr'un punct. Cerc de curbură.** Să considerăm un punct  $M$  pe curba ( $M$ ) și punctul infinit vecin  $M'$  (Fig. 2). Fie  $K$  punctul de intersecție al tangentelor  $MT$  și  $M'T'$  la curbă în  $M$  și  $M'$ .

Unghiul  $\omega = TKT'$  format de tangentele în  $M$  și  $M'$  măsoară cantitatea cu care curba ( $M$ ) se depărtează în  $M$  de forma rectilinie, când trecem de la  $M$  la  $M'$ . Unghiul  $\omega$  se zice *unghiul de contingenta* în  $M$ , sau *curbura totală a arcului  $MM'$* .

Însemnând cu  $\alpha$  și  $\alpha + d\alpha$  unghiurile făcute cu o dreaptă fixă  $x'x$  de tangentele  $MT$  și  $M'T'$  în  $M$  și  $M'$ , se vede că  $\alpha + d\alpha = \alpha + \omega$ , de unde  $\omega = d\alpha$ . Deci, unghiul de contingenta este creșterea unghiului  $\alpha$  ce-l face tangentă în  $M$  cu o direcție fixă  $x'x$ .

Unghiul de contingenta este infinit mic de ordinul întâi, căci dacă ar fi de ordin superior, ar urma că creșterea unghiului

lui  $\alpha$  este infinit mic de ordin superior ordinului întâi, adică această creștere ar putea fi neglijată și deci unghiul  $\alpha$  ar rămâne același când se trece de la  $M$  la  $M'$ , adică curba între  $M$  și punctul infinit vecin  $M'$  ar fi linie dreaptă.

Deci, unghiul de contingenta este infinit mic de ordin su-

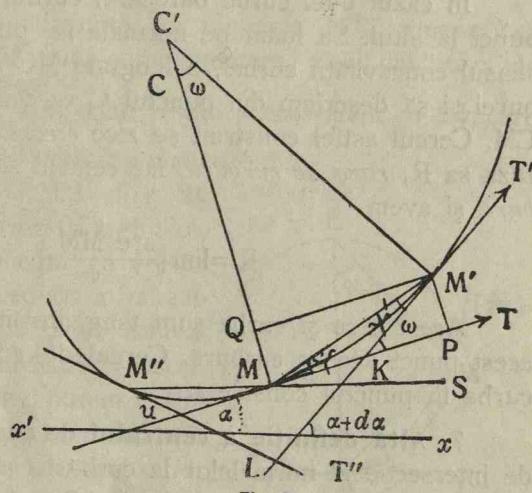


Fig. 2.

perior ordinului întâi, numai în puncte particulare ale curbei ( $M$ ) și vom presupune că  $M$  nu este unul din aceste puncte singulare ale curbei.

Pentru aceleasi motive, unghiul  $\psi = KMM'$ , făcut de coarda  $MM'$  cu tangenta în  $M$  este infinit mic de ordinul întâi.

Presupunând că  $\omega$  reprezintă arcul ce corespunde pe cercul cu raza 1 unghiului de contingenta, iar infinitii mici arc  $MM'$  și  $\omega$  fiind de același ordin, raportul

$$\frac{\omega}{\text{arc } MM'}$$

tinde către o limită, care se zice *curbura în punctul M*.

Când curba este un cerc (Fig. 3), avem  $\text{arc } MM' = R\omega$ , deci

$$\frac{\omega}{\text{arc } MM'} = \frac{1}{R} = \text{const.},$$

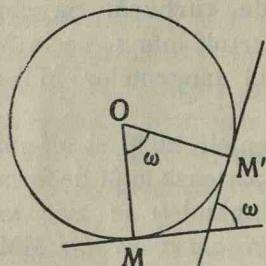


Fig. 3.

ceea ce probează că în acest caz curbura este constantă, iar raza cercului este inversă curburei, adică limita raportului  $\frac{\text{arc } MM'}{\omega}$ .

In cazul unei曲be oarecare, curbura variază de la un punct la altul. Să luăm pe normală în punctul  $M$  (Fig. 2), în sensul concavității curbei, o lungime  $MC$  egală cu inversa curburei și să descriem din punctul  $C$  ca centru un cerc cu raza  $CM$ . Cercul astfel construit se zice *cercul de curbură în M*, raza sa  $R$ , *raza de curbură*, iar centrul său,  $C$ , *centrul de curbură* și avem

$$R = \lim \left( \frac{\text{arc } MM'}{\omega} \right).$$

Acst cerc și curba sunt tangente în punctul  $M$  și au în acest punct aceeași curbură. Cercul de curbură caracterizează curba în punctul considerat.

**7. Altă definiție a centrului de curbură.** Fie  $C'$  punctul de intersecție al normalelor la curbă în punctele infinit vecine  $M$  și  $M'$  (Fig. 2). Să însemnăm cu  $Q$  proiecția punctului  $M'$  pe normală în  $M$ . Egalând valorile lui  $QM'$  din triunghiurile  $QMM'$  și  $C'QM'$ , avem

$$MM' \sin QMM' = C'M' \sin MC'M'.$$

Dar patrulaterul  $KMC'M'$  având unghiiurile din  $M$  și  $M'$

drepte (normalele sunt perpendiculare pe tangentă), urmează că  $MC'M' = \omega$ . Deci relația precedentă devine

$$MM' \cos \psi = C'M' \sin \omega,$$

de unde

$$C'M' = \frac{MM' \cos \psi}{\sin \omega} = \frac{MM'}{\text{arc } MM'} \cdot \frac{\omega}{\sin \omega} \cos \psi.$$

Dar

$$\lim \frac{MM'}{\text{arc } MM'} \rightarrow 1, \lim \frac{\omega}{\sin \omega} \rightarrow 1, \lim \cos \psi \rightarrow 1;$$

deci

$$\lim C'M' = \lim \frac{\text{arc } MM'}{\omega} = R,$$

adică  $C'M'$  tinde către raza de curbură în  $M$ , sau că punctul  $C'$  tinde către centrul de curbură în  $M$ .

Deci, *centrul de curbură într'un punct  $M$  este limita punctului de intersecție a normalei în  $M$  cu normala infinit vecină*.

**8. Cerc osculator.** Când punctul  $M'$  este infinit vecin de  $M$ , normalele  $MC'$  și  $M'C'$  (Fig. 2) pot fi considerate ca egale, deci triunghiul  $MC'M'$  isoscel, iar unghiul  $C'MM' = 90^\circ - \frac{\omega}{2}$ .

Dar  $C'M$  fiind perpendiculară pe tangentă  $MT$ , urmează că unghiurile  $\psi$  și  $C'MM'$  sunt complimentare, deci din punct de vedere infinitezimal,  $\psi$  egal cu  $\frac{\omega}{2}$ , sau  $\omega$  echivalent cu  $2\psi$ , care se poate scrie în mod convențional,  $\omega \rightarrow 2\psi$ .

Dar, în triunghiul  $KMM'$  (Fig. 2), unghiul  $\omega$  fiind exterior triunghiului, urmează că  $\omega$  să fie egal cu  $\psi + \psi'$ ; deci, din punct de vedere infinitezimal, unghiurile  $\psi$  și  $\psi'$  sunt echivalente,  $\psi - \psi'$ , triunghiul  $KMM'$  isoscel.

Acestea fiind stabilite, putem defini în mai multe feluri cercul de curbură.

1º Să considerăm, în primul rând, cercul variabil ce este tangent curbei în punctul  $M$  (Fig. 4) și ce trece prin punctul  $M'$ .  $ME$  fiind diametrul punctului  $M$ , avem

$$MM' = ME \sin \psi, \quad MM' = 2 MC \sin \psi, \quad MC = \frac{MM'}{2 \sin \psi}.$$

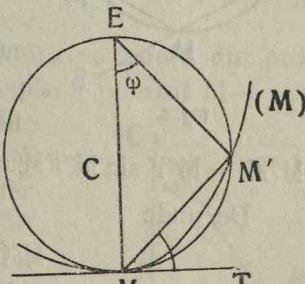


Fig. 4.

Deci

$$\lim MC = \lim \frac{MM'}{2 \sin \psi} = \lim \frac{MM'}{\text{arc } MM'} \frac{\text{arc } MM'}{2\psi} \frac{\psi}{\sin \psi}.$$

Dar  $2\psi$  este echivalent cu  $\omega$ ; deci

$$\lim MC = \lim \frac{\text{arc } MM'}{\omega} = R,$$

ceea ce probează că *cercul tangent în M și care trece prin punctul infinit vecin M'*, *tinde către cercul de curbură în M*.

2º Să luăm, de o parte și de alta a punctului M, arcele infinit mici,  $M''M$ ,  $MM'$  (Fig. 2). Unghiul de contingentă (curbura totală)  $T''LT'$  este egal cu suma unghiurilor de contingentă  $T''UT$ ,  $TKT'$ , ale arcelor  $M''M$ ,  $MM'$ . Dar triunghiurile  $M''UM$ ,  $MKM'$  pot fi considerate, din punct de vedere infinitezimal, ca isoscele, deci unghiurile  $M''MU$ ,  $KMM'$  echivalente cu jumătățile curburilor totale (unghiurilor de contingentă) ale arcelor  $M''M$ ,  $MM'$ , adică, suma lor,

$$\cancel{\angle} M''UM + \cancel{\angle} KMM' = \pi - \cancel{\angle} M''MM',$$

este echivalentă cu jumătatea unghiului de contingentă (a curburei totale) a arcului  $M''MM'$ . Deci, unghiul  $M''MM'$ , înscris în arcul  $M''M'$ , este suplimentul jumătății curburei totale a arcului  $M''M'$  (oricare ar fi M între punctele infinit vecine  $M''$  și  $M'$ ). Deci, unghiul  $SMM'$  este echivalent cu jumătatea curburei totale a arcului  $M''M'$ .

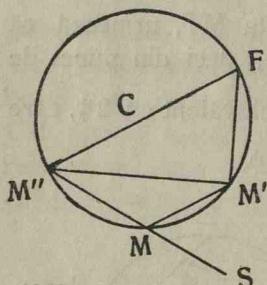


Fig. 5.

$$M''M' = M''F \sin M''FM' = 2M''C \sin M''MM' = 2M''C \sin SMM'.$$

De unde

$$M''C = \frac{M''M'}{2 \sin SMM'}.$$

Dar, am văzut că  $SMM'$  este echivalent cu jumătatea curburei totale a arcului  $M''M'$ . Înlocuind sinusul cu arcul, se vede că limita lui  $M''C$  este egală cu limita raportului dintre arcul  $M''M'$  și curbura totală a acestui arc, adică raza de curbură

în M, către care tind  $M''$  și  $M'$ . Deci, cercul ce trece prin punctul M și două puncte infinit vecine, tinde către cercul de curbură în M.

Cercul de curbură având în M trei puncte confundate cu curba, este complet determinat, căci un cerc este definit prin trei puncte. Cercul de curbură are cu curba în punctul M trei puncte confundate, are, după cum se mai spune, un contact de ordinul al doilea. Pentru acest motiv, cercul de curbură este *cercul osculator* în M.

In general, o curbă ( $\Gamma$ ), pentru a cărei determinare trebuie  $(n+1)$  puncte, este perfect determinată dacă are cu altă curbă ( $M$ ), în punctul M, un contact de ordinul  $n$ , adică  $(n+1)$  puncte confundate. Se zice atunci că curba ( $\Gamma$ ) este *osculatoare* curbei ( $M$ ) în punctul M. De ex., o dreaptă fiind definită prin două puncte, un cerc prin trei, o parabolă prin patru, o conică prin cinci puncte, etc., va exista, în fiecare punct al curbei, o dreaptă osculatoare având cu curba un contact de ordinul întâi (tangenta); un cerc osculator, având un contact de al doilea ordin; o parabolă osculatoare, având un contact de ordinul al treilea; o conică osculatoare, având un contact de ordinul al patrulea, etc.

Dar, se poate, în mod excepțional, în anumite puncte ale curbei considerate ( $M$ ), curba ( $\Gamma$ ) osculatoare curbei ( $M$ ), să aibă cu aceasta un contact mai mare cu o unitate de căt acela pe care îl cere gradul său de determinare; se zice atunci că curba ( $\Gamma$ ) este *supraosculatoare*. De ex., o dreaptă perfect determinată prin două puncte, poate, în anumite puncte, să aibă trei puncte confundate cu curba ( $M$ ); această dreaptă supraosculatoare este ceea ce se zice *tangentă staționară*; punctul său de contact este un *punct de inflexiune*.

**9. Studiul unei curbe în vecinătatea unuia din punctele sale.** Să considerăm pe o curbă plană punctul M și punctul infinit vecin  $M'$ . Fie T (Fig. 6) punctul de intersecție al tangentelor în M și  $M'$  la curba ( $M$ ), C punctul de intersecție a normalelor în punctele M și  $M'$ . Să însemnăm cu  $\omega$  unghiul de contingență și  $\psi$  și  $\psi'$  unghiiurile coardei MM' cu tangentele în M și  $M'$ .

Ne propunem să vedem ce fel de infiniti mici sunt elementele curbei determine în vecinătatea punctului M.

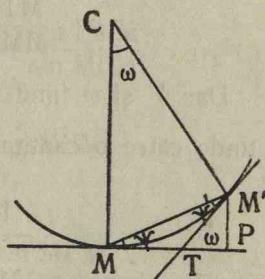


Fig. 6.

I. Infiniti mici de ordinul întâi. 1º Unghiul  $\psi$  făcut de tangentă cu coarda. Să ducem cercul ce trece prin  $M'$  și e tangent în  $M$  curbei date. La limită, acest cerc este cercul osculator în  $M$ , centrul său este punctul  $C$  de întâlnire a două normale infinit vecine, raza sa devine raza de curbură. Din punct de vedere infinitezimal, unghiul  $\omega$  este echivalent cu  $2\psi$ , triunghiul  $MCM'$  este isoscel.

Ducând diametrul punctului  $M$ , avem în acest cerc

$$MM' = 2MC \sin \psi, \quad \frac{\sin \psi}{MM'} = \frac{1}{2MC},$$

de unde

$$\frac{\psi}{\text{arc } MM'} = \frac{\psi}{\sin \psi} \frac{\sin \psi}{MM'} \frac{MM'}{\text{arc } MM'},$$

$$\frac{\psi}{\text{arc } MM'} = \frac{\psi}{\sin \psi} \frac{1}{2MC} \frac{MM'}{\text{arc } MM'}.$$

Deci

$$\lim \frac{\psi}{\text{arc } MM'} = \lim \frac{1}{2MC} = \frac{1}{2R}.$$

Deci  $\psi$  și arcul  $MM'$  sunt de același ordin atâtă timp cât  $R$  este finit și diferit de zero. Când raza de curbură se anulează într'un punct, acesta este un punct de întoarcere (rebrousement); când  $R \rightarrow \infty$ , avem în acel punct o inflexiune.

In același mod se arată că și unghiul  $\psi'$  este infinit mic de ordinul întâi.

2º Lungimile tangentelor  $MT$  și  $M'T$ . În adevăr, din triunghiul  $MTM'$ , avem

$$\frac{MT}{MM'} = \frac{\sin \psi'}{\sin MTM'} = \frac{\sin \psi'}{\sin \omega}.$$

De unde

$$\frac{MT}{MM'} = \frac{\sin \psi'}{\psi'} \frac{\omega}{\sin \omega} \frac{\psi'}{\omega}.$$

Dar  $\psi'$  și  $\omega$  fiind infiniti mici de ordinul întâi, raportul  $\frac{\psi'}{\omega}$  tinde către o cantitate finită și deci

$$\lim \frac{MT}{MM'} = \lim \frac{\psi'}{\omega},$$

ceea ce probează că  $MT$  și  $MM'$  sunt de același ordin, sau că  $MT$  și arcul  $MM'$  sunt de același ordin.

3º Suma tangentelor  $MT$  și  $M'T$  fiind suma a doi infiniti mici de ordinul întâi, este infinit mic de ordinul întâi, ca și arcul  $MM'$  și coarda  $MM'$ . Trebuie făcută o distincție între ei, căci din triunghiul  $MTM'$ , avem

$$\text{coarda } MM' < \text{arc } MM' < MT + M'T.$$

4º Proiecția coardei pe o direcție neperpendiculară pe tangentă în  $M$  este un infinit mic de ordinul întâi. În adevăr,  $MF$  fiind proiecția coardei  $MM'$  pe direcția  $Mx$  (Fig. 7), avem

$$MF = MM' \cos FMM', \quad \frac{MF}{MM'} = \cos FMM'.$$

Dar, la limită, unghiul  $M'MF$  tinde către unghiul  $TMx$  ce-l face tangenta în  $M$  cu direcția dată. Deci

$$\lim \frac{MF}{MM'} = \cos TMx.$$

Dacă direcția  $Mx$  nu este perpendiculară pe tangentă în  $M$ , unghiul  $TMx \neq 90^\circ$ , raportul  $\frac{MF}{MM'}$  tinde către o câtîme finită și diferită de zero; proiecția  $MF$  a coardei  $MM'$  este infinit mic de același ordin cu  $MM'$ , deci de același ordin cu arcul  $MM'$ .

Când direcția  $Mx$  este perpendiculară pe tangentă în  $M$ ,  $\cos TMx \rightarrow 0$ , raportul  $\frac{MF}{MM'} \rightarrow 0$ , deci proiecția  $MF$  este de ordin superior lui  $MM'$ .

II. Infiniti mici de ordinul al doilea. 1º Distanța ortogonală sau oblică de la un punct al curbei la tangentă într-un punct infinit vecin.  $M$  și  $M'$  fiind două puncte infinit vecine (Fig. 6), fie  $P$  intersecția tangentei în  $M$  cu o dreaptă dusă prin  $M'$ , paralelă cu direcția  $\Delta$ . Din triunghiul  $MM'P$ , avem

$$\frac{M'P}{\sin PMM'} = \frac{MM'}{\sin MPM'}, \quad \frac{M'P}{MM'} = \frac{\sin PMM'}{\sin MPM'},$$

$$\frac{M'P}{MM'^2} = \frac{\sin PMM'}{\sin MPM'} \frac{PMM'}{MM'} \frac{1}{\sin MPM'}.$$

Deci

$$\lim \frac{M'P}{MM'^2} = \lim \frac{\sin PMM'}{\sin MPM'} \lim \frac{1}{\sin MPM'}.$$

Dar, la limită, unghiul  $MPM'$  tinde către unghiul făcut de

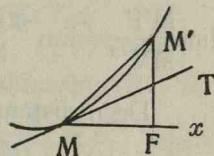


Fig. 7.

tangenta în  $M$  cu direcția  $\Delta$ , deci  $\sin MPM'$  tinde către  $\sin(MT, \Delta)$ , iar  $PMM'$  și  $MM'$  fiind infiniti mici de același ordin, raportul lor este o câtîme finită. Deci raportul  $\frac{M'P}{MM'^2}$  tinde către o cantitate finită și diferită de zero, adică distanța oblică  $M'P$ , de la punctul  $M'$  la tangenta în punctul infinit vecin  $M$ , este infinit mic de ordinul al doilea.

In cazul distanței ortogonale, avem (Fig. 6)

$$\lim \frac{M'P}{MM'^2} = \lim \frac{\cancel{PMM'}}{MM'} = \frac{1}{2R}, \quad \lim \frac{M'P}{MP^2} = \lim \frac{M'P}{(MM' \cos \psi)^2} = \frac{1}{2R}.$$

Deci, distanța  $M'P$  de la punctul  $M'$  la tangenta infinit vecină, este echivalentă cu  $\frac{(\text{arc } MM')^2}{2R}$ , adică

$$M'P \sim \frac{s^2}{2R},$$

$s$  fiind arcul infinit mic  $MM'$ , iar  $R$  raza de curbură în  $M$ .

De asemenea,

$$M'P \sim \frac{1}{2R} \cdot \overline{MP}^2, \quad M'P \sim \lambda \cdot \overline{MP}^2,$$

$\lambda$  fiind o cantitate care nu se anulează în punctul  $M$ .

$2^o$  Diferența celor două tangente,  $MT - M'T$ . În adevăr, din triunghiul  $MTM'$  (Fig. 6), avem

$$\frac{MT}{MM'} = \frac{\sin \psi'}{\sin \omega}, \quad MT = MM' \frac{\sin \psi'}{\sin \omega}, \quad M'T = MM' \frac{\sin \psi}{\sin \omega}.$$

Deci

$$MT - M'T = \frac{MM'}{\sin \omega} (\sin \psi' - \sin \psi) = \frac{MM'}{\sin \omega} 2 \sin \frac{\psi' - \psi}{2} \cos \frac{\psi' + \psi}{2}.$$

Dar  $\frac{\psi + \psi'}{2}$  este echivalent cu  $\frac{\omega}{2}$ ; deci, din punct de vedere infinitezimal, avem

$$MT - M'T \sim 2 \frac{MM'}{\sin \omega} \sin \frac{\psi' - \psi}{2} \cos \frac{\omega}{2}.$$

$MM'$  și  $\omega$  fiind de ordinul întâi, iar  $\cos \frac{\omega}{2} \rightarrow 1$ , urmează că  $(MT - M'T)$  este de același ordin cu  $\sin \frac{\psi' - \psi}{2}$ , sau cu  $(\psi' - \psi)$ .

Dar, am văzut (No. 9, I, 1<sup>o</sup>) că

$$\lim \frac{\psi}{MM'} = \frac{1}{2R}, \quad \lim \frac{\psi'}{MM'} = \frac{1}{2R'},$$

$R$  și  $R'$  fiind razele de curbură în  $M$  și  $M'$ . Deci

$$\frac{\psi}{MM'} = \frac{1}{2R} + \varepsilon, \quad \frac{\psi'}{MM'} = \frac{1}{2R'} + \varepsilon',$$

astfel că

$$\frac{\psi' - \psi}{MM'} = \frac{1}{2R'} - \frac{1}{2R} + \varepsilon' - \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{R - R'}{RR'} + \varepsilon' - \varepsilon.$$

Dar, la limită, când  $M'$  se apropie de  $M$ , diferența  $(R' - R)$  a razelor de curbură tinde către zero; deci  $\frac{\psi' - \psi}{MM'} \rightarrow 0$ , adică  $(\psi' - \psi)$  este infinit mic de ordinul al doilea cel puțin față de  $MM'$  și deci și echivalentul său  $(MT - M'T)$  este infinit mic de ordinul al doilea cel puțin.

3<sup>o</sup> Să considerăm două curbe  $(C)$  și  $(C')$  tangente în punctul  $M$  (Fig. 8). Fie  $N$  și  $N'$  punctele lor de intersecție cu o secantă neparalelă cu tangentă în  $M$ . Dacă  $MD$  perpendiculară pe  $NN'$ , avem

$$\begin{aligned} NN' &= ND - N'D = \\ MD \operatorname{tg} NMD - MD \operatorname{tg} N'MD, \\ \frac{NN'}{MD} &= \operatorname{tg} NMD - \operatorname{tg} N'MD. \end{aligned}$$

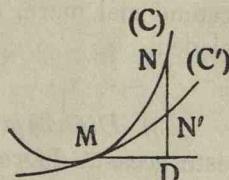


Fig. 8.

Dar, am văzut că proiecția  $MD$  a coardei  $MM'$  este infinit mic de ordinul întâi, și cum, la limită, când  $N$  și  $N'$  se apropie de  $M$ , unghiurile  $NMD$ ,  $N'MD$  tind către unghiul făcut de tangentă comună în  $M$  cu direcția perpendiculară pe  $NN'$ , urmăză că limita raportului  $\frac{NN'}{MD} \rightarrow 0$ , adică  $NN'$  este infinit mic de ordinul al doilea cel puțin.

Așa dar, fiind date două curbe  $(C)$  și  $(C')$ , tangente în  $M$ , tăindu-le în  $N$  și  $N'$  cu o dreaptă neparalelă cu tangentă în  $M$ , distanța  $NN'$  dintre cele două puncte infinit vecine cu  $M$  este infinit mic de ordinul al doilea cel puțin.

III. Infiniti mici de ordinul al treilea. 1<sup>o</sup> Diferența dintre suma tangentelor și coarda  $MM'$  (Fig. 9). Notând cu  $D$  piciorul perpendicularării din  $T$  pe coarda  $MM'$ , avem

$$MD = MT \cos \psi, \quad DM' = TM' \cos \psi',$$

$$MM' = MT \cos \psi + M'T \cos \psi'.$$

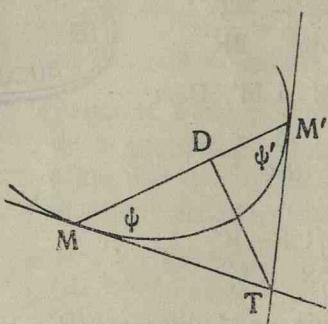


Fig. 9.

Dar  $\psi$  și  $\psi'$  fiind infiniti mici, atunci din punct de vedere infinitesimal, avem

$\cos \psi \sim 1 - \varepsilon_2$ ,  $\cos \psi' \sim 1 - \varepsilon'_2$ ,  $\varepsilon_2$  și  $\varepsilon'_2$  fiind infiniti mici de ordinul al doilea. Deci

$$MM' \sim MT(1 - \varepsilon_2) + M'T(1 - \varepsilon'_2), \\ MT + M'T - MM' \sim MT \cdot \varepsilon_2 + M'T \cdot \varepsilon'_2.$$

Dar,  $MT$  și  $M'T$  fiind infiniti mici de ordinul întâi, produsele  $MT \cdot \varepsilon_2$ ,  $M'T \cdot \varepsilon'_2$  sunt de ordinul al treilea și deci suma lor este de ordinul al treilea, astfel că avem

$$MT + M'T - MM' \sim \varepsilon_3.$$

2º Diferența dintre suma tangentelor și arcul  $MM'$ . În adevară, dacă în relația precedentă înlocuim coarda  $MM'$  cu o cătimpie mai mare, arcul  $MM'$ , diferența devine cu atât mai mică și deci

$$MT + M'T - \text{arc } MM' \sim \varepsilon'_3.$$

3º Diferența dintre arc și coardă. Pentru a vedea care este această diferență, să substituim arcului infinit mic  $MM'$  al curbei (M) un arc de cerc ce trece prin  $M$ ,  $M'$  și un al treilea punct  $M''$  între cele două, infinit vecin de cele două.

Să considerăm punctul  $M''$  în pozițiile succesive ce le poate ocupa pe arcul  $MM'$  de la  $M$  la  $M'$  (Fig. 10). Cercul ce trece prin punctele  $M$ ,  $M''$ ,  $M'$  are centrul pe perpendiculara pe mijlocul lui  $MM'$ . Când  $M''$  este în  $M$ , centrul  $c$  al acestui cerc este la intersecția acestei perpendicularare cu normala în  $M$ ; cercul este tangent curbei în  $M$ , arcul de cerc  $MM'$ , în felul cum am făcut figura, este mai mare decât arcul curbei  $MM'$ . Când  $M''$  este în  $M'$ , centrul  $c'$  al cercului este la intersecția perpendiculararei cu normala în  $M'$ ; cercul este tangent curbei în  $M'$ , arcul  $MM'$  al acestui cerc este mai mic de cît arcul curbei  $MM'$ .

Există, deci, între cele două poziții extreme ale acestui

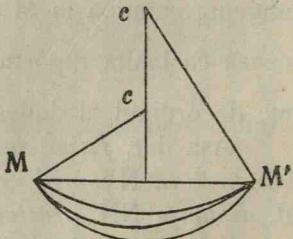


Fig. 10.

cerc, o poziție intermedieră, pentru care cercul și curba se traversează, astfel că arcul  $MM'$  pe cerc și pe curbă să aibă lungimi egale. Centrul acestui cerc este situat în interiorul segmentului  $cc'$ , raza sa este cuprinsă între razele de curbură corespunzătoare în  $M$  și  $M'$ . Vom zice că *acest cerc este echivalent cu curba în toată întinderea arcului  $MM'$* .

Arcul  $MM'$  fiind infinit mic, cele trei puncte infinit vecine,  $M$ ,  $M''$ ,  $M'$ , determină un segment de cerc capabil de un unghi egal cu jumătatea curburei acestui arc (No. 8, 2<sup>o</sup>), care poate fi substituit arcului de curbă în orice chestie în care vor interveni lungimile  $s$  și  $l$  a arcului și coardei.

Acestea fiind stabilite, fie  $\omega$  unghiul de contingenta, sau curbura totală a arcului  $MM'$ . În cercul echivalent, a căruia rază s'o notăm cu  $\rho$ , avem

$$MM' = 2\rho \sin \frac{\omega}{2}, \quad \text{arc } MM' = \rho\omega.$$

De unde

$$\text{arc } MM' - MM' = 2\rho \left( \frac{\omega}{2} - \sin \frac{\omega}{2} \right).$$

Dar, diferența dintre un arc infinit mic și sinusul său are ca parte principală  $\frac{1}{6}$  din cubul arcului, adică  $\frac{1}{6} \left( \frac{\omega}{2} \right)^3 = \frac{\omega^3}{48}$ . Deci, partea principală a diferenței  $\text{arc } MM' - MM'$  este

$$2\rho \frac{\omega^3}{48} = \rho \frac{\omega^3}{24}.$$

Însă  $\rho\omega = s$ , deci, din punct de vedere infinitezimal, putem scrie

$$\text{arc } MM' - \text{coarda } MM' \sim \frac{s^3}{24\rho^2}, \quad s = \text{arc } MM'.$$

Dar,  $\rho$  este cuprins între razele de curbură în  $M$  și  $M'$ ; deci, diferența dintre arc și coardă,

$$\text{arc } MM' - \text{coarda } MM'$$

este echivalentă cu

$$\frac{s^3}{24R^2},$$

$R$  fiind raza de curbură în  $M$ , și se vede că această diferență este infinit mic de ordinul al treilea.

4<sup>o</sup> Am arătat că distanța ortogonală sau oblică de la un

punct la tangentă într'un punct infinit vecin este infinit mic de ordinul al doilea.

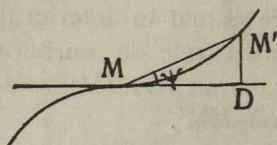


Fig. 11.

În cazul unui punct de inflexiune (Fig. 11), această cantitate  $M'D$  devine

$$M'D = MM' \sin \psi.$$

Dar, în acest caz,  $\psi$  este infinit mic de ordinul al doilea cel puțin și deci și  $\sin \psi$  este de ordinul al doilea cel puțin; cum  $MM'$  este de ordinul întâi, urmează că produsul  $MM' \sin \psi$  este infinit mic de ordinul al treilea cel puțin.

5º Diferența dintre normalele în două puncte infinit vecine. C fiind punctul de intersecție al normalelor în punctele  $M$  și  $M'$  (Fig. 12), avem

$$\frac{MC}{\sin MM'C} = \frac{M'C}{\sin M'MC}, \quad \frac{MC}{M'C} = \frac{\sin MM'C}{\sin M'MC}.$$

Dar

$$MM'C = \frac{\pi}{2} - \psi', \quad M'MC = \frac{\pi}{2} - \psi.$$

Deci

$$\frac{MC}{M'C} = \frac{\cos \psi'}{\cos \psi},$$

de unde

$$\frac{MC - M'C}{M'C} = \frac{\cos \psi' - \cos \psi}{\cos \psi},$$

$$MC - M'C = \frac{M'C}{\cos \psi} 2 \sin \frac{\psi - \psi'}{2} \sin \frac{\psi + \psi'}{2}.$$

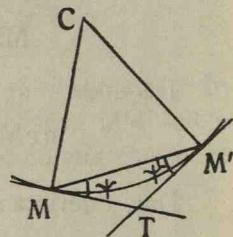


Fig. 12.

Dar,  $M'C$  tinde către raza de curbură în  $M$ , care în general este finită, afară de cazul punctului de inflexiune;  $\cos \rightarrow 1$ ;  $\sin \frac{\psi + \psi'}{2}$  este infinit mic de ordinul întâi;  $\sin \frac{\psi - \psi'}{2}$  este de același ordin cu  $(\psi - \psi')$ , care este (No. 9, II, 2º) de ordinul al doilea. Deci, produsul este de ordinul al treilea, așa că diferența normalelor în două puncte infinit vecine este infinit mic de ordinul al treilea.

*Observare.* Am presupus până acum că punctul  $M$ , în vecinătatea căruia studiam curba, este un punct simplu al curbei, adică unghiul  $PMM'$ , al coardei  $MM'$  cu tangentă în  $M$ , este infinit mic de ordinul întâi (Fig. 13). Distanța  $M'P$  de la

punctul  $M'$  la tangenta în punctul infinit vecin  $M$  este infinit mic de ordinul al doilea. Se zice că în acest caz curba și tangentă au în punctul  $M$  un contact de ordinul întâi și avem, din punct de vedere infinitezimal,

$$M'P \sim \lambda \overline{MP}^2,$$

$\lambda$  fiind o funcție de  $MP$ , care nu se anulează pentru  $MP = 0$  (în  $M$ ).

Când

$$M'P \sim \lambda \overline{MP}^{n+1},$$

se zice că curba și tangentă au un contact de ordinul  $n$ , adică  $M'P$  este infinit mic de ordinul  $(n+1)$ . În cazul inflexiunii este contact de ordin superior lui 1.

Să însemnăm cu  $\omega$  unghiul de contingă, adică curbura totală a arcului  $MM'$ . Știm că acest unghi  $\omega$  este variația sau diferențiala unghiului ce-l face tangentă în  $M$  cu o direcție fixă; deci, din punct de vedere infinitezimal,  $\operatorname{tg}\omega$  poate fi considerat ca diferențiala tangentei unghiului  $PMM'$ .

Dar,

$$\operatorname{tg} \not\propto PMM' = \frac{M'P}{MP}, \quad \operatorname{tg} PMM' \sim \lambda \overline{MP}^n.$$

Deci

$$\operatorname{tg}\omega \sim \frac{d(M'P)}{d(MP)} \sim \frac{d(\lambda \overline{MP}^{n+1})}{d(MP)} \sim \lambda(n+1) \overline{MP}^n \sim (n+1) \operatorname{tg} \not\propto PMM'.$$

Prin urmare, considerând numai părțile principale, avem, din punct de vedere infinitezimal,

$$\omega \sim (n+1) \not\propto PMM'.$$

Triunghiul  $QMM'$  (Fig. 13) nu mai este isoscel ca în cazul punctului ordinat, ci unghiul  $MM'Q$  este echivalent cu  $n$  ori unghiul  $PMM'$ .

**10. Alte expresii ale razei de curbură.** 1º Să considerăm cercul osculator în punctul  $M$  la curba  $(M)$  (Fig. 14). Fie  $N$  un punct vecin de  $M$  pe tangentă  $MT$  la curba  $(M)$ . Dia metrul cercului osculator ce trece prin  $N$  tăie curba în  $M'$ , iar cercul în  $M''$  și  $D$ .

Puterea punctului  $N$  față de cercul  $C$  fiind  $\overline{MN}^2$  sau  $NM''.ND$ , avem

$$(6) \quad \overline{MN}^2 = NM''(NM'' + 2R),$$

$R$  fiind raza de curbură.

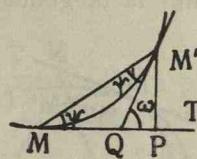


Fig. 13.

Dar  $NM''$  este distanță oblică de la un punct  $M''$  al cercului la tangentă în punctul infinit vecin  $M$ . Se știe (No. 9, II, 1<sup>o</sup>) că distanță oblică  $NM''$  este infinit mic de ordinul al doilea. Dezvoltând formula (6), se poate neglijă  $\overline{NM''}^2$ , care este infinit mic de ordinul al patrulea și avem

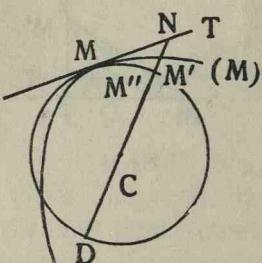


Fig. 14.

$$\overline{MN}^2 \leftarrow 2NM''.R,$$

de unde

$$(7) \quad R \leftarrow \frac{\overline{MN}^2}{2NM''}.$$

Dar,  $NM'' - NM' = M'M''$  este distanță oblică a două puncte infinit vecine a două curbe tangente în  $M$  (cercul osculator și curba). Deci (No. 9, II, 3<sup>o</sup>)  $M'M''$  este infinit mic de ordinul al doilea cel puțin, se poate înlocui  $NM''$  cu  $NM'$  și deci formula (7) devine

$$R \leftarrow \frac{\overline{MN}^2}{2NM'}.$$

Așa dar, raza de curbură într'un punct este echivalentă cu raportul dintre pătratul segmentului  $MN$  determinat pe tangentă în  $M$  de normală în punctul infinit vecin  $M'$ , și de două ori distanța  $NM'$  de la punctul infinit vecin  $M'$  la tangentă, măsurată pe normală în  $M'$ .

2<sup>o</sup> Pentru a găsi altă expresie a razei de curbură, să ducem din punctul infinit vecin  $M'$  al curbei (M) (Fig. 15) o perpendiculară pe tangentă în  $M$ , pe care o tăiem în  $N$ , iar cercul osculator în punctul  $P$  (cel mai apropiat de  $M$ ).  $MD$  fiind diametrul cercului osculator, avem din triunghiul dreptunghic MPD,

$$\overline{PQ}^2 = MQ \cdot QD = MQ(2R - MQ), \quad \overline{MN}^2 = NP(2R - NP).$$

Dar  $NP$  fiind infinit mic de ordinul al doilea,  $\overline{NP}^2$  este infinit mic de ordinul al patrulea, pe care neglijându-l, avem

$$\overline{MN}^2 \leftarrow 2NP.R, \quad R \leftarrow \frac{\overline{MN}^2}{2NP}.$$

Cum  $M'P$  este (No. 9, II, 3<sup>o</sup>) infinit mic de ordinul al doilea, se poate înlocui  $NP$  cu  $NM'$  și deci formula

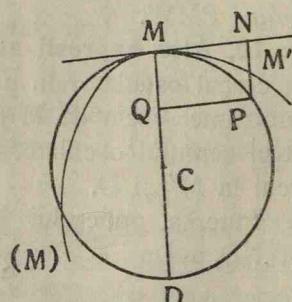


Fig. 15.

precedentă devine

$$(8) \quad R \leftarrow \frac{\overline{MN}^2}{2\overline{NM}'},$$

adică, raza de curbură este echivalentă cu raportul dintre părțile segmentului de pe tangentă și de două ori distanța ortogonală pe tangentă, de la tangentă la curbă.

**11. Alte proprietăți ale cercului de curbură.** Să considerăm cercul ( $\Gamma$ ) tangent în  $M$  la curba ( $M$ ) (Fig. 16) și fie  $m$ ,  $M'$ ,  $P$  intersecțiile cu o perpendiculară pe tangentă în  $M$  a cercului ( $\Gamma$ ), a curbei ( $M$ ) și a tangentei  $MT$ .

Să însemnăm cu  $\rho$  și  $R$  razele de curbură în  $M$  ale cercului și curbei. Observând formula (8), aceste raze sunt date de

$$\rho \leftarrow \frac{\overline{MP}^2}{2mP}, \quad R \leftarrow \frac{\overline{MP}^2}{2M'P},$$

de unde

$$mM' = mP - M'P \leftarrow \frac{1}{2} \left( \frac{\overline{MP}^2}{\rho} - \frac{\overline{MP}^2}{R} \right) \leftarrow \frac{\overline{MP}^2}{2} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right).$$

Stim că  $MP$  este infinit mic de ordinul întai. Deci, câtă vreme  $\rho \neq R$ , adică cercul ( $\Gamma$ ) nu este cercul osculator, distanța  $mM'$  dintre cercul ( $\Gamma$ ) și curbă este infinit de ordinul al doilea. Această distanță este de ordinul al treilea cel puțin când  $\rho=R$ , adică în cazul când cercul ( $\Gamma$ ) devine cercul osculator în  $M$ .

Deci, dintre toate cercurile tangente în  $M$  la curba ( $M$ ), cercul osculator se apropie cel mai mult de curba ( $M$ ) în punctul  $M$ , fiindcă distanța de la un punct al lui, vecin cu  $M$ , la curba ( $M$ ), este infinit mic de ordinul al treilea.

Această distanță este infinit mic de ordinul al treilea în raport cu  $MP$ . Deci, această distanță depinde de  $\overline{MP}^3$  și deci își schimbă semnul odată cu  $MP$ , adică, parcurgând curba ( $M$ ), distanța schimbă semnul în  $M$ , ceea ce însemnează că, înainte de  $M$ , cercul osculator este interior curbei, iar după  $M$ , exterior sau interior, cu alte cuvinte, cercul osculator traversează curba în punctul considerat.

## CURBE ÎNFAȘURĂTOARE.

**12. Curbe înfașurătoare.** Să considerăm o curbă ( $C$ ) variabilă, care se deplasează continuu ocupând diferite poziții în

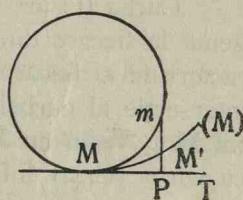


Fig. 16.

plan (Fig. 17). Însemnând cu  $M_k$  unul din punctele de intersecție a două curbe infinit vecine  $(C_{k-1})$  și  $(C_k)$  din familia  $(C)$ , să presupunem că acest punct tinde către o limită determinată  $m_k$ .

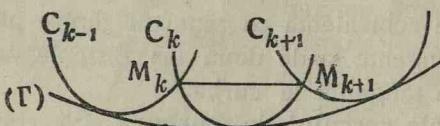


Fig. 17.

Punctul  $m_k$  se zice *punctul caracteristic* al curbei  $(C_k)$ . Locul punctelor characteristic  $m_k$  se zice curba infășurătoare  $(\Gamma)$  a curbelor  $(C)$ .

Curba  $(\Gamma)$  are o proprietate interesantă și anume este tangentă la fiecare din curbele familiei  $(C)$ , respectiv în punctul caracteristic al fiecărei curbe  $(C)$ . În adevăr, fie  $M_k$  punctul de intersecție al curbelor vecine  $(C_{k-1})$ ,  $(C_k)$ ; să considerăm punctul  $M_{k+1}$  vecin cu  $M_k$ , și care este la intersecția curbei  $(C_k)$  cu curba  $(C_{k+1})$  infinit vecină. Când curbele  $(C_{k-1})$  și  $(C_{k+1})$  tinde către curba  $(C_k)$ , coarda  $M_k M_{k+1}$  tinde către tangentă în punctul  $m_k$  al infășurătoarei  $(\Gamma)$ , care este locul punctelor  $M_k$ . Dar  $M_k M_{k+1}$  fiind coardă și în curba  $(C_k)$ , va tinde la limită, către tangentă la curba  $(C_k)$  în punctul limită al lui  $M_k$ , adică în  $m_k$ . Deci, curbele  $(C_k)$  și  $(\Gamma)$  sunt tangente în punctul  $m_k$ . Așa dar, curba  $(\Gamma)$  este infășurătoarea curbelor  $(C_k)$ .

**13. Desfășurata unei curbei plane.** Infășurătoarea  $(\Gamma)$  a normalelor unei curbe date  $(C)$  se zice *desfășurata* curbei  $(C)$ . Punctul caracteristic al unei normale în punctul  $M$  al curbei  $(C)$  este centrul de curbură  $\mu$  în punctul  $M$ , ca fiind intersecția normalei în  $M$  cu cea infinit vecină (Fig. 18). Curba  $(C)$  se zice *desfășurătoarea* curbei  $(\Gamma)$ .

Curba desfășurată are o proprietate caracteristică. În adevăr, să considerăm două normale vecine  $M\mu$ ,  $M'\mu'$ , ale curbei  $(C)$  și  $\mu$  și  $\mu'$  punctele lor de contact cu desfășurata  $(\Gamma)$ . Însemnând cu  $P$  intersecția normalelor, avem

$$\begin{aligned} M'\mu' - M\mu &= \\ (M'P + P\mu') - (MP + P\mu) &= \\ M'P - MP + (P\mu' + P\mu). \end{aligned}$$

Dar, am văzut (No. 9, III, 5º) că diferența  $(M'P - MP)$  a două normale infinit vecine este in-

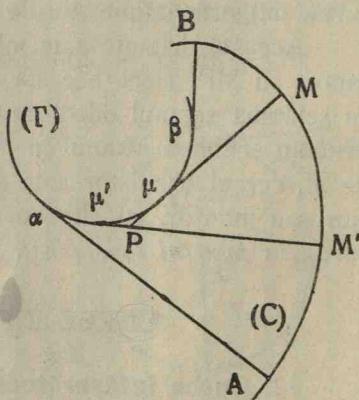


Fig. 18.

finit mic de ordinul al treilea; deci, se poate neglija și putem înlocui  $(M'\mu' - M\mu)$  cu  $(P\mu' + P\mu)$ .

Însă, am văzut (No. 9, III, 2<sup>o</sup>) că, pentru curba ( $\Gamma$ ), diferența dintre suma tangentelor  $(P\mu' + P\mu)$  și arcul  $\mu\mu'$  este infinit mic de ordinul al treilea. Se poate deci înlocui  $(P\mu' + P\mu)$  cu arcul  $\mu\mu'$  al desfășuratei. Deci, din punct de vedere infinitezimal, avem

$$M'\mu' - M\mu \leftarrow \text{arc } \mu\mu',$$

sau

$$d(M\mu) = d(\mu),$$

adică variația normalei  $M\mu$  este egală cu variația arcului al desfășuratei ( $\mu$ ).

Integrând de la punctul A al curbei (C) până la punctul M, avem

$$A\alpha - M\mu = \text{arc } \alpha\mu,$$

adică, lungimea unui arc al desfășuratei este egală cu diferența razelor de curbură corespunzătoare ale desfășurătoarei.

Rezultă de aci un procedeu de construcție al desfășurătoarei. Să ne închipuim un fir flexibil și inextensibil fixat cu una din extremitățile sale în punctul  $\alpha$  al desfășuratei, înfășurându-se pe arcul  $\alpha\beta$  și întins în linie dreaptă după tangentă  $\beta B$ . Dacă lungimea acestui fir este astfel că extremitatea sa să fie în B, va fi destul a-l desfășura înăndând mereu întins, pentru ca extremitatea sa cea liberă să vie să coincidă cu toate punctele arcului AB ale desfășurătoarei.

Această proprietate justifică numele de desfășurată dată curbei ( $\Gamma$ ), locul centrelor de curbură a curbei (C).

14. Să observăm că desfășurătoarea, curba (C), descrisă de extremitatea firului, este traectoria ortogonală a tangentelor la desfășurată, curba ( $\Gamma$ ) (adică tăie ortogonal aceste tangente). În adevăr, să presupunem că firul, a cărui o extremitate este în  $\alpha$ , și care este întins pe arcul  $\alpha\beta$  al desfășuratei, are o lungime determinată, cealaltă extremitate fiind în B. Desfășurându-l și înăndându-l întins, se obțin pozițiile  $M, M', \dots$  ale extremității sale (Fig. 18). La limită, lungimile  $MP$  și  $M'P$  sunt egale, deci triunghiul  $MPM'$  poate fi considerat ca isoscel și deci, la limită, unghiurile  $PMM' = MM'P \rightarrow 90^\circ$ . Dar, la limită,  $MM'$  tinde către tangentă în M la curba (C) descrisă de extremitatea firului. Deci, această tangentă este perpendiculară pe dreapta  $PM$ , cu

alte cuvinte, curba  $(C)$ , descrisă de extremitatea firului, este traectoria ortogonală a tangentelor la curba  $(\Gamma)$ .

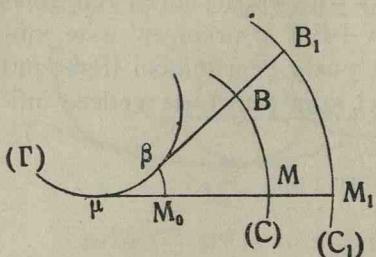


Fig. 19.

Aveam

$$M\mu - B\beta = \text{arc } \mu\beta, \quad M_1\mu - B_1\beta = \text{arc } \mu\beta,$$

urmează deci

$$M\mu - B\beta = M_1\mu - B_1\beta,$$

$$M\mu - B\beta = M_1M + M\mu - (B\beta + B_1B),$$

$$BB_1 = MM_1.$$

Deci, curba  $(C_1)$  se obține din curba  $(C)$ , luând pe normalele la curba  $(C)$  aceeași lungime. *Curbele desfășurătoare*  $(C)$  și  $(C_1)$  sunt curbe paralele.

*Observare.* Proprietatea desfășuratei aduce problema calculului lungimii unui arc dintr-o curbă la determinarea unei desfășurătoare a acestei curbe. Dacă se consideră desfășurătoarea curbei  $(\Gamma)$  ce trece prin punctul  $\beta$  (Fig. 19) al curbei considerate, arcul  $\mu\beta$  al acestei curbe este egal cu segmentul rectiliniu  $\mu M_0$  ( $\beta M_0$  fiind arcul corespunzător din desfășurătoare).

15. Asupra desfășuratelor și desfășurătoarelor avem următoarele proprietăți.

1º Dacă curba desfășurătoare întâlneste desfășurata, desfășurătoarea are un punct de întoarcere de specia întâi (Fig. 20). Aceasta se poate ușor observa, considerând normalele înainte de punctul A de întâlnire al desfășuratei cu desfășurătoarea. Se obține, astfel, ramura  $(C_1)$  a desfășurătoarei, tangentă în A la normala în A la desfășurata  $(\Gamma)$ . Pentru normalele dincolo de A, corespunde altă ramură  $(C_2)$  a desfășurătoarei, tangentă în A normalei în A la curba  $(\Gamma)$ . Deci curba desfășurătoare are în punctul A un punct de întoarcere de specia întâi.

2º Când curba desfășurătoare prezintă un vârf, un punct underaza de curbură este maximă sau minimă, și corespunde pe desfășurată un punct de înapoere de specia

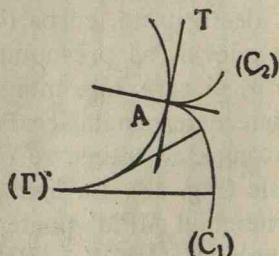


Fig. 20.

întâi (Fig. 21). A fiind vîrful curbei desfășurătoare, îi corespunde pe desfășurată punctul  $\alpha$ . Plecând de la punctul A pe curba (C), raza de curbură crește, în A raza de curbură este un minimum.

De ex., desfășurata ( $\Gamma$ ) a elipsei (E) are patru puncte de întoarcere de specia întâi (Fig. 22), căci elipsa are patru vîrfuri. Curba (E) este o desfășurătoare a curbei ( $\Gamma$ ). Considerând mai multe desfășurătoare ale curbei ( $\Gamma$ ), unele sunt interioare acestei curbe, altele exterioare. Cele exterioare nu întâlnesc curba, sunt curbe paralele cu elipsa; cele interioare pot întâlni curba ( $\Gamma$ ) și pot prezenta puncte de întoarcere.

**16. Aplicație.** Să studiem înfășurătoarea<sup>(1)</sup> unui cerc variabil al cărui centru C descrie curba (C) (Fig. 23). Considerând o poziție infinit vecină a cercului, coarda lor comună este perpendiculară pe linia centrelor. Punctele de contact ale cercului cu înfășurătoarea sa sunt limitele A și B ale punctelor de intersecție ale cercului C cu această coardă comună. Prin urmare înfășurătoarea este compusă din două ramuri de curbă, (A) și (B).

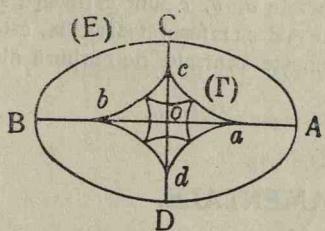


Fig. 22.

(C); mai mult, tangentele în A și B la curbele (A) și (B) se tăie în același punct T pe tangentă în C la curba (C).

Să ne propunem acum să găsim punctul de contact al dreptei AB cu înfășurătoarea sa. Pentru aceasta, să considerăm două poziții infinit vecine ale triunghiului ABC. Aceste triunghiuri sunt omologice, pentru că vîrfurile lor corespunzătoare se găsesc pe drepte concurente în T. Rezultă că punctele de întâlnire ale laturilor corespunzătoare sunt în linie dreaptă. Dar, la limită, punctul de intersecție a laturiei AC și corespunzătoarei sale este centrul  $a$  de curbură în A la curba (A), căci AC

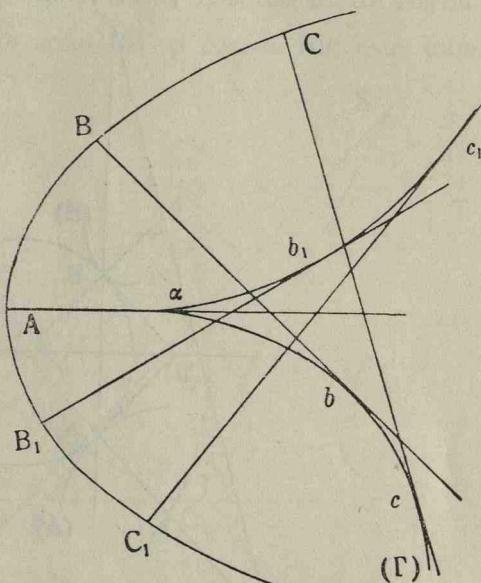


Fig. 21.

lățimea de curbă, (A) și (B).

La limită, dreapta care unește centrele a două poziții infinit vecine ale cercului (Gamma), este tangentă în C la curba (C), astfel că coarda AB, care unește punctele de contact, la limită este perpendiculară pe tangentă în C la curba (C).

<sup>(1)</sup> A se vedea, M. d'Ocagne, in *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1915, p. 435).

este normală în (A la curba (A). De asemenea, BC fiind normală în B la curba (B), intersecția acestei laturi cu poziția ei infinit vecină este centrul de curbură  $b$  al curbei (B) în B; în fine punctul de intersecție al dreptei AB cu poziția ei infinit vecină este punctul de contact  $c$  al

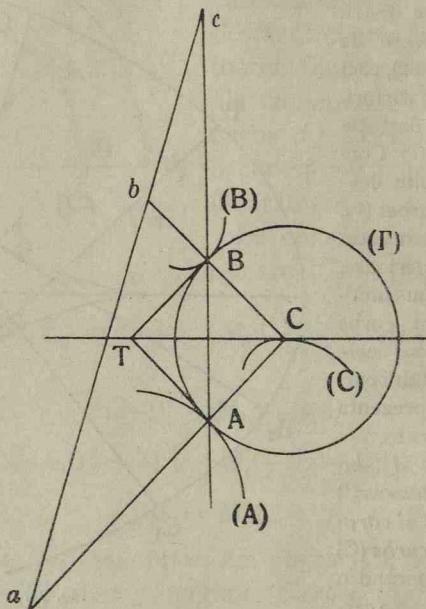


Fig. 23.

dreptei AB cu infășurătoarea sa. Deci, punctele  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sunt colineare și prin urmare punctul de contact  $c$  al dreptei AB cu infășurătoarea sa, este intersecția acestei drepte cu dreapta care unește centrele de curbură ale curbelor (A) și (B) în punctele A și B.

## PROPRIETĂȚI FUNDAMENTALE.

În vederea aplicațiunilor ce le vom face, vom stabili mai întâi câteva proprietăți fundamentale de care vom avea nevoie.

**17. Variația unui arc de curbă limitat de două tangente la altă curbă.** Să considerăm două tangente infinit vecine la curba (A), care determină pe curba (B) punctele B și B' (Fig. 24). Ne propunem să studiem variația arcului BB'.

Fie T intersecția tangentelor în A și A' la curba (A),  $\beta$  unghiul ce face cu AB tangentă în B la curba (B),  $\varphi$  unghiul format de BB' cu tangentă în B,  $\omega$  unghiul tangentelor în A și A';  $\omega$ , coarda BB',  $\varphi$  sunt infiniti mici.

Din triunghiul TBB' avem

$$\frac{BB'}{\sin \omega} = \frac{BT}{\sin TB'B}, \quad BB' \sin B' = BT \sin \omega.$$

Dar diferența dintre arcul BB' și coarda BB' este infinit

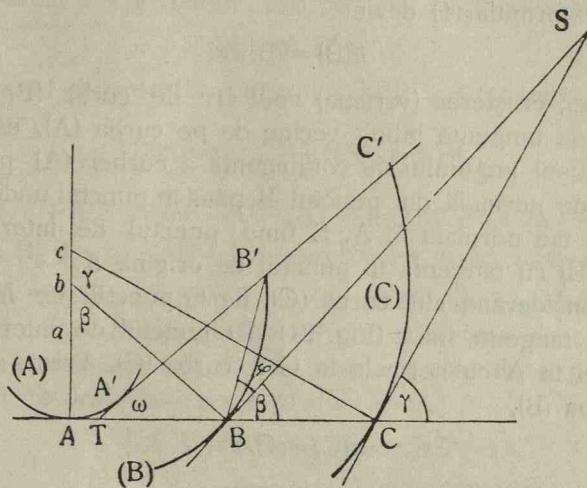


Fig. 24.

mic de ordinul al treilea,  $\text{arc}BB' - BB' \leftarrow \varepsilon_3$ ; apoi  $BT = AB - AT \leftarrow AB - \varepsilon_1$ ; avem apoi

$$\omega + B' = B'BC = \beta + \varphi, \quad B' = \beta + \varphi - \omega, \quad \sin B' \leftarrow \sin \beta + \varepsilon'_1.$$

Înlocuind în (1), avem

$$(\text{arc}BB' - \varepsilon_3)(\sin \beta + \varepsilon'_1) \leftarrow (AB - \varepsilon_1) \sin \omega,$$

$$\text{arc}BB' \sin \beta \leftarrow AB \sin \omega,$$

$$(2) \quad \text{arc}BB' \leftarrow \frac{AB}{\sin \beta} \omega.$$

Însemnând cu  $\alpha$  unghiu tangentei în A la curba (A) cu o direcție fixă, stim că  $\omega = d\alpha$ , aşa că formula (2) devine

$$(3) \quad \text{arc}BB' \leftarrow \frac{AB}{\sin \beta} d\alpha.$$

Însemnând cu  $d(B)$  variația arcului curbei (B), adică tocmai arcul infinit mic BB', descris de punctul B pe curba (B), formula (3) devine

$$(4) \quad d(B) = \frac{AB}{\sin \beta} d\alpha.$$

Notând cu  $b$  punctul de intersecție al normalelor în A și B la curbele (A) și (B), din triunghiul dreptunghic  $ABb$  (Fig. 24) avem

$$AB = b \sin \alpha, \quad AB = b \sin \beta, \quad \frac{AB}{\sin \beta} = b.$$

astfel că formula (4) devine

$$(5) \quad d(B) = b \sin \alpha.$$

Deci, creșterea (variația) unui arc de curbă (B) cuprins între două tangente infinit vecine de pe curba (A), este egală cu produsul unghiului de contingencă a curbei (A) prin segmentul de normală din punctul B până în punctul unde această normală tăie normala în A, B fiind punctul de intersecție al curbei (B) cu tangentă în punctul de origine A.

Considerând altă curbă (C), fie C punctul de intersecție al ei cu tangentă în A (Fig. 24) și c punctul de intersecție al normalei în A cu normala în C la curba (C). Avem, ca și pentru curba (B),

$$(6) \quad d(C) = c \sin \gamma.$$

Împărțind (5) cu (6), obținem

$$(7) \quad \frac{d(B)}{d(C)} = \frac{b}{c},$$

formulă stabilită de Mannheim.

Scriind relația (4) și pentru curba (C), avem

$$d(C) = \frac{AC}{\sin \gamma} d\alpha,$$

pe care împărțind-o cu (4), rezultă

$$(8) \quad \frac{d(A)}{d(C)} = \frac{AB \sin \gamma}{AC \sin \beta}.$$

Însemnând cu S intersecția tangentelor în B și C la curbele (B) și (C), din triunghiul BSC (Fig. 24), avem

$$\frac{BS}{CS} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta},$$

și deci formula (8) devine

$$(9) \quad \frac{d(B)}{d(C)} = \frac{AB}{AC} \frac{BS}{CS}.$$

Această formulă a fost stabilită de Newton.

### 18. Variația de lungime a unui segment de dreaptă.

Să evaluăm variația segmentului AB (Fig. 24), A fiind punctul de contact al segmentului AB cu curba (A), iar B punctul de intersecție al tangentei în A cu curba (B). Considerând poziția infinit vecină a segmentului AB, variația segmentului e dată de

$$d(AB) = A'B' - AB.$$

Scriind că proiecția conturului TBB' pe tangentă AB este nulă, avem

$$TB' \cos \omega = TB + BB' \cos B'BC.$$

De unde

$$\begin{aligned} (TA' + A'B') \cos \omega &\leftarrow AB - AT + (\text{arc } BB' - \varepsilon_3) \cos(\varphi + \beta), \\ (TA' + A'B')(1 - \varepsilon_2) &\leftarrow AB - AT + (\text{arc } BB' - \varepsilon_3)(\cos \varphi \cos \beta - \sin \varphi \sin \beta). \end{aligned}$$

BB' și  $\varphi$  fiind infiniti mici de ordinul întâi, știind apoi că produsul a doi infiniti mici este un infinit mic de ordin mai mare, dezvoltând relația de mai sus și lăsând de o parte infinitii mici de ordin mai mare ca doi, avem

$$TA' + A'B' \leftarrow AB - AT + \text{arc } BB' \cos \beta,$$

$$A'B' - AB \leftarrow \text{arc } BB' \cos \beta - (TA' + AT).$$

Dar  $(TA' + AT)$  diferă de arcul AA' cu un infinit mic de ordinul al treilea; deci

$$A'B' - AB \leftarrow \text{arc } BB' \cos \beta - \text{arc } AA',$$

$$(10) \quad d(AB) = d(B) \cos \beta - d(A).$$

Dar, din (5) avem

$$d(B) = bB d\alpha,$$

$d\alpha$  fiind unghiul de contingenta A. Apoi, prin definiție,  $a$  fiind centrul de curbură în A la curba (A),  $d\alpha$  unghiul de contingenta,  $Aa$  raza de curbură în A, avem

$$Aa = \frac{d(A)}{d\alpha}, \quad d(A) = Aa \cdot d\alpha,$$

asa că formula (10) devine

$$(11) \quad d(AB) = bB \cos \beta d\alpha - Aa \cdot d\alpha.$$

Din triunghiul dreptunghic ABb (Fig. 24), avem

$$bB \cos \beta = Ab;$$

deci (11) devine

$$d(AB) = Ab \cdot d\alpha - Aa \cdot d\alpha,$$

$$(12) \quad d(AB) = ab \cdot d\alpha.$$

Aceasta este formula care dă variația segmentului AB,  $a$  fiind centrul de curbură în A, iar  $b$  intersecția normalei în A cu normala în B.

*Aplicații.* 1º Dacă  $\beta = 90^\circ$ , adică dacă curba (B) este desfășurătoarea curbei (A),  $b$  se confundă cu A,  $ab = Aa = R$ , raza de curbură în A, iar formula (12) devine

$$d(AB) = Rd\alpha.$$

Dar, din definiție,  $Rd\alpha = d(A)$  și deci avem

$$d(AB) = d(A).$$

In acest caz AB este raza de curbură în B, curba (A) este desfășurată curbei (B),  $d(AB)$  este variația razei de curbură a curbei (B), iar  $d(A)$  este variația arcului de desfășurată. Am regăsit, deci, proprietatea cunoscută a desfășurării, că *diferența a două raze de curbură a desfășurătoarei este egal cu arcul corespunzător din desfășurată.*

2º Dacă segmentul AB are o lungime constantă, atunci  $d(AB) = 0$ , deci, din formula (12),  $ab = 0$ , ceea ce însemnează că *normala în B la curba (B) trece prin centrul de curbură al curbei (A), corespunzător punctului A*. Deci, dacă pe tangentele la o curbă (A) se duce o lungime constantă AB, normală în B la curba descrisă de B trece prin centrul de curbură în A la curba (A).

3º Presupunând că tangentă în A tăie altă curbă (C) în punctul C, avem analog cu (10),

$$d(AC) = d(C)\cos\gamma - d(A),$$

pe care scăzând-o din (10), urmează

$$(13) \quad d(BC) = d(AC) - d(AB) = d(C)\cos\gamma - d(B)\cos\beta.$$

Putem da altă formă acestei relații. În adevăr, avem analog cu (12), pentru curba (C),

$$d(AC) = ac.d\alpha,$$

c fiind punctul unde normala C tăie normala în A.

Scăzând această relație din (12), avem

$$d(BC) = d(AC) - d(AB) = ac.d\alpha - ab.d\alpha,$$

$$(14) \quad d(BC) = bc.d\alpha,$$

care dă variația segmentului BC, determinat între două curbe (B) și (C) de tangentă în A la curba (A).

În particular, dacă  $BC = \text{const.}$ , urmează că  $d(BC) = 0$ , deci  $bc = 0$ ; adică *normalele la curbele descrise de extremitățile unui segment constant se întâlnesc pe normala la infășurătoarea segmentului BC.*

Deci, dacă pe fiecare normală la o curbă, se ia, începând de la punctul de incidentă B, o lungime BC constantă, locul punctului C admite de asemenea ca normală dreapta BC. Curbele (B) și (C) sunt zise curbe paralele. Se obțin astfel toate desfășurătoarele ale desfășuratei curbei date.

4º Dacă pe segmentul BC se ia punctul M, astfel ca  $BM = k \cdot BC$ ,  $k = \text{const.}$ , avem  $d(BM) = kd(BC)$ , și prin urmare, conform relației (14),  $bm = k \cdot bc$ . Deci, dacă punctul M divide segmentul BC într'un raport constant și normala la infășurătoarea acestui segment tăie în b, m, c normalele la curbele (B), (M), (C), avem

$$\frac{bm}{bc} = \frac{BM}{BC}.$$

În particular, dacă M este mijlocul lui BC, m este mijlocul lui bc.

**19. Variația unui unghi.** Să ducem din punctul A al unei曲 (A) tangentele AM și AN la două curbe (M) și (N) și să ne propunem să calculăm variația unghiului MAN sau  $\alpha$  (Fig. 25).

Să ducem din punctul infinit vecin A' tangentele A'M', A'N', diferența  $(\alpha' - \alpha)$  a unghiurilor MAN și M'A'N' este variația unghiului  $\alpha$ , adică

$$d(\alpha) = \alpha' - \alpha.$$

Să fiind intersecția dreptelor AN și A'M', din triunghiurile AST și A'ST', avem

$$\alpha + \not\propto STA = \alpha' + \not\propto ST'A',$$

de unde

$$(15) \quad \alpha' - \alpha = STA - ST'A'.$$

Dar unghiurile STA și ST'A' sunt unghiurile de contin-

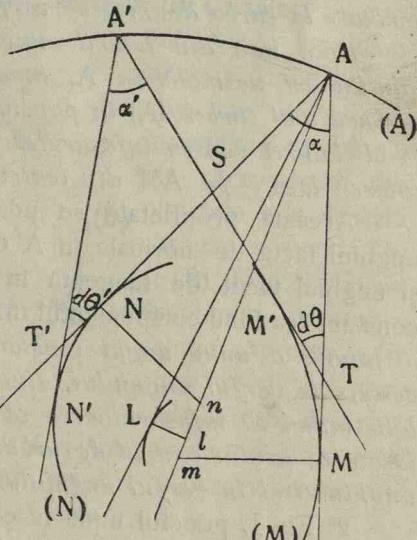


Fig. 25.

gență a curbelor (M) și (N). Însemnând cu  $\theta$  și  $\theta'$  unghiurile făcute de AT și AT' cu o direcție dată, știm că unghiurile de contingență sunt egale cu  $d\theta$  și  $d\theta'$ .

Înlocuind în (15), avem

$$(16) \quad d(\alpha) = d\theta - d\theta'.$$

Însemnând cu  $m$  și  $n$  punctele de intersecție ale normalei în A la curba (A) cu normalele în M și N la curbele (M) și (N), aplicând relația (5), avem

$$d(A) = Am \cdot d\theta, \quad d(A) = An \cdot d\theta';$$

$$\text{de unde} \quad d\theta = \frac{d(A)}{Am}, \quad d\theta' = \frac{d(A)}{An}.$$

Înlocuind în (16), avem

$$(17) \quad d(\alpha) = d(A) \left( \frac{1}{Am} - \frac{1}{An} \right),$$

care dă variația unghiului  $MAN = \alpha$ . Această formulă a fost găsită de Mannheim.

*Aplicații.* 1º Dacă unghiul  $\alpha$  este constant, variația sa,  $d\alpha = 0$ ; deci  $Am = An$ , punctele  $m$  și  $n$  coincid. Deci, *normalele la infășurătoarele laturilor unui unghi constant se tăe pe normala la curba descrisă de vârful unghiului*.

Dacă una din laturile unghiului constant, AN, de ex., coincide cu normala în A, atunci  $n$  coincide cu centrul de curbură al curbei (A) în punctul A. Deci, *punctul de contact M al laturei AM cu infășurătoarea sa este piciorul perpendiculariei lăsate pe AM din centrul de curbură a al curbei (A)*.

Această proprietate se poate interpreta și altfel. Dacă unghiul făcut de normala în A cu AM este constant, atunci și unghiul făcut de tangentă în A la curba (A) cu AM este constant (ca fiind complimentul unui unghi constant). Deci, *dacă o latură a unui unghi constant rămâne tangentă la locul descris de vârful unghiului, atunci punctul de contact al celeilalte laturi cu infășurătoarea sa este piciorul perpendiculariei lăsate pe ea din centrul de curbură al curbei descrisă de vârful unghiului și în vârful unghiului*.

2º Fie L punctul unde bisectoarea unghiului MAN atinge infășurătoarea sa (L) și  $l$  punctul unde normala la (L) tăe normala în (A). Aplicând relația (17) unghiurilor MAL și LAN, avem

$$d(MAL) = d(A) \left( \frac{1}{Am} - \frac{1}{Al} \right), \quad d(NAL) = d(A) \left( \frac{1}{Al} - \frac{1}{An} \right).$$

Dar  $\propto \text{MAL} = \propto \text{NAL}$ ; deci

$$\frac{1}{Am} - \frac{1}{Al} = \frac{1}{Al} - \frac{1}{An},$$

$$\frac{2}{Al} = \frac{1}{Am} + \frac{1}{An}.$$

Această relație probează că punctul  $l$  este conjugatul armonic al lui  $A$  față de  $m$  și  $n$ .

În particular, dacă bisectoarea  $AL$  se confundă necontenit cu normala  $Aa$  în  $A$ , punctul  $l$  se confundă cu centrul de curbură  $a$  în  $A$  la  $(A)$ . Deci, în acest caz, punctele  $m$  și  $n$  divid armonic raza de curbură  $Aa$ . Curbele  $(M)$  și  $(N)$  se zic atunci causticele prin reflexiune față de curba  $(A)$ .

*Observare.* Dacă curba infășurătoare a unei drepte variabile se reduce la un punct, pentru fiecare din pozițiile dreptei variabile, normala la infășurătoare este atunci perpendiculara la această dreaptă în acel punct.

**20. Normale la curbele descrise de punctele sau infășurate de dreptele unei figuri de formă invariabilă. Centru instantaneu de rotație. Metoda lui Chasles.** Să con-

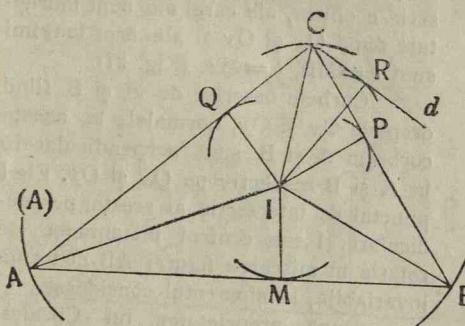


Fig. 26.

de un punct oarecare  $C$  al figurei și normala la infășurătoarea uneia din dreptele  $d$  ale figurei, pe care o putem presupune dusă prin punctul  $C$ , de altfel și el ales arbitrar.

Segmentul  $AB$ , fiind de lungime constantă, avem punctul  $M$  unde  $AB$  atinge infășurătoarea sa (No. 18, 3<sup>o</sup>), coborând din punctul  $I$ , de întâlnire al normalelor în  $A$  și  $B$  la curbele descrise de aceste puncte, o perpendiculară  $IM$  pe  $AB$ .

Unghiul  $CAB$  fiind constant, normala la infășurătoarea laturiei  $AC$ , se obține (No. 19, 1<sup>o</sup>) ducând pe  $CA$  perpendiculara

siderăm în mod continuu pozițiile successive ale unei figuri invariabile ca formă, ale cărei două din punctele sale descriu curbele cunoscute  $(A)$  și  $(B)$  (Fig. 26). Să ne propunem, pentru o poziție oarecare a figurei, să găsim normala la curba descrisă

$IQ$  din punctul  $I$ , de întâlnire al normalei în  $A$  la curba descrisă de vârful  $A$ , cu normala în  $M$  la infășurătoarea laturei  $AB$ .

De asemenea, perpendiculara  $IP$  coborâtă din  $I$  pe  $BC$ , este normală la infășurătoarea laturei  $BC$ .

În mod analog, unghiul  $C$  fiind constant, normala în punctul  $C$  la locul descris de punctul  $C$ , este dreapta ce unește punctul  $C$  cu punctul  $I$  de întâlnire al normalelor  $IP$  și  $IQ$  la infășurătoarele dreptelor  $CA$  și  $CB$ .

În fine, bazându-ne pe aceleași proprietăți stabilită, unghiul dreptei  $d$  cu  $BC$  fiind constant, normală la infășurătoarea acestei drepte este perpendiculara coborâtă pe această dreaptă din punctul  $I$  de întâlnire al normalelor  $IC$  și  $IP$ .

În rezumat, normalele la toate curbele descrise de punctele, sau la infășurătoarele dreptelor unei figuri de formă invariabilă, trec, pentru aceeași poziție a figurei, prin același punct  $I$ .

Această proprietate a fost descoperită de Chasles, care a numit punctul  $I$  centru instantaneu de rotație. Vom vedea, mai departe, pentru ce a fost dată această numire punctului  $I$ .

*Exemplu.* I. Se știe că un punct oarecare  $M$  al unui segment de dreaptă  $AB$ , de mărime constantă, ale cărui extremități  $A$  și  $B$  descriu dreptele perpendiculare  $Ox$  și  $Oy$ , descrie o elipsă, ale cărei axe sunt îndepărtate după  $Ox$  și  $Oy$  și ale căror lungimi sunt  $a = MB$ ,  $b = MA$  (Fig. 27).

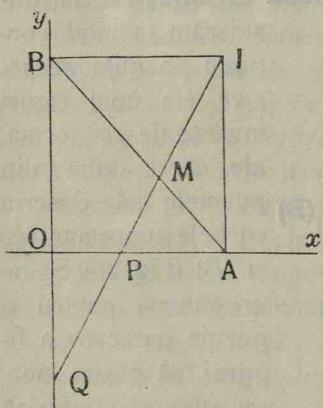


Fig. 27.

Curbele descrise de  $A$  și  $B$  fiind dreptele  $Ox$  și  $Oy$ , normalele la aceste curbe în  $A$  și  $B$  sunt perpendicularurile în  $A$  și  $B$  respectiv pe  $Ox$  și  $Oy$ . Fie  $I$  punctul de intersecție al acestor perpendicularuri.  $I$  este centrul instantaneu de rotație în mișcarea figurei  $AB$  de formă invariabilă, la momentul considerat.

După proprietatea lui Chasles, dreapta  $MI$  este normală în  $M$  la elipsa descrisă de  $M$ .

Din triunghiurile asemenea  $MPA$  și  $BMI$ , avem

$$\frac{MA}{MP} = \frac{MB}{MI}, \quad MP = \frac{MA \cdot MI}{MB}.$$

În mod analog, din triunghiurile asemenea  $MBQ$ ,  $MAI$ , avem

$$\frac{MQ}{MB} = \frac{MI}{MA}, \quad MQ = \frac{MB \cdot MI}{MA}.$$

De unde

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{MA \cdot MI}{MB} : \frac{MB \cdot MI}{MA} = \frac{\overline{MA}^2}{\overline{MB}^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

$a$  și  $b$  fiind semiaxele elipsei descrisă de  $M$ ; regăsim astfel o proprietate a normalei la elipsă într'un punct, referitoare la raportul segmentelor cuprinse pe normală între punctul considerat pe elipsă și punctele unde normala tăie axele elipsei.

II. Tangenta (normală) într'un punct  $M$  al unei figuri variabile ca formă care rămâne asemenea cu ea însăși. Fie că două puncte  $A$  și  $B$  (Fig. 28) ale figurei mobile descriu curbele  $(A)$  și  $(B)$ , iar mișcarea figurei în plan o definim prin curba la care rămâne tangentă dreapta  $AB$ . Fie  $E$  punctul ei de contact cu înfășurătoarea. Unghiul  $A$  fiind constant, punctul de contact al dreptei  $AM$  cu înfășurătoarea sa este piciorul  $F$  al perpendicularei pe  $AM$  din punctul  $\alpha$  de intersecție al normalelor în  $A$  și  $E$ .

De asemenea, punctul de contact  $G$  al lui  $MB$  cu înfășurătoarea este piciorul perpendicularei pe  $MB$  din punctul  $\beta$  de intersecție al normalelor în  $B$  și  $E$ . Unghiul  $M$  fiind constant, normala în  $M$  trece prin punctul  $\mu$  de intersecție al normalelor în  $F$  și  $G$  și este  $M\mu$ .

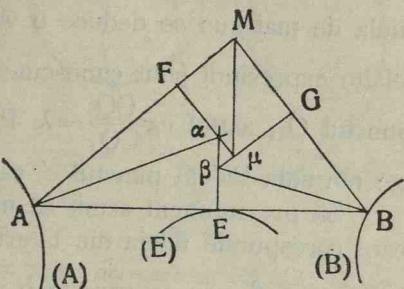


Fig. 28.

21. Normale la curbele descrise de punctele sau la înfășurătoarele dreptelor unei figuri de formă variabilă. Metoda lui Mannheim. Fie  $M, P, Q$  punctele de contact cu

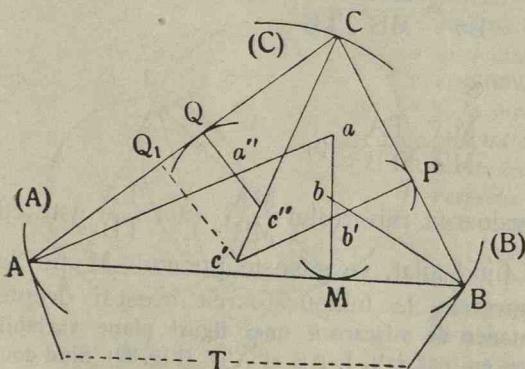


Fig. 29.

unui arc de curbă, avem (No. 17)

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{Aa}{Bb}, \quad \frac{d(B)}{d(C)} = \frac{Bb'}{Cc'}, \quad \frac{d(C)}{d(A)} = \frac{Cc''}{Aa''}.$$

Înmulțind aceste relații, obținem

$$\frac{Aa \cdot Bb' \cdot Cc''}{Bb \cdot Cc' \cdot Aa''} = 1.$$

înășurătoarele ale laturilor triunghiului  $ABC$ , de formă variabilă (Fig. 29). Normalele la aceste înășurătoare tăie în  $a, b, b', c', c'', a''$ , normalele la curbele  $(A), (B), (C)$ , descrise de punctele  $A, B, C$ .

Conform celor stabilite la variația

Această formulă stabilită de Mannheim, permite, cunoscând cinci din cele şase normale,  $Aa''a$ ,  $Bb''b$ ,  $Cc''c'$ ,  $Mba$ ,  $Pb'c'$ ,  $Qa''c''$ , să se construiască a şasea.

Să presupunem că normala necunoscută este aceea care corespunde la unul din vârfuri, normala  $Cc''c'$ , de ex. Din formula de mai sus se deduce o valoare  $\lambda$  pentru  $\frac{Cc'}{Cc''}$ , căci celelalte expresiuni sunt cunoscute. Va fi destul a lua pe  $CQ$  punctul  $Q_1$ , astfel ca  $\frac{CQ}{CQ_1} = \lambda$ . Perpendiculara în  $Q_1$  pe  $CQ$  tăie normala  $Pb'$  în punctul  $c'$  căutat.

Să presupunem acum că normala necunoscută este aceea care corespunde uneia din laturi, normala  $Mba$ , de ex. Din formula de mai sus, se găsește o valoare  $\mu$  pentru  $\frac{Aa}{Bb}$ , căci celelalte cantități sunt cunoscute. Dacă  $T$  este punctul de întâlnire al tangentelor în  $A$  și  $B$  la curbele  $(A)$  și  $(B)$ , avem [No. 17, formulele (7) și (9)]

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{Aa}{Bb}, \quad \frac{d(A)}{d(B)} = \frac{MA \cdot TA}{MB \cdot TB},$$

de unde

$$\frac{Aa}{Bb} = \frac{MA \cdot TA}{MB \cdot TB}.$$

Cum  $\frac{Aa}{Bb} = \mu$ , avem

$$\frac{MA \cdot TA}{MB \cdot TB} = \mu,$$

de unde se deduce valoarea raportului  $\frac{MA}{MB}$ , căci  $\frac{TA}{TB}$  este cunoscut. Acest raport fiind aflat, se găsește punctul  $M$  pe latura  $AB$  și deci și normala la infășurătoarea acestei drepte.

**22. Centrul instantaneu de mișcare a unei figuri plane variabile care rămâne asemenea cu ea însăși** (<sup>1</sup>). I.  $AB$  și  $A'B'$  (Fig. 30) fiind două elemente lineare a două figuri asemenea  $F$  și  $F'$  și  $P$  punctul de intersecție al dreptelor  $AB$  și  $A'B'$ , să însemnăm cu  $I$  punctul de intersecție al cercurilor  $PAA'$  și  $PBB'$ . Triunghiurile  $IAB$  și  $IA'B'$  au egale unghiiurile din  $A$  și  $A'$ ,  $B$  și  $B'$ , sunt deci asemenea.  $I$  este deci propriul său omolog în aceste triunghiuri, este punctul dublu al figurilor asemenea  $F$  și  $F'$ . Cum unghiiurile  $BIA = B'IA'$ , urmează că rotind figura  $F'$  în jurul lui  $I$  de acest unghi, figura  $F'$  ia poziția  $F_1$  omotetică cu  $F$ , în raportul  $k = AB : A'B'$ . Deci, se poate obține figura  $F'$  din  $F$ , printr'o rotație în

(<sup>1</sup>) A se vedea nota mea din *Nouvelles Annales de Mathématiques*, février 1926.

jurul punctului dublu I și o dilatare (amplificare) în raportul de omotetie (asemănare)  $k$ .

Când punctul A' este infinit vecin de A, dreapta AA' tinde către tangentă AT în A la traectoria descrisă de A. Cum unghiiurile  $\text{IAA}' = \text{IBB}'$ , urmează că, în mișcarea unei figură plane în planul său, variabilă cu pasătrare de similitudine, tangentele AT la diferitele traectorii ale punctelor A, la un moment dat, fac același unghi cu razele vectoriale IA ce unesc punctul dublu cu acele puncte. I este centrul instantaneu de mișcare la momentul considerat.

Deci, curba pe care se mișcă un punct oarecare al figurei, la un moment dat, pentru a trece infinitesimal la o poziție infinit vecină, este astfel că tăie sub un unghi constant razele vectoriale ce se obțin unind un punct fix I din plan cu acele puncte M; aceste curbe, numite în *Cinematica mediilor deformabile, curbe de curent*, sunt deci *spirale logaritmice*.

II. Mișcarea continuă a unei figură F variabilă, care rămâne asemenea cu ea însăși este cunoscută<sup>(1)</sup> dacă se dau curbele (A) și (B) descrise de două puncte A și B ale figurăi F și curba ( $\gamma$ ) infășurătoarea dreptei AB.

Fie AT (Fig. 31) și BS tangentele în A și B la curbele (A) și (B) și  $\gamma$  punctul de contact al lui AB cu infășurătoarea sa ( $\gamma$ ). AT și BS sunt limitele dreptelor AA' și BB' și  $\gamma$  limita punctului P. Deci centrul instantaneu de mișcare, I, la momentul considerat, este punctul de întâlnire al cercurilor trecând prin  $\gamma$  și tangentele respectiv în A și B la dreptele AT și BS.

Luând un sens pe tangentele AT și BS, se vede că unghiiurile  $\text{I}\gamma\text{A} = \text{IAT} = \text{IBS}$ . Fiind un punct oarecare al figurei F în mișcare, care rămâne asemenea cu ea însăși, tangenta<sup>(2)</sup>  $\text{IMR} = \text{IAT} = \text{IBS} = \text{I}\gamma\text{A}$ .

De asemenea, punctul de contact, N, la momentul considerat al unei drepte  $\Delta$  a figurăi mobile F este astfel ca unghiiurile  $\text{IN}\Delta = \text{IMR} = \text{IAT} = \text{IBS} = \text{I}\gamma\text{A}$ .

<sup>(1)</sup> N. Abramescu, *Sur le mouvement des figures planes variables avec conservation da similitude ou d'aire* (Bull. de la Soc. roumaine des sciences math., vol. XXVI, ianuarie-iulie 1924).

<sup>(2)</sup> A se vedea și metoda lui Mannheim, expusă la No. 20, exemplul II.

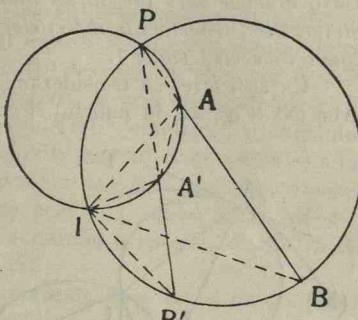


Fig. 30.

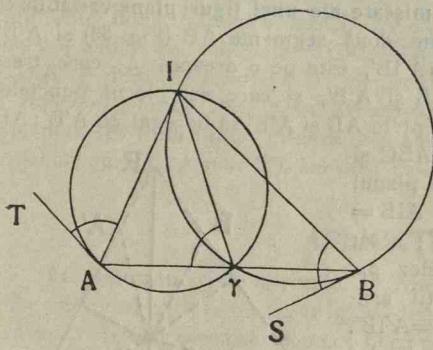


Fig. 31.

Deci, în mișcarea unei figuri plane, care rămâne asemenea cu ea însăși, dreptele care tăie la un moment dat, subt același unghi constant, potrivit ales, traectoriile diferitelor puncte ale figurei în mișcare, se întâlnesc în același punct I.

Ca aplicație, să considerăm normala în M la curba (M) care tăie o curbă (N) (Fig. 32) în punctul N; se ia, în sensul arcelor crescătoare a curbei (M), pe perpendiculara în N pe MN, un vector  $NM' = k \cdot MN$  ( $k = \text{const.}$ ). Pentru a găsi tangenta în  $M'$  la curba descrisă de acest punct, se observă că triunghiul  $MNM'$  rămâne asemenea cu el însuși. Însemnând  $M'$  cu  $MT$  tangentă în  $M$  la curba (M) în sensul arcelor crescătoare, cu  $\mu$  centrul de curbură în  $M$  la curba (M), prin  $NS$  tangentă în  $N$  la curba (N), centrul instantaneu I de mișcare al figurei care rămâne asemenea cu ea însăși, este la intersecția

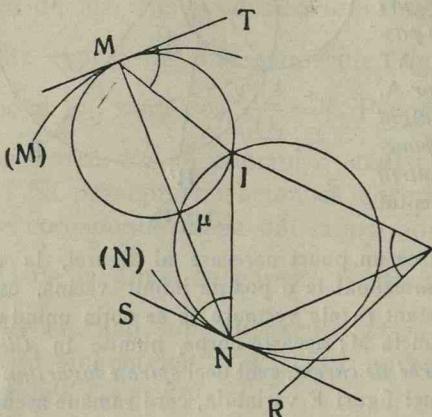


Fig. 32.

cercului de diametru  $M\mu$  cu cercul ce trece prin  $\mu$  și este tangent în  $N$  la curba (N). Tangenta în  $M'$  la curba (M') este dreapta  $M'R$  astfel ca unghiurile  $TMI = INS = IM'R$ .

**23. Centrul instantaneu de mișcare ale unei figuri plane variabile cu păstrare de arie<sup>(1)</sup>.** I. Fiind date două segmente AB (Fig. 33) și  $A'B'$ , punctul I, astfel ca ariile  $AIB = A'IB'$ , este pe o dreaptă  $\Delta$ , care trece prin intersecția R a dreptelor AB și  $A'B'$ , și care este locul punctelor astfel ca raportul distanțelor la dreptele AB și  $A'B'$  să fie egal cu  $A'B':AB$ .

Fiind date două triunghiuri ABC și  $A'B'C'$ , de aceeași arie, există în planul lor un punct I, astfel ca ariile  $AIB = A'IB'$ ,  $BIC = B'IC'$ ,  $CIA = C'IA'$ ; acest punct este la intersecția dreptelor  $\Delta_a$ ,  $\Delta_b$ ,  $\Delta_c$ , corespunzătoare egalității ariilor  $BIC = B'IC'$ ,  $CIA = C'IA'$ ,  $AIB = A'IB'$ .  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , fiind omoloagele punctelor A, B, C, punctul I este propriul său omolog în triunghiurile ABC,  $A'B'C'$ .

Fiind date două figuri F și  $F'$  de aceeași arie, astfel ca triunghiurile ABC,  $A'B'C'$  să fie omoloage în figurile F și  $F'$ , se știe<sup>(2)</sup> că există un punct I care este propriul său omolog în figurile F și  $F'$ .

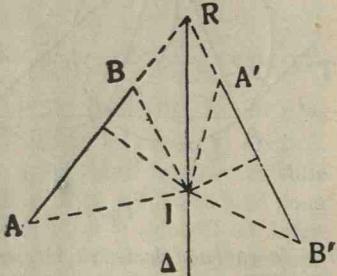


Fig. 33.

<sup>(1)</sup> A se vedea nota mea din *Nouvelles Annales de Math.*, Avril 1926.

<sup>(2)</sup> N. Abramescu, *Sur le mouvement des figures planes variables avec conservation de similitude ou d'aire* (Bull. de la Soc. roumaine des sciences math., vol. XXVI, ianuarie-iulie 1924).

Să considerăm o figură plană F care are o deformare omogenă cu păstrare de arie. Fie ABC un triunghi al figurei F. Mișcarea acestei figuri este cunoscută dacă se dau curbele (A) și (B) descrise de punctele A și B, înfășurătoarele ( $\gamma$ ) și ( $\beta$ ) ale laturilor AB și AC și aria triunghiului ABC. Fie F' poziția infinit vecină a figurei F și A'B'C' omologul triunghiului ABC în figura F'. Dacă A'B' tinde către AB, punctul R de întâlnire a lui AB și A'B' tinde către punctul  $\gamma$  de contact al lui AB cu înfășurătoarea sa și punctul I este pe dreapta care trece prin  $\gamma$  și cum  $A'B':AB \rightarrow 1$ , locul lui I este bisectoarea exterioară a unghiului dreptelor, AB și A'B', adică tinde către normala în  $\gamma$  la curba ( $\gamma$ ).

De asemenea, punctul I este pe normala în  $\beta$  la curba ( $\beta$ ). Deci, punctul de contact  $\alpha$  al lui BC cu înfășurătoarea sa ( $\alpha$ ) este piciorul perpendicularării coborâte din I pe BC.

Deci, în deformarea omogenă a unui figuri plane variabilă cu conservare de arie, normalele la înfășurătoarele dreptelor figurei concură, la un moment dat, în același punct I. Acest punct I este centrul instantaneu de mișcare, analog cu centrul instantaneu de rotație în cazul figurei de formă invariabilă.

Pentru a găsi tangenta în C la curba descrisă de punctul C al figurei F, se vede că, în deformarea triunghiului variabil ABC, se cunosc cinci normale, în vîrfurile A și B, și la înfășurătoarele laturilor AB, BC, CA, și deci se poate intrebuința metoda lui Mannheim (No. 21) pentru a găsi a șasea normală, în C, și deci și tangentă în C.

II. Se pot extinde aceleași considerații la o figură variabilă care are o deformare omogenă cu conservare de volum. Se vede întâi, că fiind date două tetraedre ABCD, A'B'C'D', de același volum, există un punct I, astfel că volumele  $IABC = IA'B'C'$ ,  $IBCD = IB'C'D'$ ,  $ICDA = IC'D'A'$  și deci  $IBDA = IB'D'A'$ . Se deduce că (P) fiind un plan al figurei în mișcare, planele duse prin caracteristicile planelor (P) [caracteristica unui plan (P) fiind limita intersecției planului (P) și a poziției infinit vecine], perpendiculare pe planul (P), concură în același punct I.

## APLICAȚII.

**24. Determinări de normale.** 1º *Normală la concoidă.* Se știe că concoida unei curbe (B) se obține (Fig. 34) luând o lungime constantă  $BC = l$  pe raza vectoare OB, care unește polul O cu un punct oarecare B al curbei (B). Segmentul BC fiind constant, normalele în B și C la curbele descrise de aceste puncte, se întâlnesc pe normala în punctul de contact al dreptei BC cu înfășurătoarea sa. Segmentul BC trecând neconținut prin punctul O, înfășurătoarea sa se reduce la punctul O, astfel că normala în O la înfășurătoarea lui BC este perpendiculară în O pe BC. Fie D punctul unde normala în B la curba (B) tăie perpendiculara în O pe BC. Normala în C la curba descrisă de punctul C este dreapta DC.

2º *Normală la podară.* Fiind date curba (A) și punctul O, podara

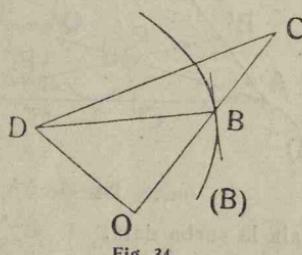


Fig. 34.

curbei (A) este locul proiecțiilor M ale punctului O pe tangentele la curba (A) (Fig. 35). Pentru a găsi normala în M, să considerăm unghiul constant (drept) AMO, a cărui una din laturi este tangentă în A la curba (A), iar cealaltă latură trece prin punctul fix O. Normala în M trece prin punctul de intersecție al normalelor în A și O la curbele descrise de aceste puncte. Normala în O este perpendiculară în O pe OM, care se tăie cu normala în A în punctul I. Normala în M este MI și trece prin mijlocul lui AO.

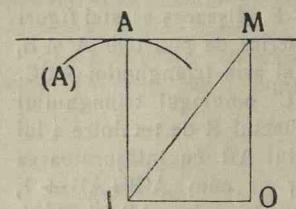


Fig. 35.

3º Normala la curba omotetică cu o curbă dată. Fiind dat punctul O și curba (B), omotetica curbei (B) se obține (Fig. 36) luând pe raza OB punctul C, astfel că

$$\frac{OB}{OC} = K = \text{const.}$$

Să presupunem că normalele la curbele (B) și (C) în punctele B și C tăie în b și c perpendiculară în O pe BC; cum BC trece prin punctul O, infășurătoarea sa este punctul O, iar normala la infășurătoarea lui BC este perpendiculară în O pe BC, centrul de curbură în O este chiar punctul O.

Aplicând o proprietate cunoscută relativă la variația unui segment [No. 18, formula (12)], avem

$$d(OB) = Ob \cdot d\alpha, \quad d(OC) = Oc \cdot d\alpha,$$

$d\alpha$  fiind unghiul de contingentă din O. De unde

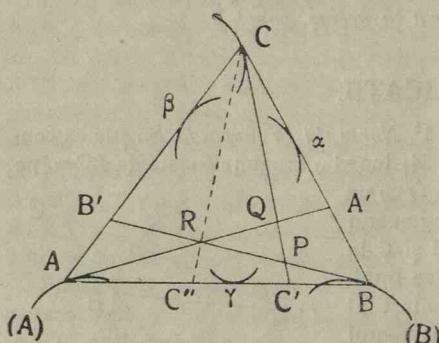


Fig. 37.

mala la curba dată.

4º Vârfurile A și B ale unui triunghi variabil ABC (Fig. 37) descriu două curbe (A) și (B), latura AB rămâne tangentă la o curbă (γ), iar laturile AC și BC au direcții fixe. Să se determine normala în C la curba (C) descrisă de punctul C. Fie  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  punctele de contact ale

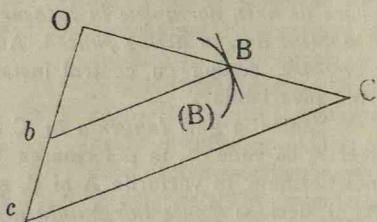


Fig. 36.

Cum

$$\frac{d(OB)}{d(OC)} = \frac{Ob}{Oc}.$$

Cum

$$\frac{d(OC)}{d(OC)} = \frac{OB}{OC} = K,$$

rezultă că

$$\frac{Ob}{Oc} = \frac{OB}{OC},$$

ceea ce probează că normalele Bb, Cc, în B și C sunt paralele.

Deci, normala la omotetica unei curbe este paralelă cu nor-

laturilor BC, CA, AB cu înfășurătoarele lor și R, P, Q punctele de intersecție ale tangentelor în A și B la curbele (A) și (B), în B și C la curbele (B) și (C), în C și A la curbele (C) și (A).

După o proprietate stabilită [No. 17, formula (9)], avem

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{\gamma A \cdot RA}{\gamma B \cdot RB}, \quad \frac{d(B)}{d(C)} = \frac{\alpha B \cdot PB}{\alpha C \cdot PC}, \quad \frac{d(C)}{d(A)} = \frac{\beta C \cdot QC}{\beta A \cdot QA}.$$

Înmulțindu-le, obținem

$$\frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{RA}{RB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} = 1.$$

În cazul problemei, AC și BC fiind de direcție dată, își ating înfășurătoarele lor la infinit, deci punctele β și α sunt la infinit pe aceste drepte și deci

$$\frac{\beta C}{\beta A} = 1, \quad \frac{\alpha B}{\alpha C} = 1.$$

Relația precedentă devine

$$\frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{RA}{RB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} = 1.$$

Fie A', B', C' intersecțiile laturilor BC, CA, AB cu AQ, BR, CP. Avem

$$\frac{RA}{RB} = \frac{\sin B'BA}{\sin A'AB}, \quad \frac{PB}{PC} = \frac{\sin C'CB}{\sin B'BC}, \quad \frac{QC}{QA} = \frac{\sin A'AC}{\sin C'CA}.$$

Relația de mai sus devine

$$\frac{\gamma A}{\gamma B} \frac{\sin B'BA}{\sin A'AB} \frac{\sin C'CB}{\sin B'BC} \frac{\sin A'AC}{\sin C'CA} = 1.$$

Dar, din triunghiurile AB'B, BB'C, avem

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{\sin ABB'}{\sin A'AB}, \quad \frac{B'C}{BC} = \frac{\sin B'BC}{\sin C'B}, \quad \frac{\sin ABB'}{\sin CBB'} = \frac{AB'}{B'C} \frac{BC}{AB},$$

căci  $\sin AB'B = \sin C'B$ . În mod analog,

$$\frac{\sin BCC'}{\sin ACC'} = \frac{BC'}{AC} \frac{AC}{BC}, \quad \frac{\sin CAA'}{\sin BAA'} = \frac{A'C}{A'B} \frac{AB}{AC}.$$

Înlocuind, relația găsită devine după oarecare reduceri

$$(18) \quad \frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{C'B}{C'A} = 1.$$

Fie C'' punctul unde CR tăie pe AB. Avem

$$\frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{C'B}{C'A} = -1,$$

astfel că, neînținând seamă de semn, relația precedentă devine

$$\frac{C'B}{C'A} : \frac{C''B}{C''A} = \frac{\gamma B}{\gamma A}, \quad \frac{C'B}{C'A} = \frac{\gamma B}{\gamma A} \cdot \frac{C''B}{C''A}.$$

Punctele C'', γ fiind cunoscute pe latura AB, valoarea raportului C'B:C'A este cunoscută și deci poziția punctului C' este determinată. Tangenta în punctul C este dreapta CC'.

*Observări.* I. Să presupunem că curbele (A) și (B) sunt două drepte. Tangentele la aceste curbe în A și B sunt chiar aceste drepte. Dacă curba ( $\gamma$ ) este o iperbolă, iar curbele (A) și (B) asimptotele sale, punctul de contact  $\gamma$  al dreptei AB cu iperbolă este mijlocul segmentului AB; deci  $\gamma A : \gamma B = 1$ , iar relația obținută (18), arată că dreptele AA', BB', CC' sunt concurențe, tangenta în C este dreapta CR.

II. Dacă, pe lângă condiția ca curbele (A) și (B) să fie două drepte, mai punem condiția ca dreptele duse prin A și B să fie paralele cu aceste drepte, atunci A' și B' sunt aruncate la infinit, căci CA paralelă cu BR, CB paralelă cu AR, aşa că relația (18) devine (Fig. 38)

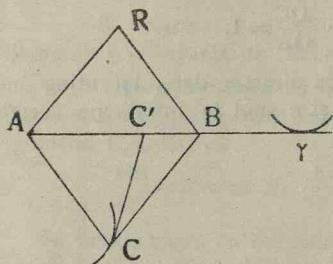


Fig. 38.

în C, când se cunosc cinci, depinde numai de tangentă în  $\gamma$  la curba ( $\gamma$ ). Deci, tangentă în C la curba descrisă de C depinde numai de tangentă în  $\gamma$ . Transformarea ( $\gamma$ , C) este deci de contact, aşa că o exprimare geometrică a unei transformări de contact este: tangentă la o curbă ( $\gamma$ ) tăie două curbe în A și B; se duce din A tangentă la o curbă ( $\beta$ ) și din B tangentă la o curbă ( $\alpha$ ). Punctul de intersecție C al acestor tangente este astfel în cât transformarea ( $\gamma$ , C) este de contact.

25. *Înfășurătoare de drepte.* <sup>1º</sup> Coardă care subîntinde într-o curbă un arc de lungime constantă. Dacă dreapta variabilă AB determină, pentru fiecare din pozițiile sale (Fig. 39) pe curba (C) un arc AB de lungime constantă, avem

$$d(A) = d(B).$$

Însemnând cu T intersecția tangentelor în A și B la curba (C), avem [No. 17, formula (9)]

$$\frac{MA \cdot AT}{MB \cdot BT} = 1,$$

de unde

$$\frac{MA}{MB} = \frac{TB}{TA}.$$

Să ducem prin A și B paralele la BT și AT, care se tăie în S.

Avem

$$\frac{MA}{MB} = \frac{SA}{SB},$$

ceea ce probează că SM este bisectoarea unghiului ASB și astfel punctul M de contact al dreptei AB cu infășurătoarea sa este determinat.

<sup>2º</sup> Înfășurătoarea unei coarde a unei curbe văzută dintr-un punct fix sub un unghi constant ( $\alpha$ ). Fie AB o coardă a curbei (C), văzută din

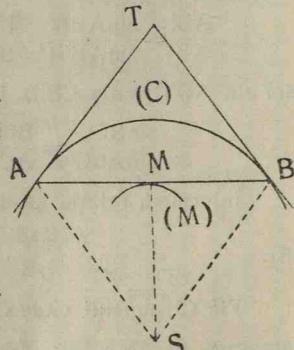


Fig. 39.

(<sup>1</sup>) A se vedea, M. d'Ocagne, *Sur l'enveloppe de certaines droites variables (Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1883, p. 252; 1886, p. 88; 1897, p. 288).

punctul O subt unghiul constant AOB (Fig. 40). Să găsim punctul M de contact al coardei AB cu înfășurătoarea sa.

Fie T intersecția tangentelor în A și B la curba (C). Dar știm [No. 17, formula (9)] că

$$\frac{d(A)}{d(B)} = \frac{MA \cdot TA}{MB \cdot TB}.$$

Fie  $a$  și  $b$  intersecțiile normalelor în A și B la curba (C) cu perpendicularele ridicate în O pe OA și OB.

Dar, din cauză că unghiul AOB este constant, urmează că OA și OB se învărtesc cu același unghi  $d^0$  și deci [No. 17, formula (5)]

$$d(A) = Aa \cdot d^0, \quad d(B) = Bb \cdot d^0,$$

de unde

$$\frac{Aa}{Bb} = \frac{AM \cdot AT}{BM \cdot BT},$$

sau

$$(19) \quad \frac{AM}{BM} = \frac{Aa \cdot BT}{AT \cdot Bb}.$$

Să coborăm din T pe OA și OB perpendicularele TI și TJ. Din asemănarea triunghiurilor OAa și ITA, de o parte, OBb și JTB, de alta, avem

$$\frac{Aa}{AT} = \frac{OA}{TI}, \quad \frac{Bb}{BT} = \frac{OB}{TJ}.$$

Înlocuind în (19), obținem

$$\frac{AM}{BM} = \frac{OA \cdot TJ}{TI \cdot OB}.$$

Să lăsăm din punctul M perpendicularele MH și MK pe OA și OB. Avem

$$\frac{AM}{BM} = \frac{\text{aria } OAM}{\text{aria } OBM} = \frac{OA \cdot MH}{OB \cdot MK}.$$

Relația precedentă devine

$$\frac{OA \cdot MH}{OB \cdot MK} = \frac{OA \cdot TJ}{OB \cdot TI}, \quad \frac{MH}{MK} = \frac{TJ}{TI}.$$

Triunghiurile HMK, JTI, având unghiurile  $HMK = JTI$ , ca suplemente unghiului  $IOJ$ , având, de asemenea, și laturile care formează aceste unghiuri proporționale, sunt triunghiuri asemenea. Deci, unghiurile  $MHK = TJI$ . Dar, din patrulaterul inscriptibil OHMK, OITJ, rezultă egalitatea unghiurilor  $MHK = MOK$ ,  $TJI = TOI$  și deci, observând egalitatea unghiurilor  $MHK = TJI$ , urmează egalitatea unghiurilor  $MOK = TOI$ . Deci, dreptele TO și MO fac unghiuri egale cu laturile unghiului O, sunt simetrice față de bisectoarea unghiului AOB, sunt, cum se mai zice *isogonale*. Deci, punctul de contact M al dreptei AB cu înfășurătoarea sa este intersecția dreptei AB cu isogonală dreptei OT față de unghiul AOB.

Dacă curba (C) este o elipsă cu centrul O, polara punctului T

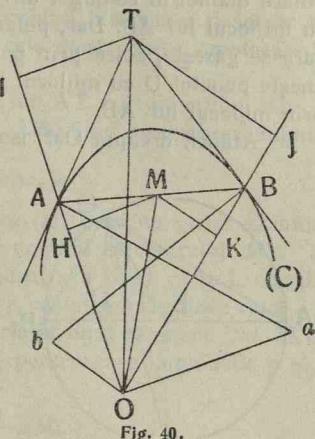


Fig. 40.

în raport cu elipsa este AB. Punctul de la infinit al dreptei AB are ca polară diametrul conjugat direcției AB, adică dreapta care unește punctul O cu mijlocul lui AB. Dar, polara acestui punct trece prin polul dreptei pe care se găsește, adică prin polul lui AB, punctul T. Deci, dreapta care unește punctul O cu mijlocul lui AB trece prin T, sau, dreapta OT trece prin mijlocul lui AB.

Atunci, dreapta OM, isogonala lui OT, este isogonala medianei triunghiului OAB, este, cum se mai zice, *simediana* vârfului O din triunghiul OAB.

Să presupunem, mai mult, că unghiul AOB este drept (Fig. 41). Mediana triunghiului AOB este OE, bisectoarea unghiului O este OG, G fiind mijlocul arcului AB. Ducând înălțimea unghiului drept O, avem egalitatea unghiurilor  $\angle GOF = \angle OGE = \angle EOG$ , ceea ce probează că dreapta OF este simetrică medianei OE în raport cu bisectoarea OG, adică simediana unghiului drept O este înălțimea acestui unghi drept.

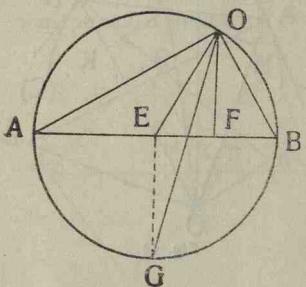


Fig. 41.

Sideră coarda AB a unei elipse cu centrul O, care e văzută din centrul O subt un unghi drept. Punctul de contact M al coardei AB cu înfășurătoarea sa este la intersecția coardei AB cu simediana unghiului drept O, adică cu perpendiculara din O pe AB. Deci, înfășurătoarea coardei AB este o curbă astfel că normala într'un punct M oarecare al ei trece prin punctul fix O, adică este un cerc. Așa dar, *înfășurătoarea coardelor elipsei văzute din centrul O al elipsei subt un unghi drept este un cerc cu centrul în O*.

Pentru a găsi raza acestui cerc, să considerăm poziția particulară a coardei AB și anume aceea ce unește vârfurile A și B ale elipsei (Fig. 42). Raza cercului este perpendiculara OM. Din triunghiul drept-unghic AOB, avem

$$\overline{OM}^2 = AM \cdot BM = \frac{\overline{OA}^2}{AB} \cdot \frac{\overline{OB}^2}{AB} = \frac{\overline{OA}^2 \cdot \overline{OB}^2}{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2}, \quad \overline{OM}^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2}, \quad \frac{1}{\overline{OM}^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

astfel că raza cercului este dată în funcție de semiaxele  $a$  și  $b$  ale elipsei.

### 26. Teoremele lui Graves și Chasles asupra arcelor elipsei.

1º Fie AM și  $AM_1$  tangentele duse din A la elipsa (M) (Fig. 43). Dacă punctul A se deplasează pe elipsa (A) omofocală cu (M), se știe că tangentă în A la (A) este bisectoarea AT exterioară a unghiului  $MAM_1$  a tangentelor,

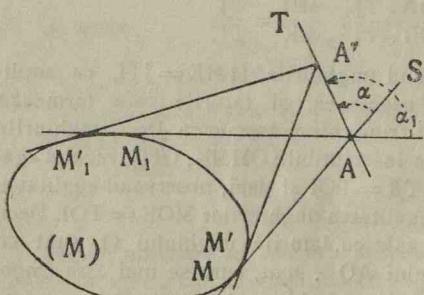


Fig. 43.

căci se cunoaște proprietatea conicelor omofocale, că tangentele duse din

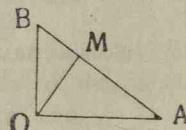


Fig. 42.

acelaș punct la conicele omofocale admit aceleași bisectoare și aceste bisectoare sunt tangentele în acest punct la cele două conice omofocale ce trec prin acel punct.

Urmează că unghiurile  $\alpha$  și  $\alpha_1$  ce le fac AT cu direcțiile MA și  $M_1A$  sunt suplimentare, căci  $\angle M_1AA' = \alpha$ ,  $AA'$  fiind bisectoarea unghiului  $M_1AS$ . Deci

$$\alpha + \alpha_1 = \pi, \cos\alpha + \cos\alpha_1 = 0.$$

Considerând tangentele duse la conica (M) dintr'un punct A' infinit vecin de A pe conica (A), vedem că, dacă unghiul elementului MM' cu MA tinde către zero, și prin urmare cosinusul său tinde către 1, unghiul lui  $M_1M'$  cu  $M_1A$  tinde către  $\pi$  și prin urmare, cosinusul său tinde către -1.

Aplicând proprietatea relativă la variația unui segment [No. 18, 3<sup>o</sup>, formula (13)], avem pentru segmentul MA, pentru care unghiurile  $\beta$  și  $\gamma$  din formula (13) sunt aci egale cu  $\alpha$  și  $\pi$ ,

$$(20) \quad d(MA) = d(A)\cos\alpha - d(M).$$

Pentru segmentul  $M_1A$ , pentru care unghiurile  $\beta$  și  $\gamma$  din formula (13) sunt respectiv  $\alpha_1$  și  $\pi$ , avem

$$d(M_1A) = d(A)\cos\alpha_1 + d(M_1).$$

Adunând această formulă cu (20), obținem

$$d(MA) + d(M_1A) = d(M_1) - d(M) = d(\text{arc } MM_1),$$

pe care integrând-o, găsim

$$MA + M_1A - \text{arc } MM_1 = \text{const.}$$

Deci, diferența dintre suma tangentelor duse dintr'un punct al elipsei (A) la elipsa omofocală (M), și arcul acestei elipse (M) cuprins între punctele de contact, este constantă. Aceasta este teorema lui Graves.

2<sup>o</sup> Să presupunem acum că conica (A) omofocală cu elipsa (M) să fie o iperbolă (Fig. 44).

Tangenta în A este bisectoarea interioară a unghiului  $MAM_1$ ; în acest caz, unghiurile  $\alpha$  și  $\alpha_1$  pe care le face AT respectiv cu MA și  $M_1A$ , fac  $360^\circ$  și avem

$$\alpha + \alpha_1 = 2\pi, \cos\alpha = \cos\alpha_1.$$

Dar, unghiurile  $\gamma$  din formula (13) (No. 18), care sunt aci unghiurile lui  $MM'$  cu MA și al lui  $M_1M'$

cu  $M_1A$ , tind amândouă către  $\pi$  când A' vine în A, și deci cosinusurile lor tind către -1. Aplicând formula (13) (No 18) pentru MA și  $M_1A$ , avem

$$d(MA) = d(A)\cos\alpha + d(M), \quad d(M_1A) = d(A)\cos\alpha_1 + d(M_1), \quad \cos\alpha = \cos\alpha_1.$$

Scăzând aceste două relații, obținem

$$d(MA) - d(M_1A) = d(M) - d(M_1).$$

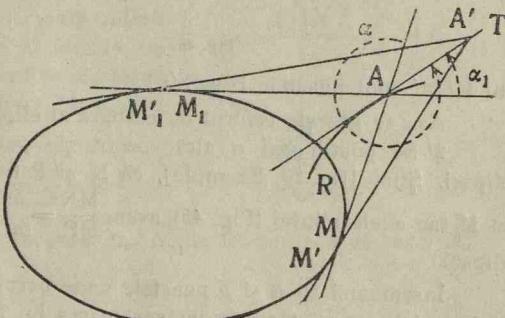


Fig. 44.

Notând cu  $R$  punctul de intersecție al iperbolei ( $A$ ) cu elipsa ( $M$ ), avem

$$d(MA) - d(M_1 A) = d(\text{arc} RM) - d(\text{arc} RM_1)$$

Integrând și observând că integralele ambilor membrii se anulează deodată când punctul  $A$  vine în  $R$ , avem

$$MA - M_1 A = \text{arc } RM - \text{arc } RM_1.$$

Deci, diferența lungimilor tangentelor  $AM$  și  $AM_1$  duse dintr'un punct  $A$  la elipsa ( $M$ ) este egală cu diferența arcelor determinate între punctele de contact  $M$  și  $M_1$  de punctul unde elipsa ( $M$ ) este întâlnită de iperboala omofocală ce trece prin  $A$ . Aceasta este teorema lui Chasles.

### 27. Determinarea centrelor de curbură ale conicelor <sup>(1)</sup>. I. Elipsa.

1º Normala într'un punct oarecare  $M$  al unei conice fiind bisectoarea unghiului

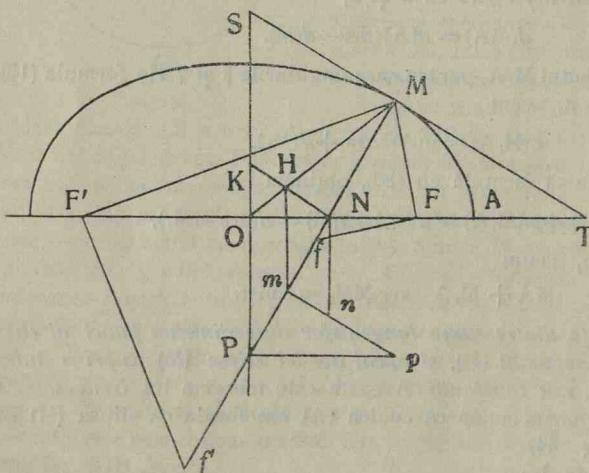


Fig. 45.

lui  $MFM'$  sunt punctele  $F$  și  $F'$ .

Așa se găsește centrul de curbură al elipsei când se cunosc focarele.

2º Se poate găsi o altă construcție pentru centrul de curbură al elipsei. Știm [No. 20, Exemplu], că  $N$  și  $P$  fiind punctele unde normala în  $M$  tăie axele elipsei (Fig. 45), avem  $\frac{MN}{MP} = \frac{b^2}{a^2}$ ,  $a$  și  $b$  fiind semiaxele elipsei.

Însemnând cu  $n$  și  $p$  punctele unde perpendicularele în  $P$  la  $OP$  și în  $N$  la  $ON$  tăie normala la infășurătoarea lui  $NP$  (adică perpendiculara în  $m$  la  $NP$ ), avem [No. 18, Aplicația 4º]

$$(21) \quad \frac{mn}{mp} = \frac{MN}{MP}.$$

Fie  $T$  și  $S$  punctele de intersecție ale axelor elipsei cu tangenta în  $M$ , perpendiculara pe  $MN$ . Triunghiurile asemenea  $mnN$  și  $NMT$ , de o

$FMF'$  (Fig. 45) (F și  $F'$  focarele ale razelor vectoriale, se știe (No. 19, 2º) că centrul de curbură  $m$  este conjugatul armonic al lui  $M$  în raport cu punctele  $f$  și  $f'$  de intersecție ale normalei în  $M$  cu perpendicularele în  $F$  și  $F'$  pe  $MF$  și  $MF'$  (căci infășurătoarele laturilor  $MF$  și  $MF'$  ale unghiului

<sup>(1)</sup> A se vedea, M. d'Ocagne, in *L'Enseignement mathématique*, 1915 (p. 307).

parte,  $mP$  și  $MPS$ , de alta, dau

$$\frac{mN}{MN} = \frac{mN}{MT}, \quad \frac{mP}{MP} = \frac{mP}{MS}.$$

Împărțindu-le și observând (21), avem

$$\frac{mN}{mP} \frac{MP}{MN} = \frac{mN}{mP} \frac{MS}{MT},$$

$$(22) \quad \frac{mN}{mP} = \frac{MS}{MT}.$$

În punctul N să ridicăm perpendiculara NK pe MN, care tăie diametrul OM al punctului M în H. Avem

$$\frac{MT}{MS} = \frac{HN}{HK}.$$

Comparând această egalitate cu (22), rezultă

$$\frac{mN}{mP} = \frac{HN}{HK},$$

relație care probează că  $Hm$  este paralelă cu KP, adică perpendiculară pe OA.

Se obține, deci, construcția următoare a lui Mannheim. Prin punctul N unde normala MN tăie axa OA, ridicăm la această normală o perpendiculară ce tăie diametrul OM în punctul H. Perpendiculara din acest punct pe OA tăie normala MN în centrul de curbură căutat.

3º Să presupunem că vrem a găsi centrul de curbură într'unul din vârfurile elipsei. Din formula generală (Fig. 46)

$$\frac{MN}{MP} = \frac{b^2}{a^2},$$

se vede că în vârfurile axei mari, când M tind către A, MN tind către normala infinit vecină de AO și deci punctul N al lor de intersecție este centrul de curbură în A, astfel că MN tind către raza de curbură în A. Din formula de mai sus, avem

$$\lim_{M \rightarrow A} \frac{MN}{MP} = \frac{b^2}{a^2} \lim_{M \rightarrow A} \frac{OA}{MP} = \frac{b^2}{a^2} \frac{OA}{a} = \frac{b^2}{a^2} a = \frac{b^2}{a},$$

expresiune care dă raza de curbură în A. La fel se vede că raza de curbură în B este  $\frac{a^2}{b}$ .

Construcția o facem astfel. Considerăm dreptunghiul OATB format de OA, OB și tangentele la elipsă în vârfurile A și B. Perpendiculara din T pe AB tăie axele OA și OB în  $\alpha$  și  $\beta$ . Din triunghiurile asemenea OAB, AT $\alpha$ , BT $\beta$ , avem

$$\frac{OB}{OA} = \frac{AT}{AT} = \frac{BT}{BT},$$

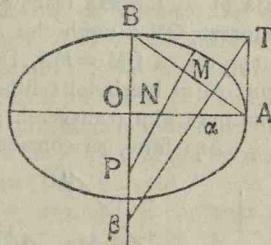


Fig. 46.

de unde

$$A\alpha = \frac{OB \cdot AT}{OA} = \frac{b^2}{a}, \quad B\beta = \frac{OA \cdot BT}{OB} = \frac{a^2}{b},$$

ceea ce probează că centrele de curbură în A și B la elipsă sunt punctele  $\alpha$  și  $\beta$ .

**II. Iperbola.** Se poate întrebuița o construcție analoagă cu prima dată la elipsă, în cazul când se cunosc focarele. Avem, însă, și următoarea

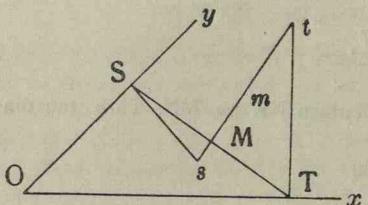


Fig. 47.

construcție. Fie M un punct al iperbolei cu asymptotele Ox și Oy (Fig. 47). Tangenta în M la iperbolă este dreapta ST dusă prin M, care, mărginită la asymptote, are mijlocul său în M. Normala în M este perpendiculară în M pe ST.

M fiind mijlocul lui ST, *centrul de curbură*  $m$  este [No. 18, Aplica-

ția 4º] *mijlocul segmentului*  $st$  din normala în M, cuprins între perpendiculararele ridicate în S și T pe Ox și Oy.

Să considerăm acum cazul iperbolei echilatere. Unghiul asymptelor Ox și Oy este drept (Fig. 48), astfel că bisectoarea ON a unghiului  $xOy$  este axa transversă a iperbolei echilatere. Fie N punctul unde această bisectoare tăie cercul de diametru ST. Unghurile  $SON = NOT$ , apoi, M fiind mijlocul lui ST,  $MN = OM$ , ca raze ale cercului. ST fiind tangentă în M la iperbolă echilateră, MN este normală în M, astfel că, M fiind un punct al iperbolei echilatere cu centrul O, normala în M tăie axa transversă a iperbolei (bisectoarea ON a unghiului  $xOy$ ) în punctul N, în aşa fel că  $OM = MN$ . De aci, un procedeu de a construi normala într'un punct M al iperbolei echilatere; cercul cu centru în M și raza OM, tăie a două oară axa transversă în N, aşa că normala în M este MN.

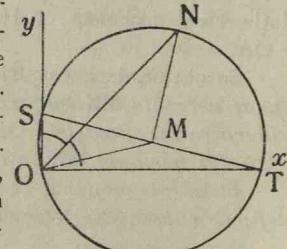


Fig. 48.

Așa fiind, să considerăm un punct M al iperbolei echilatere cu axa transversă OA; se construiește normala MN, care tăie axa netransversă în P (Fig. 49). Avem  $OM = MN = MP$ .

Deci, normala PN are mijlocul său în M, punctul M divide segmentul PN într'un raport constant, se poate aplica același procedeu ca și la elipsă pentru găsirea centrului de curbură în M, și anume, se ridică în punctul N unde normala tăie axa o perpendiculară pe normală ce tăie în H diametrul OM al punctului M; perpendiculara din H pe axa OA tăie normala în m centrul de curbură în punctul M al iperbolei echilatere.

Se poate mai mult simplifica această construcție. Să ducem din m perpendiculara  $mM_1$  pe OM. Unghurile  $MmH = MHm$  ca fiind compli-

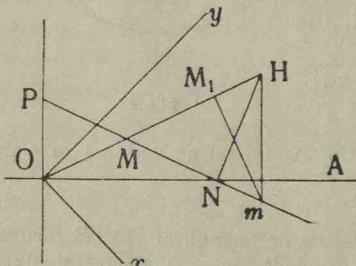


Fig. 49.

mentele unghiurilor egale  $MNO$ ,  $MON$ . Triunghiul  $MHm$  este isoscel, triunghiurile  $MM_1m = MHN$ , deci  $MM_1 = MN$ . Cum  $OM = MN$ , rezultă  $OM = MM_1$ , deci, se prelungește  $OM$  cu o lungime egală  $MM_1 = OM$ , perpendiculara în  $M_1$  pe  $OM$  tae normala  $MN$  în centrul de curbură  $m$ .

Când punctul  $M$  este vârful unei iperbole oarecare (Fig. 50), se vede, din figura 47, că tangenta  $ST$  este perpendiculară pe axa iperbolei, care devine normală la vârf, iar punctele  $s$  și  $t$  se confundă cu centrul de curbură  $m$ . Deci, centrul de curbură într'un vârf al unei iperbole oarecare, se obține ducând tangenta la vârf care tăie asimptotele în  $S$  și  $T$ . Perpendiculararele în  $S$  și  $T$  pe asimptotele se tăie în centrul de curbură  $\alpha$ .

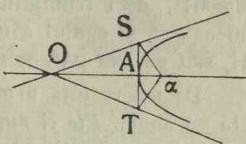


Fig. 50.

În cazul iperbolei echilatere, unghiul  $SOT$  este drept, figura  $\alpha SOT$  este patrat, deci  $\alpha$  este simetricul lui  $O$  față de  $A$  și deci centrul de curbură în vârful unei iperbole echilatere este simetricul centrului în raport cu vârful iperbolei.

*Observare.* Dacă punctele  $M$  și  $m$  sunt date (Fig. 49), locul punctului  $M_1$  este cercul descris pe  $Mm$  ca diametru, iar acela al punctului  $O$  este cercul simetric al precedentului în raport cu punctul  $M$ . Avem deci următoarea proprietate: Locul centrelor iperbolelor echilatere având în punctul  $M$  un contact de ordinul al doilea cu o curbă dată, este un cerc având ca diametru simetricul în raport cu  $M$ , a razei de curbură în punctul  $M$  la curbă dată.

III. Parabola. Această curbă se poate considera ca un caz particular al conicelor cu centru, presupunând că unul din focare este aruncat la infinit (Fig. 51). F fiind focalul și  $\Delta$  directoarea parabolei, se știe că normala în  $M$  este bisectoarea unghiului format de dreapta  $FM$  cu paralela din  $M$  la axa parabolei (perpendiculara pe directoare).

Ducând această bisectoare, se știe că centrul de curbură  $m$  este conjugatul armonic al lui  $M$  în raport cu punctele  $f$  și  $f'$  de intersecție ale normalei în  $M$  (această bisectoare) cu perpendiculararele în focarele  $F$  și  $F'$  pe dreptele  $FM$  și  $F'M$ . Cum  $F'$  este presupus la infinit, perpendiculara în  $F'$  pe  $F'M$  tăie normala la infinit. Deci punctul  $f'$  este la infinit pe normală și conjugat armonic cu  $f$  în raport cu  $M$  și  $m$ , adică  $f$  este mijlocul lui  $Mm$ . Cum  $f$  este construit, centrul de curbură  $m$  la parabolă este simetricul lui  $M$  față de  $f$ .

Se poate face și altfel această construcție. Fie  $G$  simetricul lui  $M$  față de  $F$ ; perpendiculara în  $G$  pe  $MG$  tăie normala în  $m$ , centrul de curbură.

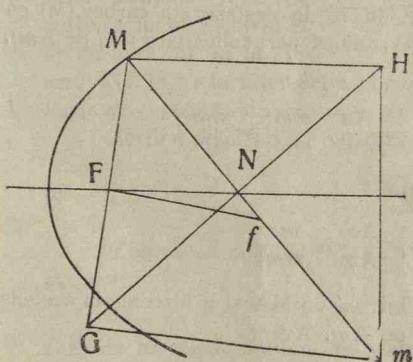


Fig. 51.

Putem da altă interpretare acestei construcții. Fie  $N$  punctul unde normala în  $M$  tăie axa parabolei, care este paralelă cu  $MH$  (Fig. 51). Deci

unghiurile  $FMN=FNM$ , căci  $MN$  este bisectoarea unghiului  $FMH$ . Rezultă că  $FN=MF$  și cum  $FG=MF$ , urmează că  $MF=FG=FN$ , deci  $F$  este centrul unui cerc ce trece prin  $M$ ,  $N$ ,  $G$ , cu diametru  $MG$ , sau că unghiul  $MNG$  este drept, adică  $NG$  perpendiculară pe  $MN$ . Punctul  $m$  fiind pe bisectoarea unghiului  $GMH$ , care este înălțime în triunghiul  $GMH$ , urmează că  $Gm=mH$ ,  $GM=MH$ , deci triunghiurile  $MGm=MHm$ . Dar unghiul  $MGm$  fiind drept, urmează că și egalul său  $MHm$  să fie drept, adică  $Hm$  perpendiculară pe  $MH$ , sau pe axa parabolei.

De aici rezultă următoarea construcție pentru centrul de curbură în  $M$  la parabolă. Fie  $N$  punctul unde normala în  $M$  tăie axa parabolei,  $H$  punctul de intersecție al paralelei la axă dusă prin  $M$  cu perpendiculara în  $N$  pe normală. Perpendiculara din  $H$  pe axă tăie normala în centrul de curbură.

În caz când punctul  $M$  este *vârful parabolei* (Fig. 51),  $N$  trebuie către punctul de intersecție al normalei la vârf cu normala infinit vecină, adică centrul de curbură  $\alpha$  la vârf. Dar, avem neconvenit  $MF=FN$ , deci focalul  $F$  este mijlocul distanței de la vârf la centrul de curbură  $\alpha$ . Deci, *centrul de curbură în vârful parabolei este simetricul vârfului în raport cu focalul*.

28. **Tractricea**<sup>(1)</sup> este curba ( $M$ ) ale cărei tangente mărginită de la

punctul de contact  $M$  până la o curbă dată ( $A$ ) au aceeași lungime, adică  $MA=\text{const.}$  (Fig. 52).

Centrul de curbură  $m$  al curbei ( $M$ ) este (No. 18,2<sup>0</sup>) intersecția normalei în  $M$  la această curbă cu normala în  $A$  la curba ( $A$ ).

Centrul de curbură  $m_1$  al desfășurării curbei ( $M$ ) depinde de centrul de curbură  $a$  al curbei ( $A$ ). În adevăr, să considerăm

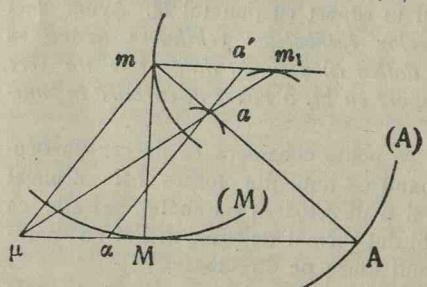


Fig. 52.

triunghiul  $mMA$ , căruia să-i aplicăm metoda lui Mannheim [No. 21]. Însemnând cu  $a'$  intersecția normalei în  $m$  la desfășurata curbei ( $M$ ) cu normala în  $a$  la desfășurata curbei ( $A$ ) (adică perpendiculara în  $a$  pe  $Am$ ), avem

$$\frac{d(M)}{d(A)} = \frac{Mm}{Am}, \quad \frac{d(A)}{d(m)} = \frac{Aa}{ma'}, \quad \frac{d(m)}{d(M)} = \frac{mm_1}{Mm}.$$

Înmulțind aceste relații, rezultă

$$1 = \frac{Aa \cdot mm_1}{Am \cdot ma'}, \quad \frac{Aa}{Am} = \frac{ma'}{mm_1}.$$

Fie  $\alpha$  punctul de întâlnire al lui  $aa'$  cu  $MA$  și  $\mu$  intersecția aceleiași drepte  $MA$  cu perpendiculara în  $m$  pe  $Am$ . Avem

$$\frac{Aa}{Am} = \frac{A\alpha}{A\mu},$$

<sup>(1)</sup> A se vedea, M. d'Ocagne, *Théorie géométrique du virage à bicyclette (Génie Civil)*, t. XXIX, 1896, p. 140.

deci

$$\frac{A\alpha}{A\mu} = \frac{ma'}{mm_1},$$

relație care probează că dreapta  $m_1\mu$  trece prin  $a$ , de unde urmează următoarea construcție. Se ridică în centrul de curbură  $m$  al curbei  $(M)$ , perpendiculară pe  $Am$  ce tăie  $AM$  în  $\mu$ ; dreapta care unește acest punct  $\mu$  cu centrul de curbură  $a$  al curbei  $(A)$  trece prin centrul celei de a doua cururi,  $m_1$ , a curbei  $(M)$ .

Să considerăm, în particular, cazul când curba  $(A)$  este o linie dreaptă  $X'X$  și să ne propunem să studiem curba  $(T)$  tractrice corespunzătoare (Fig. 53).

Fie  $mt$  o tangentă la tractrice mărginită între punctul de contact  $m$  și punctul  $t$  unde tăie dreapta  $OX$ ; avem  $mt = a = \text{const}$ . Numind cu  $\alpha$  unghiul  $Xtm$ , distanța  $mp$ , de la  $m$  la  $OX$ , este egală cu  $a \sin \alpha$ ; aceasta descrește de la valoarea  $a$  la 0 când  $\alpha$  crește dela  $\frac{\pi}{2}$  la  $\pi$ . Punctul  $A$  unde tangenta este perpendiculară pe  $OX$  este deci cel mai depărtat de  $OX$ .  $mp$  devine nul când  $m$  este la infinit, deci curba are pe  $OX$  ca asymptotă și are două ramuri simetrice în raport cu dreapta  $AO$ .

Curbura tractricei. Fie  $mK$ ,  $m'K'$  normalele la  $(T)$  în două puncte infinite vecine. Triunghiurile dreptunghice  $tmK$ ,  $t'm'K'$  au prin ipoteză  $mt = m't'$ ; laturile  $mK$  și  $m'K'$  sunt echivalente ca având limită comună raza de curbură în  $m$ . Centrul  $M$  de curbură în  $m$  la  $(T)$

este (No. 18,2<sup>o</sup>) la intersecția normalei în  $m$  cu perpendiculara în  $t$  pe  $OX$ ; raza de curbură este  $mM = -a \cot \alpha$ .

Scriind relația care dă raza de curbură a unei曲, avem

$$(23) \quad \frac{d(\text{arc } Am)}{d\alpha} = -a \cot \alpha.$$

Lungimea arcului și quadratura tractricei. Integrând ecuația (23), avem

$$\text{arc } Am = -a \log \sin \alpha,$$

care dă lungimea arcului de tractrice.

Aplicând segmentului  $mt$  formula (10) (No. 18), care dă variația unui segment, avem

$$d(mt) = d(t) \cos(\pi - \alpha) - d(m).$$

Dar  $mt = \text{const.}$ , deci  $d(mt) = 0$ . Deci,  $t$  descriind dreapta  $OX$ ,

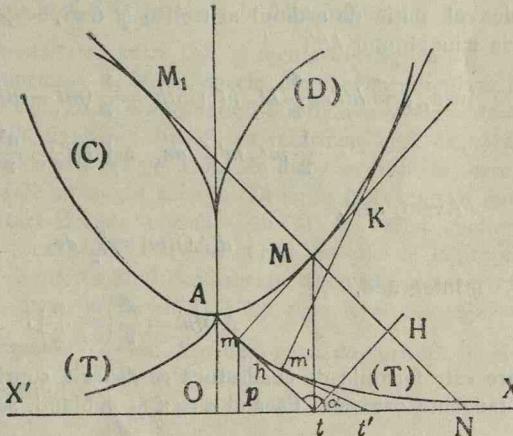


Fig. 53.

$d(t) = d(Ot)$ , iar  $d(m) = d(\text{arc } Am)$ , din formula precedentă rezultă

$$0 = -d(Ot) \cos \alpha - d(\text{arc } Am),$$

$$\frac{d(\text{arc } Am)}{d\alpha} = -\frac{d(Ot)}{d\alpha} \cos \alpha$$

și ținând seamă de (23), avem

$$\frac{-d(Ot)}{d\alpha} \cos \alpha = -a \cot \alpha,$$

(24)

$$\frac{d(Ot)}{d\alpha} = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Să considerăm patrulaterul curbiliniu  $AOtm$  și cel infinit vecin cu el,  $AO't'm'$ . Diferența ariilor lor, care este variația  $d(AOt'm')$ , sau creșterea acestei arii, diferă de aria triunghiului  $htl'$  cu aria  $mhm'$ . Dar aria  $mhm' = \frac{1}{2} mh \cdot hm' \sin mhm' = \frac{1}{2} mh \cdot hm' \sin thm' = \frac{1}{2} mh \cdot hm' \sin(d\alpha)$ .

Cum  $mh, m'h, \sin(d\alpha)$ , sau  $d\alpha$ , sunt infiniti mici, produsul lor este infinit mic cel puțin de ordinul al treilea și deci, se poate înlocui  $d(AOt'm')$  cu aria triunghiului  $htl'$ .

$$\begin{aligned} \text{Însă, aria } htl' &= \frac{1}{2} ht \cdot ht' \sin ht' = \frac{1}{2} (mt - mh)(m't' + hm') \sin(d\alpha) - \\ &\quad \frac{1}{2} mt \cdot m't' \cdot d\alpha, \text{ aria } htl' \sim \frac{a^2}{2} d\alpha. \end{aligned}$$

Avem, deci,

$$d(AOt'm) = \frac{a^2}{2} d\alpha.$$

Integrând,

$$AOtm = \frac{a^2}{2} \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right),$$

care este formula de cuadratură ce dă aria cuprinsă între  $AO$ , curbă și o tangentă oarecare. Făcând  $\alpha = \pi$  și dublând, se vede că aria totală cuprinsă între tractrice și baza sa  $X'X$  este egală cu  $\frac{\pi a^2}{2}$ .

*Desfășurata tractricei.* Din (24) deducem

$$d(Ot) = a \frac{d\alpha}{\sin \alpha}, \quad Ot = a \log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Din triunghiul dreptunghic  $Mmt$ , avem

$$mt = Mt \cos mtM, \quad a = Mt \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) = Mt \sin \alpha,$$

$$Mt = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Față de axele  $OX$  și  $OY$ , lungimile  $Ot = x$ ,  $Mt = y$  sunt coordonatele punctului  $M$ , centrul de curbură al tractricei în  $m$ . Avem

$$x = a \log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad y = \frac{a}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = e^{\frac{x}{a}}, \quad \sin \alpha = \frac{a}{y}.$$

Dar

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \frac{a}{y} = \frac{2 e^{\frac{x}{a}}}{1 + e^{2 \frac{x}{a}}}.$$

Împărțind cu  $e^{\frac{x}{a}}$ ,

$$\frac{a}{y} = \frac{2}{e^{-\frac{x}{a}} + e^{\frac{x}{a}}},$$

de unde

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

care este ecuația curbei *chainette*. Deci, desfășurata tractricei este curba *chainette*.

*Proprietățile curbei chainette* sunt date imediat de cele ale tractricei,

1º Când  $\alpha$  crește de la  $\frac{\pi}{2}$  la  $\pi$ ,  $Ot$  crește de la 0 la infinit,  $Mt$  de la  $a$  la infinit, curba (C) are convexitatea către OX și forma din figura 53.

2º Pentru a găsi normala în M, să ducem din  $t$  perpendiculara  $tH$  pe normala  $MN$  în M. Se vede că în dreptunghiul  $MmtH$  avem  $MH=mt=a$ . Deci, normala în M se află deseriind din M ca centru un cerc de rază  $a$  și ducând din M perpendiculara  $Mt$  pe  $X'X$ , iar din  $t$  se duce la cerc o tangentă  $tH$  ce face cu OX un unghi ascuțit. Dreapta care unește punctul M cu punctul de contact H este normală în M la curba *chainette*.

3º Să considerăm arcul  $AM$  al acestei curbe. Se știe de la proprietățile desfășurărilor, că *chainette* fiind desfășurata tractricei a cărei rază de curbură în  $m$  este  $R$ , avem  $d(M)=d(R)$ . Cum raza  $R=-\operatorname{acotg}\alpha$ , urmează că  $d(M)=d(-\operatorname{acotg}\alpha)=\frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha$ . Așa dar, raza de curbură în M la *chainette* este, conform definiției,

$$R_1 = \frac{d(M)}{d\alpha} = \frac{a}{\sin^2 \alpha}.$$

Prelungind normala în M până tăie pe OX în N, din triunghiul  $M/N$ , avem

$$\overline{Ml}^2 = MN \cdot MH = MN \cdot a, \quad Mt = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad MN = \frac{a}{\sin^2 \alpha}.$$

Deci, raza de curbură a curbei *chainette* este egală cu normala limitată la dreapta OX și dirijată în sens contrar.

29. **Caustice. Podare.** Să presupunem că razele MA, tangente la curbă (A), se refractă pe o curbă (M), astfel că unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$ , făcute cu normala în M la curba (M), de raza incidentă MA și raza refractată MB, să fie legate cu relația

$$\sin \beta = n \sin \alpha,$$

$n$  fiind indicele de refracție (Fig. 54). Curba (B), infășurătoarea razei refractate, este zisă *caustica* curbei (A) produsă de curba *dirimantă* (M).

Să stabilim relația dintre punctele A și B a curbei date și a caus-

ticei sale. Să diferențiem relația dată și avem

$$(30) \quad \cos\beta d\beta = n \cos\alpha d\alpha.$$

Să coboram din centrul de curbură C al lui (M) perpendicularele CH și CK pe MA și MB. Se vede că

$$CH = CM \sin\alpha, \quad CK = CM \sin\beta,$$

$$\frac{CH}{CK} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n}.$$

Egalitatea (30) se poate scrie

$$(31) \quad CH \cos\beta d\beta = CK \cos\alpha d\alpha.$$

Patrulaterul MCKH fiind inscriptibil, unghiurile CKI, CHI sunt respectiv egale cu  $\alpha$  și  $\beta$ . Să ducem CI perpendiculară din C pe HK; avem

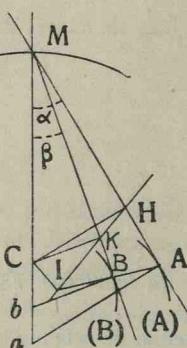


Fig. 54.

și deci relația (31) devine

$$(32) \quad IH d\beta = IK d\alpha.$$

Însemnând cu  $a, b$  intersecțiile normalei în M cu normalele în A și B la infășurătoarele (A) și (B), să aplicăm formula (17) de la variația unui unghi (No. 19) și avem pentru unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$ ,

$$d(\alpha) = d(M) \left( \frac{1}{MC} - \frac{1}{Ma} \right) = \frac{Ma - MC}{MC \cdot Ma} d(M) = \frac{Ca \cdot d(M)}{MC \cdot Ma} = \frac{HA \cdot d(M)}{MA \cdot MC},$$

$$d(\beta) = d(M) \left( \frac{1}{MC} - \frac{1}{Mb} \right) = \frac{Mb - MC}{MC \cdot Mb} d(M) = \frac{Cb \cdot d(M)}{MC \cdot Mb} = \frac{KB \cdot d(M)}{MB \cdot MC}.$$

Înlocuind în (32) obținem,

$$IH \frac{KB \cdot d(M)}{MC \cdot MB} = IK \frac{HA \cdot d(M)}{MA \cdot MC},$$

sau

$$IH \cdot MA \cdot KB = IK \cdot HA \cdot BM,$$

ceea ce probează că punctele A, B, I, considerate pe laturile triunghiului MHK, sunt colineare.

Se obține, deci, următoarea proprietate<sup>(1)</sup>, pe care Cornu a obținut-o analitic: *Dreapta care unește punctele A și B, unde raza incidentă și raza refractată ating infășurătoarele lor, trece prin piciorul I al perpendicularei coborâte din centrul de curbură C al curbei dirimante pe dreapta care unește picioarele H și K ale perpendicularelor coborâte din același centru C pe cele două raze.*

*În cazul reflexiunei,  $n = -1$ , razele MA și MB sunt simetrice în*

<sup>(1)</sup> A se vedea, M. d'Ocagne, in *Nouvelles Annales de Math.* (1915, p. 505). Pentru alte numeroase aplicații, a se vedea, M. d'Ocagne, *Sur les adointes infinitésimales des courbes planes* (*American Journal of Mathematics*, 1889, p. 55 și 1892, p. 227; *Nouvelles Annales de Math.*, 1900, p. 219; *Bull. de la Soc. math. de France*, t. 52, p. 132 și 395), *Théorème général sur la détermination des normales* (*Nouvelles Annales de Math.*, 1890, p. 289 și 1894, p. 501).

raport cu normala MC, dreapta HK este perpendiculară la această normală și punctul I se află pe această normală (Fig. 55). 

Deci, în acest caz, punctul I prin care trece dreapta AB este piciorul perpendicularării cobrațe pe MC din piciorul H al perpendicularării cobrațe pe raza incidentă MA din centrul de curbură C al curbei dirimante (M).

Să presupunem, mai mult, că raza incidentă MA, în loc de a avea o infășurătoare curba (A), să treacă printr'un punct fix A. Construcția punctului B unde raza reflectată MB atinge infășurătoarea rămâne aceeași.

Să coborâm atunci pe tangentă în M, la curba dirimantă, perpendiculară AP. Locul punctului P (Fig. 55) este *podara curbei* (M) în raport cu punctul A și se știe (No. 22, 2<sup>o</sup>) că normala PN la această podară trece prin mijlocul J al lui AM.

Presupunând că AP tăie pe MB în Q, punctul Q este simetricul lui A în raport cu P. Curba (Q) este deci omotetica curbei (P) în raport cu A și cum dreapta QM este paralelă cu PN, normală la curba (P), rezultă (No. 22, 3<sup>o</sup>) că QM este normală în Q (normalele la două curbe omotetice sunt paralele). Deci, *caustica prin reflexiune a punctului A în raport cu curba (M)* este desfășurata omoteticei în raport cu A, în raportul de omotetie 2, a podarei curbei (M) relativ la A.

Cum punctele omoloage P și Q ale acestor două curbe omotetice, sunt în linie dreaptă cu A, se vede (No. 18,4<sup>o</sup>) că centrele de curbură în punctele omoloage vor fi în linie dreaptă cu A. Centrul de curbură în Q, la curba (Q), fiind B, centrul de curbură R în P la curba podară (P), este la intersecția dreptei AB cu normala în P, adică dreapta PN. Deci, următoarea construcție pentru centrul de curbură R al podarei (P): Fie H proiecția pe AM a centrului C de curbură a curbei (M) și I proiecția pe normală în M a punctului H; N fiind proiecția pe MC a punctului A, centrul de curbură R la podara (P) este la intersecția dreptelor PN și AI.

Să aplicăm această construcție la podara cercului C în raport cu

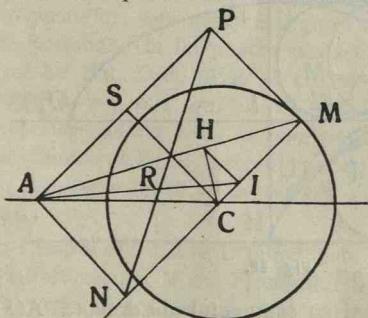


Fig. 56.

si AI se tae în centrul de curbură R

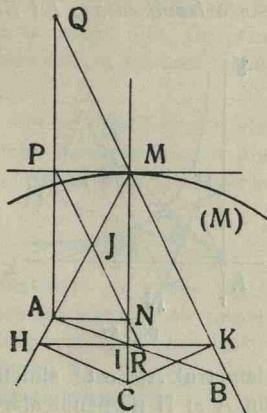


Fig. 55

punctul A (Fig. 56). Dacă CS perpendiculară pe AP, se vede că SP=CM, raza cercului, o constantă; locul lui S este cercul de diametru AC. Peste deci obținut prelungind raza vectoare AS a cercului de diametru AC cu o lungime constantă SP, adică P descrie *meulul lui Pascal*, după însăși definiția sa. Centrul de curbură în P se află astfel: Fie H proiecția lui C pe AM; I proiecția lui H pe MN, N proiecția lui A pe MC; dreptele PN

O altă aplicație să facem la podara unei iperbole echilaterale, care este o lemniscată a lui Bernoulli (Fig. 57) de același centru și vârfuri. Se

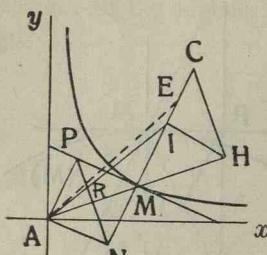


Fig. 57.

știe că centrul de curbură al iperbolei echilaterale în M se obține prelungind raza vectoare AM cu o lungime egală MH; se ia o dreaptă ME egală înclinață ca și AM pe axa iperbolei (bisectoarea unghiului  $xOy$ ) și ME este normală în M la iperbolă; perpendiculara ridicată în H pe AH tăie normala ME în centrul de curbură C.

Revenind la construcția centrului de curbură a unei podare (Fig. 55), se vede că în figura 57, piciorul H al perpendiculararei scoborată din centrul de curbură C al iperbolei echilente pe

diametrul AM este simetricul lui A față de M. Rezultă că dacă se duce din A și H perpendicularele AN și HI pe normala ME (Fig. 57), centrul de curbură R al podărei (P) în P este la intersecția dreptelor PN cu AI. Însă, din triunghiurile asemenea ARP, RNI, avem

$$\frac{PR}{RN} = \frac{AP}{IN} = \frac{MN}{LN}.$$

Dar cum A și H sunt simetrice față de M, urmează că N și I sunt simetrice față de M și deci  $NM = MI$ ,  $NI = 2MN$  și deci relația de mai sus devine

$$\frac{PR}{RN} = \frac{MN}{IN} = \frac{1}{2},$$

de unde

$$PR = \frac{RN}{2}, \quad PN = 3PR, \quad PR = \frac{PN}{3}.$$

Deci, raza de curbură PR a lemniscatei este egală cu o treime din normala sa polară PN când polul este asezat în centrul curbei.

30. **Cicloida.** Se zice cicloidă curba descrisă de un punct dat al unui cerc care se rostogolește fără să alunecă pe o dreaptă  $X'X$  (Fig. 58). Fie O un punct al lui  $X'X$  cu care coincide la momentul inițial punctul M ce se mișcă. Pentru a construi cicloida prin puncte, se va descrie un cerc tangent la  $X'X$  într'un punct variabil A, cu o rază constantă și totdeauna de aceeași parte a lui  $X'X$ . Se va lăsa

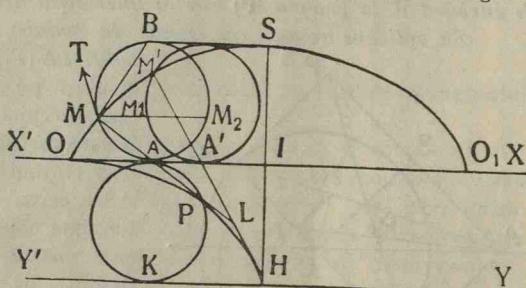


Fig. 58.

admete o axă de simetrie perpendiculară pe OX, căci o buclă poate fi obținută, fie prin rostogolirea cercului, efectuată în sensul OO<sub>1</sub>, fie prin rostogolirea în sensul de la O<sub>1</sub> la O. Amplitudinea OO<sub>1</sub> a fiecărei bucle este egală cu  $2\pi a$ , a fiind raza cercului mobil.

*Normala.* Fie A și A' două puncte de contact infinit vecine ale cercului mobil cu dreapta X'X și M și M' punctele corespunzătoare ale cicloidei. Să ducem de la un cerc la altul MM<sub>1</sub> paralelă cu OX; avem MM<sub>1</sub> = AA'. De asemenea,

$$\text{arc } M_1M' = \text{arc } A'M' - \text{arc } A'M_1 = OA' - OA = AA'.$$

Triunghiul infinit mic MM<sub>1</sub>M' poate fi considerat ca isoscel, căci MM<sub>1</sub> = AA' = M<sub>1</sub>M'; deci unghiiurile M, M' ale acestui triunghi au limite egale. Limita dreptei MM', sau tangenta la cicloidă, este deci egală inclinată pe MM<sub>1</sub> (direcția OX) și M<sub>1</sub>M' (direcția tangentei MT în M la cerc); deci unghiiurile TMB = BMM<sub>2</sub>, adică această tangentă trece prin mijlocul B al arcului MM<sub>2</sub>; normala în M trece deci prin A. Așa dar, *normala într-un punct al cicloidei, trece prin punctul de contact al cercului mobil cu dreapta fixă*.

*Curbură. Desfășurată.* Să descriem un cerc simetric cu primul în raport cu punctul A și fie P intersecția lui cu normala MA. Să ducem tangentă KY la acest cerc, paralelă cu X'X și fie H punctul ei de intersecție cu axa SI a buclei considerate. Avem

$$\text{arc KP} = \text{arc KPA} - \text{arc AP} = \pi a - \text{arc MA} = OI - OA = AI = KH.$$

Cum punctul H este fix, rezultă că locul lui P este o cicloidă cu baza Y'Y cu punctul de întoarcere H.

Dar, tangentă în P la această cicloidă trebuie să treacă prin punctul cercului generator cel mai departat de bază, va fi PA, adică normală la cicloidă precedentă. Aceasta a două cicloidă este deci *înfașurătoarea normalelor primei*, cu alte cuvinte desfășurată. Raza de curbură în M este egală cu MP și egală cu indoitul normalei în A.

Deci, *raza de curbură a cicloidei este egală cu indoitul normalei și dirijată în același sens; desfășurata este altă cicloidă egală cu prima și având ca vârfuri punctele de întoarcere ale acesteia*.

*Lungimea arcului.* Arcul de cicloidă OP, după teoria generală a desfășuratorilor, este egal cu segmentul rectiliniu MP; deci este indoitul lui AP. Raționând la fel pentru desfășurătoare, se vede că arcul SM este indoitul lui BM. Deci, *arcul de cicloidă, cuprins între vârf și un punct oarecare al curbei, este egal cu indoitul tangentei în acest punct, socricită de la punctul de contact pâna la tangentă la vârf*. Dacă M vine în O, MB devine diametrul  $2a$  al cercului mobil; arcul SO are deci lungimea  $4a$ . Așa dar, *lungimea unei bucle întregi este egală cu de 8 ori raza cercului mobil*.

*Cuadratura.* Fie L punctul de întâlnire al normalei MA și normalei infinit vecine, M'A'. Triunghiurile LAA', LMM' având unghiu L comun, raportul ariilor este egal cu

$$\frac{LA \cdot LA'}{LM \cdot LM'},$$

care are ca limită  $\frac{1}{4}$ ; deci, aria triunghiului ALA' este echivalentă cu o treime din aria patrilaterului curbiliniu MAA'M'. Urmează că arile triunghiurilor curbilinii finite OMA și OAP sunt în raportul 3:1. În particular, pentru aria jumătății de buclă OSI, avem

aria OMSI = 3 aria OPHI = 3 (aria dreptunghiului cu laturile OI, IS - aria OMSI), 4 aria OMSI = 3 · OI · IS,

$$\text{aria OMSI} = \frac{3}{4} \pi a \cdot 2a = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

Deci, aria buclei întregi este  $2\pi a^2$ , adică de trei ori aria cercului mobil.

31. **Spirala logaritmică** este curba ale cărei tangente MT tăie razele vectoare sub un unghi constant (Fig. 59). Unghiuul OMT fiind constant și una din laturi rămânând tangentă la curba descrisă de vârful său M, rezultă (No. 19, Aplicația 1<sup>a</sup>) că centrul de curbură  $m$  al spiralei în M este la intersecția perpendicularei în O pe OM cu normala în M (perpendiculara pe MT).

Locul lui  $m$  este tot o spirală logaritmică, de oarece raza vectoare  $Om$  face cu tangentă  $mt$  un unghi constant, egal cu cel făcut de  $OM$  și  $MT$ . Desfășurata spiralei este însăși spirala dată.

32. **Aria coroanei determinată de un punct al unei coarde de lungime constantă într-o curbă dată.** Fie M un punct determinat pe o coardă AB de lungime constantă, mobilă în curba închisă (C), cu conexiune simplă, astfel că  $MA = a$ ,  $MB = b$ , suma  $a + b = l = \text{const.}$  (Fig. 60) fiind lungimea coardei.

Fie I intersecția normalelor la curba (C) în A și B. Punctul de contact P al coardei AB cu înfășurătoarea sa este (No. 20) piciorul P al perpendicularei din I pe AB.

Să ducem prin P poziția infinit vecină A'B' a coardei AB și fie M' punctul corespunzător lui M pe coarda A'B'. Însemnând cu  $\rho$  distanța variabilă AP, se vede că aria infinitezimală MM'A'A are ca valoare principală pe aceea a diferenței  $(PAA' - PMM')$  adică

$$d\sigma = \frac{1}{2} [\rho^2 - (\rho - a)^2] d\theta, \quad d\sigma = \frac{a}{2} (2\rho - a) d\theta.$$

Deci, aria coroanei cuprinsă între curba (M) și curba (C), care corespunde la o variație a lui  $\theta$  de la 0 la  $2\pi$ , este dată de

$$(33) \quad \sigma = a \int_0^{2\pi} \rho d\theta - \pi a^2.$$

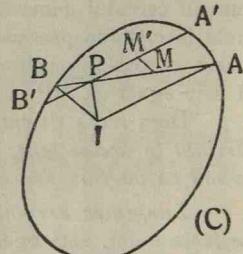


Fig. 59.

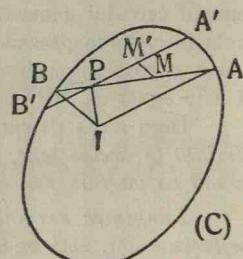


Fig. 60.

Dar, aria coroanei cuprinsă între curba (C) și infășurătoarea lui AB poate fi obținută, prin integrarea, fie de arii elementare PAA', fie prin integrarea de arii elementare PBB'. Avem deci

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (l - \rho)^2 d\theta,$$

de unde

$$\int_0^{2\pi} [\rho^2 - (l - \rho)^2] d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} (2\rho - l) d\theta = 0,$$

și deci

$$\int_0^{2\pi} \rho d\theta = \pi l.$$

Înlocuind această valoare în (33), avem

$$\begin{aligned} \sigma &= a\pi l - \pi a^2 = \pi a(l-a) = \pi a(a+b-a), \\ &\sigma = \pi ab, \end{aligned}$$

care dă expresia arii căutată.

În particular, coroana limitată la curba descrisă de mijlocul coardei are o arie egală cu aceea a unui cerc având această coardă ca diametru.

**33. Determinarea geometrică a maximelor și minimelor a unor elemente legate de o figură mobilă.** Să presupunem că am putut exprima geometric variația unei din elementele unei figuri variabile. Se poate observa că, dacă vreunul din aceste elemente trece printr'un maximum sau minimum, atunci variația sa este nulă și deci, de aci, un mijloc de a găsi condiția geometrică pe care trebuie să o îndeplinească acest element. În adevăr, când un asemenea element trece printr'un maximum sau minimum, este ca și cum, pentru o variație infinit mică a poziției sale, plecând dela aceasta, ar rămâne constant.

1º De ex., să considerăm o coardă AA<sub>1</sub> care închide în curba (A) un segment de arie constantă. Când trecem de la poziția AA<sub>1</sub> la cea infinit vecină A'A<sub>1</sub>, (Fig. 61), variația arii segmentului este diferența ariilor triunghiurilor infinitezimale MAA', MA<sub>1</sub>A'<sub>1</sub>, adică

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left( \overline{MA}^2 - \overline{MA}_1^2 \right) d\theta.$$

Deci, când variația aceasta este nulă, urmează  $MA = MA_1$  și M este mijlocul lui AA<sub>1</sub>. Dar poziția M unde se tăie două coarde infinit vecine, AA<sub>1</sub> și A'A<sub>1</sub>, este punctul de contact al coardei AA<sub>1</sub> cu infășurătoarea sa. Deci, segmentul închis ae această coardă trece printr'un maximum sau minimum pentru o poziție a coardei care atinge infășurătoarea în mijlocul său. Sau, o coardă AA<sub>1</sub>, care determină într-o curbă (A) un segment de arie constantă, atinge infășurătoarea în mijlocul ei.

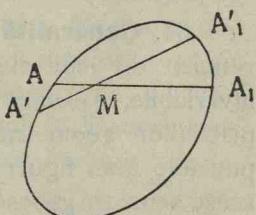


Fig. 61.

2º Să considerăm alt exemplu. Să căutăm *triunghiul de arie minimum circumscris la o elipsă*. Să lăsăm fixe două tangente ce formează triunghiul, AB și AC, de ex., și să facem să varieze a treia, BC. Vedem, după cele stabilite mai sus, că elipsa trebuie să atingă pe BC în mijlocul ei. Aplicând același raționament celorlalte două laturi, se vede că elipsa trebuie să atingă laturile triunghiului ABC respectiv în mijlocul lor.

Pentru a construi un astfel de triunghi, vom considera cercul a cărui proiecție este elipsa. Triunghiul circumscris la acest cerc, a cărui proiecție este ABC, este astfel că punctele de contact ale sale cu cercul coincid cu mijloacele laturilor, ceea ce arată că triunghiul este echilateral. Se vede deci că sunt o infinitate de triunghiuri circumscrise la elipsă, toate de aceeași arie, care corespund condițiilor de minimum. Se zice *poligon semi-regulat circumscris la elipsă*, proiecția poligonului regulat circumscris la cercul a cărui proiecție este elipsa. Deci, *triunghiurile semiregulate, circumscrise la elipsă, toate de aceeași arie, sunt acelea pentru care, printre toate triunghiurile circumscrise la elipsă, această arie este minimă*.

3º Se poate, de asemenea, determina *triunghiurile de arie maximum inscrise în elipsă*. Pentru aceasta, să considerăm un triunghi ABC, inscris în elipsă, având baza BC fixă, iar vârful A variabil pe elipsă. Dacă ABC este o poziție corespunzătoare maximului, atunci variația infinită mică a arii este nulă pentru această poziție, așa că noua poziție A'BC, infinit vecină a triunghiului ABC, are aceeași arie cu ABC, adică AA' este paralelă cu BC. Dar AA' tinde la limită către tangentă în A la curbă; deci, BC fiind fixă, triunghiul ABC corespunde arii maxime când tangentă în A este paralelă cu BC. Așa dar, un astfel de triunghi variabil, inscris într-o elipsă, are o arie maximă, când tangentele în vîrfurile sale la curba la care este inscris triunghiul, sunt paralele cu laturile opuse triunghiului.

Considerând cercul a cărei proiecție este elipsa, se vede că aceste triunghiuri inscrise în elipsă corespund triunghiurilor din cerc care se bucură de aceeași proprietate, adică tangentele în vîrfuri sunt paralele cu laturile opuse, deci sunt echilaterale (un poligon regulat).

Se deduce, ca și pentru cazul precedent, că *triunghiurile semiregulate inscrise într-o elipsă, toate de aceeași arie, sunt acelea pentru care, printre toate triunghiurile inscrise în aceeași elipsă, această arie este maximum*.

## NOTIUNI DE GEOMETRIE CINEMATICĂ PLANĂ.

34. **Generalități.** O figură invariabilă, fiind formată dintr-o reunire de mai multe puncte ale căror distanțe mutuale sunt invariabile, *Geometria Cinematică* are ca obiect studiul proprietăților geometrice ale traectoriilor descrise simultan de punctele unei figuri invariabile în mișcare. Primele cercetări în acest sens se găsesc la Cauchy și Chasles, dar întemeitorul Geometriei Cinematice a fost Mannheim, ale cărui rezultate au fost publicate în lucrarea sa, *Principes et développements de Géométrie Cinématique* (1894).

În Geometria Cinematică se consideră o succesiune continuă a pozițiilor ocupate de elementele figuri invariabile ca formă, fără să se ţie seamă de timpul întrebuințat pentru a trece de la o poziție la alta. Când se ia în considerare și timpul, se trece de la domeniul Geometriei Cinematice la acela al *Cinematicei pure*.

Este de altfel o legătură între Geometria Cinematică și Cinematica propriu zisă. În adevăr, dacă se consideră variațiunile de poziție ale figurei mobile, care depinde de un parametru oarecare, se poate, sau să considerăm variațiile infinit mici simultane ale diferitelor elemente ale figurei, sau să considerăm derivatele lor în raport cu parametrul variabil și figurate geometric. În primul caz, avem Geometria Cinematică, în cazul al doilea, când se dă parametrului variabil numele de *temp*, avem Cinematică proprie zisă.

În general, se consideră că mișcarea figurei mobile depinde de un parametru variabil. Dar, se poate închipui că ansamblul pozițiilor figurei mobile corespunzător la o variație continuă, depinde nu numai de un singur parametru, ci de mai mulți, că este deci o *mișcare cu mai mulți parametrii*. Să vedem care este numărul acestor parametrii.

Un solid, în spațiu, poate fi raportat la un triedru dreptunghic de care să fie invariabil legat, astfel că, pentru determinarea poziției în spațiu a solidului, trebuie cunoscută poziția acestui triedru, și anume, trei cantități, coordonatele vârfului triedrului și alte trei, care să determine direcțiile muchilor triedrului. În total poziția unui solid în spațiu depinde de șase parametrii. Se zice că un solid variabil de poziție în spațiu, nefiind supus la nici o condiție, are *sase grade de libertate* (se bucură de *al șaselea grad de libertate*). Dacă trebuie să satisfacă la o condiție simplă dată, aceasta însemnează că cei șase parametrii care definesc poziția solidului verifică o relație, sau, că numărul parametrilor se reduce la cinci (de care depinde poziția). Solidul se bucură atunci de *al cincilea grad de libertate* și ansamblul variațiilor continue necesare de a-l face să treacă de la una oarecare din aceste poziții la toate cele pe care le poate ocupa, poartă numele de *mișcare cu cinci parametrii*.

Se poate ușor extinde definiția aceasta la cazul a patru, a trei, sau doi parametrii arbitrari. În acest ultim caz, punctele figurei în mișcare descriu suprafețe traectorii. În fine, mișcarea

cu un parametru corespunde primului grad, este mișcarea propriu zisă în sensul obișnuit al Mecanicei. De aceasta ne vom ocupa în cele ce urmează.

În plan, poziția unei figuri plane depinde de trei parametrii, căci trebuie să cunoaște poziția unghiului drept, două cantități, și direcția uneia din laturile unghiului, încă o cantitate, deci în total trei parametrii. În plan, *mișcarea cu un grad de libertate poate fi determinată dacă se cunosc traectoriile a două din punctele figurei mobile*.

**35. Deplasare finită.** Se zice deplasare, transformarea care permite să trece de la o figură (F) din plan la o altă figură egală (F'). Fie AB, A'B' două segmente omoloage ale figurilor egale (F) și (F') (Fig. 62). Putem aduce A în A' cu o rotație

în jurul unui punct așezat pe perpendiculara pe mijlocul lui AA'. De asemenea, putem aduce punctul B peste B', cu o rotație în jurul unui punct așezat pe perpendiculara pe mijlocul lui BB'. Fie I intersecția perpendicularelor ridicate pe mijloacele dreptelor AA' și BB'. Triunghiurile AIB, A'IB' au  $AB = A'B'$ ,  $IA = IA'$ ,  $IB = IB'$ ; deci sunt egale și prin urmare unghiurile  $BIA = B'IA'$ ,  $BIB' = AIA'$ . Deci, se

poate trece de la figura (F) la figura (F') cu o rotație în jurul punctului I, de unghiul  $AIA' = BIB'$ .

Dacă dreptele AA' și BB' sunt paralele, se pot întâmpla două cazuri, sau AB este egală și paralelă cu A'B', sau AB

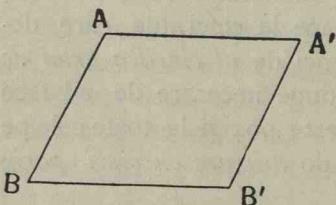


Fig. 63.

și A'B' sunt simetric inclinate pe AA' și BB'. În primul caz (Fig. 63), punctul I este aruncat la infinit, și se trece de la

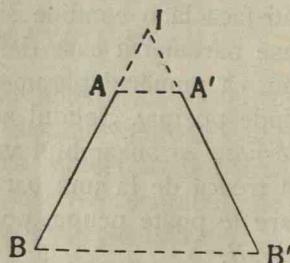


Fig. 64.

figura (F) la figura (F') cu o translație egală cu  $AA' = BB'$ . În cazul al doilea (Fig. 64), I fiind intersecția dreptelor  $AB$  și  $A'B'$ , se trece de la figura (F) la figura (F') cu o rotație în jurul punctului I, de un unghi egal cu  $AIA'$ .

**36. Deplasare infinitezimală. Mișcare continuă.** Dacă o figură plană (F) se mișcă continuu, fiecare punct M al său descrie o traectorie. Fie (F) și (F') două poziții infinit vecine ale figurei mobile și  $M'$  omologul lui M. Am văzut că se poate trece de la figura (F) la figura (F') cu o rotație în jurul unui punct I (aruncat la infinit dacă rotația se reduce la o translație), iar perpendiculara pe mijlocul lui  $MM'$  trece prin punctul I. La limită, această perpendiculară devine normală în M la traectoria lui M. Deci, pentru o poziție oarecare a figurei (F), *normalele la traectoriile tuturor punctelor sale trec printr'un punct I, numit centru instantaneu de rotație al figurei (F) pentru poziția considerată*.

După cum punctele unei figuri (F), cu un grad de libertate, descriu traectorii, liniile (curbele) care aparțin acestei figuri admit curbe infășurătoare, ale căror puncte de contact voim să le determinăm. Fie (C) și (C') (Fig. 65) două poziții infinit vecine ale unei curbe oarecare ce aparțin figurei mobile. Dacă (C) și (C') se tăie în  $M'$ , punctul caracteristic al curbei (C) [de contact al curbei (C) cu infășurătoarea sa], este limita P a punctului  $M'$  pe (C). Dacă, la fiecare moment, privim punctul  $M'$  ca fixat pe curba (C'), îl cores-

punde pe (C) un punct M, care la limită, se confundă cu P și  $M'$ . Dar, se poate trece de la M la  $M'$  cu o rotație, perpendiculară pe mijlocul lui  $MM'$  trecând prin centrul instantaneu de rotație. Așa dar, la limită, *normala în P la curba (C) trec prin centrul instantaneu de rotație*. Deci, *normalele în punctele de contact cu infășurătoarele ale curbelor ce aparțin unei figuri de formă invariabilă, trec prin centrul instantaneu de rotație*.

Așa dar, punctele caracteristice ale curbelor (C) sunt picioarele normalelor duse la aceste curbe prin centrul instantaneu de rotație. Dacă se cunoaște, deci, un punct caracteristic al unei linii al figurei mobile, centrul instantaneu de rotație se află pe normala în acest punct. În particular, dacă o linie a figurei mobile trec printr'un punct fix, normala la această

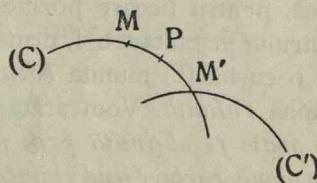


Fig. 65.

linie dusă prin punctul fix conține centrul instantaneu de rotație.

**Aplicație.** Să considerăm un unghi drept ale căruia laturi  $MP$ ,  $MP'$  sunt tangente la o conică ( $C$ ) de centru  $O$  (Fig. 66). Normalele în  $P$  și  $P'$  la conica ( $C$ ) tăindu-se în  $I$ , normală în  $M$ , la curba descrisă de  $M$ , este

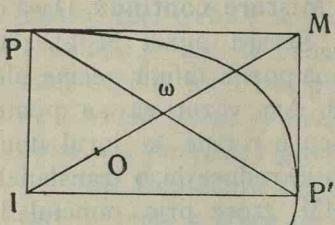


Fig. 66.

metrul  $O\omega$  trece prin  $M$  și deci dreapta care unește punctul  $M$  cu mijlocul  $\omega$  al segmentului polarei sale trece prin centru  $O$  al conicei. Toate normalele la traectoria ( $M$ ) trecând prin  $O$ , această curbă este un cerc de centru  $O$ . Regăsim astfel teorema lui Monge: *Locul vârfurilor unghiurilor drepte circumscrise la o conică este cercul lui Monge (ortoptic).*

**37. Mișcarea cea mai generală a unei figuri plane în planul său.** Dacă însemnăm cu  $(II)$  planul fix pe care se mișcă figura ( $F$ ), se poate presupune că figura mobilă este desenată pe un plan nemărginit ( $II_1$ ) mereu aplicat pe planul fix  $(II)$ . Dacă, pentru fiecare poziție a figurei mobile, întepăm poziția centrului instantaneu  $I$ , urma astfel însemnată descrie pe planul  $(II)$  o curbă ( $\Gamma$ ) numită *bază*, iar pe planul  $(II_1)$  o curbă ( $\Gamma_1$ ) numită *rulantă*. Vom arăta că *mișcarea figurei ( $F$ ) pe planul  $(II)$  poate fi obținută prin rostogolirea curbei ( $\Gamma_1$ ) pe curba ( $\Gamma$ ), cele două curbe fiind tangente în fiecare moment în centrul instantaneu  $I$  coresponzător poziției considerate<sup>(1)</sup>.*

În adevăr, să însemnăm cu  $t$  parametrul variabil (care poate fi numit timpul dacă vom) de care depinde mișcarea care este cu un grad de libertate. Pentru o valoare dată lui  $t$ , curbele ( $\Gamma$ ) și ( $\Gamma_1$ ) au comun punctul  $I$  centrul instantaneu de rotație coresponzător (Fig. 67). Fie  $I'$  și  $I'_1$  punctele pe ( $\Gamma$ ) și ( $\Gamma_1$ ) care vor veni să coincidă cu centrul instantaneu de rotație coresponzător valorii  $t + \Delta t$  a parametrului, pentru care poziția planului ( $II_1$ ) va fi notată cu  $(II'_1)$ . Trece-

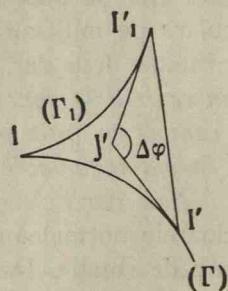


Fig. 67.

<sup>(1)</sup> Cauchy, cel dintâi, a observat aceasta în 1827, iar Chasles, doi ani mai târziu, introducând noțiunea de centru instantaneu de rotație, a precizat această teorie.

rea de la poziția  $(\Pi_1)$  la  $(\Pi'_1)$  se poate face cu o rotație  $\Delta\varphi$  în jurul unui punct  $J'$  care va fiind către  $I$  în acelaș timp cu  $I'$  și  $I'_1$ ; cu această rotație se aduce  $I'_1$  peste  $I'$ , astfel că punctul  $J'$  este vârful unui triunghi isoscel cu baza  $I'I'_1$  și cu unghiul de la vârf egal cu  $\Delta\varphi$ . Așa fiind, avem

$$\frac{\vec{I}'\vec{I}'_1}{\Delta t} = \frac{\vec{I}'\vec{I}'_1 \Delta\varphi}{\Delta\varphi \Delta t} = \frac{2\vec{I}'J' \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \Delta\varphi}{\Delta\varphi \Delta t} = \vec{I}'J' \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}.$$

Dar  $\frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}$  are limita 1, iar  $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$  o valoare finită, pe când

$\vec{I}'J'$  tinde către zero. Deci  $\lim \frac{\vec{I}'\vec{I}'_1}{\Delta t} \rightarrow 0$ .

Întrebuițând notația vectorială, avem

$$\vec{I}'\vec{I}'_1 = \vec{II}' - \vec{II}'_1,$$

adică  $\vec{I}'\vec{I}'_1$  este diferența vectorilor  $\vec{II}'$  și  $\vec{II}'_1$ . Cum  $\lim \frac{\vec{II}'_1}{\Delta t} \rightarrow 0$ , intrebuițând tot notația vectorială, urmează că avem

$$\lim \frac{\vec{II}'_1}{\Delta t} = \lim \frac{\vec{II}'}{\Delta t}.$$

Egalitatea acestor două deriveate geometrice (viteze dacă  $t$  este timpul) arată că tangentele în  $I$  la curbele  $(\Gamma)$  și  $(\Gamma_1)$  sunt aceleași, adică *aceste curbe sunt tangente în I*; apoi, că, dacă  $ds$  și  $ds_1$  reprezintă diferențialele arcelor ale acestor curbe în  $I$ , avem  $ds = ds_1$  și integrând, pornind de la două puncte corespunzătoare oarecare (care coincid) ale curbelor  $(\Gamma)$  și  $(\Gamma_1)$ , urmează că  $s = s_1$ . Deci, este o rostogolire a curbei  $(\Gamma_1)$  (rulantei) pe curba  $(\Gamma)$  (baza).

Se poate vedea, pe cale inversă, că dacă se definește mișcarea planului  $(\Pi_1)$  pe planul  $(\Pi)$  prin rostogolirea unei curbe  $(\Gamma_1)$  pe o curbă  $(\Gamma)$ , centrul instantaneu este la fiecare moment punctul de contact al celor două curbe.

Traectoriile în planul fix a punctelor însemnate pe planul  $(\Pi_1)$ , în mișcarea astfel determinată, sunt numite *rulete*.

De ex., să considerăm *mișcarea segmentului PQ de lungime con-*

stantă  $(a+b)$ , care se sprijină cu extremitățile sale  $P$  și  $Q$  pe două drepte perpendiculare  $Ox$  și  $Oy$  (Fig. 68). Un punct  $M$  al segmentului, definit astfel că  $QM=a$ ,  $MP=b$ , descrie o elipsă cu centrul  $O$  și cu axele  $Ox$  și  $Oy$ .

Centrul instantaneu de rotație este punctul  $I$  de intersecție al perpendicularelor în  $P$  și  $Q$  pe  $Ox$  și  $Oy$ . Deoarece  $OI=PQ$ , locul punctului  $I$  pe planul fix este cercul cu centru  $O$  și raza  $(a+b)$ .

Deci baza este cercul de centru  $O$  și raza  $OI=a+b$ .

Față de segmentul  $PQ$ , locul punctului  $I$  este cercul descris  $PQ$  ca diametru, cu raza pe jumătate ca a primului cerc. Rulanta este deci cercul de diametru  $PQ$ .

Mișcarea figurei se face prin rostogolirea cercului de diametru  $PQ$  în interiorul și pe cercul cu centru  $O$  și cu raza îndoită ca a primului.

### 38. Centrele de curbură ale traectoriilor punctelor figurei mobile.

Fie  $M$  un punct invariabil legat de curba  $(\Gamma_1)$  care se rostogolește peste curba  $(\Gamma)$  (Fig. 69). Normala în punctul  $M$  la traectoria sa  $(M)$  este dreapta  $MI$  care-l unește cu centrul instantaneu de rotație  $I$ , punctul de contact al bazei  $(\Gamma)$  cu rulanta  $(\Gamma_1)$ . Vom presupune că aceste curbe au curburile de același sens și că deci razele lor de curbură  $ii$  și  $i'i_1$  sunt de același semn.

Să căutăm centrul de curbură  $\mu$  al curbei  $(M)$ . Însemnând cu  $d(I)$  și  $d(M)$  diferențialele arcelor descrise simultan de punctele  $I$  și  $M$  pe curbele  $(\Gamma)$  și

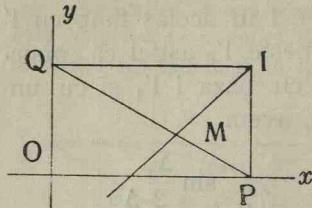


Fig. 68.

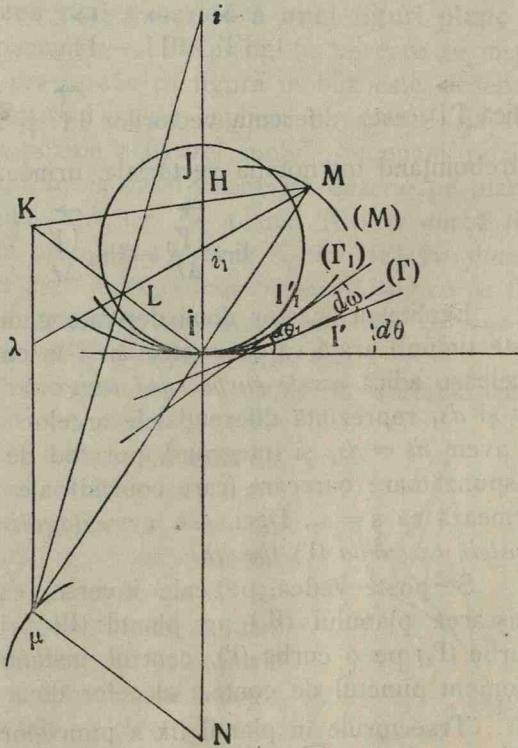


Fig. 69.

(M), fie N punctul de intersecție al normalei în I la curba  $(\Gamma)$  cu normala la infășurătoarea dreptei MI, adică cu perpendiculara în  $\mu$  la MI. Avem (No. 17)

$$(34) \quad \frac{d(M)}{d(I)} = \frac{M\mu}{IN}.$$

Pe de altă parte,  $d\omega$  fiind unghiul de rotație infinit de mică în jurul lui I, avem

$$(35) \quad d(M) = IMd\omega.$$

Dar, această rotație infinit de mică aduce tangenta în punctul  $I'_1$ , infinit vecin de I pe  $(\Gamma_1)$ , să coincidă cu tangenta în punctul  $I'$ , infinit vecin de I pe  $(\Gamma)$ . Deci, notând cu  $d\theta_1$  și  $d\theta$  unghiiurile de contingencă respective ale curbelor  $(\Gamma_1)$  și  $(\Gamma)$ , avem

$$d\theta_1 - d\theta = d\omega.$$

Însă

$$d\theta_1 = \frac{d(I)}{Ii_1}, \quad d\theta = \frac{d(I)}{Ii},$$

astfel că relația precedentă devine

$$\frac{d(I)}{Ii_1} - \frac{d(I)}{Ii} = d\omega, \quad d(I) \left( \frac{1}{Ii_1} - \frac{1}{Ii} \right) = d\omega.$$

Înlocuind în această formulă pe  $d(M)$  și  $d(I)$  cu valorile lor din (34) și (35), avem

$$(36) \quad \frac{M\mu}{IN} = IM \left( \frac{1}{Ii_1} - \frac{1}{Ii} \right).$$

Fie H conjugatul armonic al punctului  $i$  în raport cu extremitățile diametrului IJ al cercului osculator la  $(\Gamma_1)$ . Avem

$$(37) \quad \begin{aligned} \frac{2}{IJ} &= \frac{1}{Ii} + \frac{1}{IH}, & \frac{2}{2Ii_1} &= \frac{1}{Ii} + \frac{1}{IH}, \\ \frac{1}{Ii_1} &= \frac{1}{Ii} + \frac{1}{IH}, & \frac{1}{Ii_1} - \frac{1}{Ii} &= \frac{1}{IH}. \end{aligned}$$

Egalitatea (36) devine

$$(38) \quad \frac{M\mu}{IN} = \frac{IM}{IH}.$$

Ducând prin  $\mu$  paralela  $\mu K$  la IN, avem

$$\frac{IM}{IH} = \frac{\mu M}{\mu K},$$

și comparând cu relația (38), rezultă

$$\frac{M\mu}{IN} = \frac{M\mu}{\mu K}, \quad IN = \mu K,$$

adică figura  $\mu KIN$  este un paralelogram și că  $IK$ , paralelă cu  $\mu N$ , este perpendiculară pe  $MI$ .

De aci urmează construcția punctului  $\mu$ . Se ia conjugatul armonic  $H$  al centrului de curbură  $i$  al bazei ( $\Gamma$ ) în raport cu extremitățile diametrului  $IJ$  al cercului osculator al rulantei ( $\Gamma_1$ ). Se ia punctul de intersecție  $K$  al lui  $MH$  cu perpendiculara ridicată în  $I$  pe  $MI$ . Centrul de curbură  $\mu$  este la intersecția dreptei  $MI$  cu paralela dusă din  $K$  la  $I_i$ .

Să căutăm să simplificăm această construcție. Pentru aceasta, să ducem  $Mi_1$  care tăie  $\mu K$  în  $\lambda$ . Avem

$$\frac{\lambda\mu}{\lambda K} = \frac{i_1 I}{i_1 H},$$

sau, pentru că punctele  $H$  și  $i$  sunt conjugate în raport cu cercul de centru  $i_1$  și de rază  $i_1 I$  ( $i_1 I^2 = i_1 H \cdot i_1 i$ ),

$$\frac{\lambda\mu}{\lambda K} = \frac{i_1 i}{i_1 I},$$

ceea ce arată că dreptele  $\lambda i_1$ ,  $\mu i$  și  $KI$  se întâlnesc în  $L$ , care probează că punctul  $L$  se găsește pe dreapta  $\mu I$ , de unde urmează construcția lui Savary: Centrul de curbură  $\mu$  al traectoriei punctului  $M$  este la intersecția normalei  $MI$  și a dreptei care unește centrul de curbură  $i$  al bazei cu punctul de intersecție al perpendiculararei ridicate în  $I$  pe  $MI$  cu dreapta care unește centrul de curbură  $i_1$  al rulantei cu punctul  $M$ .

*Observare.* Să găsim locul punctelor  $M$ , care pentru poziția considerată, trece printr'un punct de inflexiune ale traectoriilor lor. Pentru aceasta, trebuie ca  $\mu$  și deci și punctul  $K$  (Fig. 69) să fie la infinit, adică  $MH$  perpendiculară pe  $MI$ . Atunci unghiul  $HMI$  este drept și locul punctelor  $M$  este cercul de diametru  $IH$ . De aceea acest cerc se zice *cercul inflexiunilor*. De asemenea,  $M\mu$  este nulă, numai când  $M$  și  $\mu$  se confundă în  $I$ , adică  $M$  să fie pe rulanta ( $\Gamma_1$ ).

**39. Centrele de curbură ale înfășurătoarelor liniilor figurei mobile.** Determinarea centrului de curbură al înfășurătoarei unei curbe antrenată de planul ( $\Pi_1$ ) se aduce imediat la cazul unei simple traectorii cu ajutorul următoarei observări.

Punctul caracteristic N al curbei (C) antrenată în rostogolirea lui (Γ) pe (Γ), adică punctul unde își atinge înfășurătoarea sa (N), este piciorul normalei IN dusă la această curbă prin centrul instantaneu I (Fig. 70). De asemenea, în poziția infinit vecină (C'), punctul caracteristic este punctul N' al normalei I'N' la curba (C').

Considerând desfășurata (D) a curbei (C), antrenată odată cu ea, normala IN o atinge în M, centrul de curbură a lui (C) corespunzător punctului N. În poziția infinit vecină, I'N' atinge desfășurata (D') în M'\_1, centrul de curbură al lui (C'), corespunzător lui N'. Dar, dacă presupunem că am însemnat punctul M pe (D), acest punct a venit în M' infinit vecin de M'\_1 pe D' și normala în M' la traectoria (M) a acestui punct însemnat este I'M'.

Deci, centrul de curbură al înfășurătoarei (N) este limita punctului de întâlnire  $\mu'_1$  a lui IN și I'N', după cum centrul de curbură al curbei (M) este limita punctului de întâlnire  $\mu'$  a lui IM cu I'M'.

Din triunghiurile I'M'M'\_1 și I' $\mu'_1\mu'_1$ , avem

$$\frac{M'M'_1}{\sin I'} = \frac{I'M'_1}{\sin M'}, \quad \frac{\mu'\mu'_1}{\sin I'} = \frac{I'\mu'_1}{\sin \mu'}.$$

De unde

$$\frac{\mu'\mu'_1}{M'M'_1} = \frac{I'\mu'_1}{I'M'_1} \frac{\sin M'}{\sin \mu'}.$$

Dar, în membrul al doilea ambii factori tind către limite finite (observând că unghiurile M' și  $\mu'$  sunt doi infiniti mici de ordinul întâi). Deci, amândoi termenii ai fracției primului membru sunt de același ordin. Așa dar,  $\mu'\mu'_1$  este infinit mic ca și M'M'\_1 și limita lui  $\mu'_1$  este aceeași ca limita lui  $\mu'$ . Deci, centrul de curbură al înfășurătoarei (N) este tocmai centrul de curbură a traectoriei (M) descrisă de centrul de curbură M al curbei (C).

Dacă presupunem că curba (C) este o dreaptă, ar părea, la prima vedere, că teorema nu se poate aplica, căci centrul

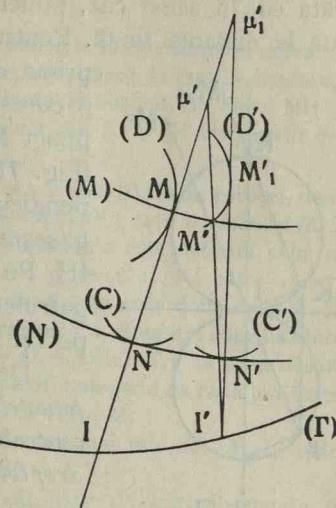


Fig. 70.

de curbură  $M$  al acestei drepte este aruncat la infinit. Vom arăta că, în acest caz, punctul  $\mu$  tinde către o poziție determinată la distanță finită. Pentru aceasta, să observăm, că, după

prima construcție a centrului de curbură  $\mu$  corespunzător lui  $M$  (No. 39), când acest punct  $M$  se depărtează la infinit pe  $IM$  (Fig. 71), punctul  $K$  devine piciorul perpendiculararei coborâte din  $M$  pe  $IK$  și se găsește prin urmare pe cercul de diametru  $IH$ . Pe de altă parte, punctul  $\mu$  este al patrulea vîrf al paralelogramului construit pe  $IH$  și  $IK$ .

Deci, *locul punctelor  $\mu$  corespunzătoare punctelor  $M$  de la infinit (prin urmare centrele de curbură ale infășurătoarelor dreptelor figurei) este cercul simetric în raport cu  $I$  al aceluia descris pe  $IH$  ca*

diametru. Acesta se zice *cercul rebrusmentelor*.

**40. Aplicație.** *Centrul de curbură la curba capă<sup>(1)</sup>, locul vîrfului  $M$  a unui unghi drept a cărei o latură trece mereu prin punctul fix  $O$  (Fig. 72), pe când un punct  $A$  însemnat pe o latură  $(MA=a)$  parcurge o dreaptă fixă trecând prin punctul  $O$ . Luând aceasta dreaptă ca  $Ox$ , origina  $O$ , perpendiculara în  $O$  ca  $Oy$ , ecuația curbei este*

$$y^2(x^2+y^2)=a^2x^2.$$

*Simetrică în raport cu axele, tangentă la  $Oy$ , asimptotele fiind  $y=\pm a$  (duble), curba este unicursală.*

*Perpendiculara în  $O$  pe  $OM$  (normală la infășurătoarea acestei laturi) și perpendiculara în  $A$  la  $OA$  (normală la locul lui  $A$ ), tăindu-se în  $I$ , centrul instantaneu de rotație al unghiului drept mobil, normală în  $M$  la Capă este  $MI$ . Centrul de curbură este punctul  $\mu$  unde  $MI$  atinge infășurătoarea.*

*Dar, raza de curbură a infășurătoarei lui  $OM$  redusă la  $O$ , este nulă; punctul  $O$  aparține deci cercului rebrusmentelor al infășurătoarelor dreptelor și prin urmare, simetricul său  $P$  în raport cu  $I$  este pe cercul inflexiunilor a traectoriilor. Dar a doua extremitate  $H$  a diametrului lui  $I$ ,*

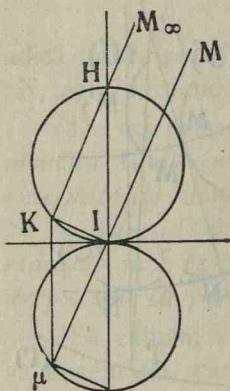


Fig. 71.

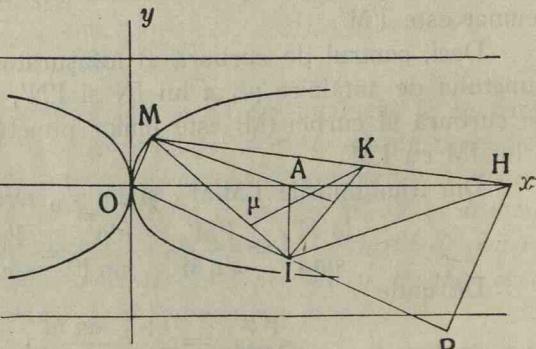


Fig. 72

<sup>(1)</sup> A se vedea, M. d'Ocagne, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (Janv. 1925, p. 153).

În cercul inflexiunilor, este pe  $Ox$  (toate punctele lui  $Ox$  fiind de inflexiune pentru că traectoria lui  $A$  este rectilinie); rezultă că  $H$  este la intersecția lui  $Ox$  cu perpendiculara în  $P$  pe  $OP$ . Odată  $H$  obținut, se duce  $MH$  cetea în  $K$  perpendiculară în  $I$  la  $MI$ , paralela din  $K$  la  $IH$  trece prin centrul de curbură  $\mu$  în  $M$  la capăt.

**41. Epicicloide** <sup>(1)</sup>. Când baza ( $\Gamma$ ) și rulanta ( $\Gamma_1$ ) sunt cercuri, traectoria a oricărui punct invariabil legat de cercul ( $\Gamma_1$ ) este o *epicicloidă*. Se vede că pentru un cerc de rază  $r$ , orice epicicloidă este definită prin următorii parametri: 1<sup>o</sup> raportul  $\rho$  al razei  $r_1$  a cercului ( $\Gamma_1$ ) către rază  $r$  a cercului ( $\Gamma$ ), luat cu semnul + sau -, după cum cele două cercuri sunt tangente interioare sau exterioare; 2<sup>o</sup> raportul  $\delta$  a distanței cuprinsă între punctul considerat (mobil)  $M$  și centrul  $i_1$  al cercului ( $\Gamma_1$ ) la rază acestui cerc, raport care totdeauna poate fi luat pozitiv alegând ca rază jumătatea de dreaptă ce pornește din  $i_1$  și se dirijează către  $M$ .

Presupunând că  $\delta$  este egal, superior sau mai mic de căt 1, *epicicloida* este *ordinară, alungită, sau scurtată*.

Când  $\rho$  este pozitiv și mai mic de căt 1, se dă curbei numele de *hypocicloidă*.

Dacă  $\rho=0$ , aceasta nu poate să aibă loc (când se exclude soluția  $r_1=0$ , ceea ce ar da un cerc) de căt dacă  $r \rightarrow \infty$ , adică dacă baza este o dreaptă, în care caz curba se zice *cicloidă*.

Dacă  $\rho \rightarrow \infty$ , adică  $r_1 \rightarrow \infty$ , avem o *desfășurătoare a cercului*.

**1<sup>o</sup>** Construcția lui Savary se aplică la centrele de curbură a epicicloidelor, punctele  $i$  și  $i_1$  fiind în acest caz centrele cercurilor ( $\Gamma$ ) și ( $\Gamma_1$ ). În cazul *epicicloidei ordinare*,  $M$  fiind un punct al cercului ( $\Gamma_1$ ) (Fig. 73), punctul  $L$  din figura 69 devine diametral opus lui  $M$  în cercul ( $\Gamma_1$ ). Dar, din triunghiul  $MIi_1$ , tăiat cu transversala  $Li\mu$  (Fig. 73), avem

$$\frac{Ii}{ii_1} \cdot \frac{Li_1}{LM} \cdot \frac{\mu M}{\mu i} = 1.$$

Dar

$$\frac{Ii}{ii_1} = \frac{r}{r_1 - r}, \quad \frac{Li_1}{LM} = \frac{1}{2},$$

astfel că relația precedentă dă

$$\frac{\mu M}{I\mu} = \frac{2(r_1 - r)}{r} = \text{Const.}$$

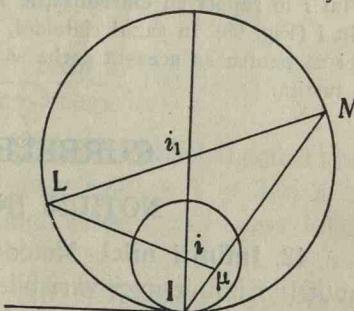


Fig. 73.

Așa dar, *centrul de curbură  $\mu$  divide normala  $MI$  într'un raport constant*. Deci raportul  $I\mu : IM$  este totdeauna constant, așa că *locul centrelor de curbură  $\mu$  corespunzătoare, la fiecare moment, diferitelor puncte  $M$  ale cercului ( $\Gamma_1$ ), este tot un cerc*.

**2<sup>o</sup>** În cazul *câna cercui* ( $\Gamma_1$ ) are diametrul egal cu rază cercului ( $\Gamma$ ) (Fig. 74), cercul ( $\Gamma_1$ ) trece neconitenit prin centrul  $i$  al cercului ( $\Gamma$ ). Aplica-

<sup>(1)</sup> A se vedea, M. d'Ocagne, *L'étude géométrique sur la rectification et la quadrature des épi - et hypocycloïdes* (Nouvelles Annales de Math., 1915, p. 533). De asemenea, J. Lemaire, *Hypocycloïdes et épicycloïdes* (Vuibert, 1929).

când construcția lui Savary pentru centrul de curbură corespunzător unui punct  $M_1$  al cercului  $(\Gamma_1)$ , atunci  $L_1$  din figura 69 devine diametrul opus

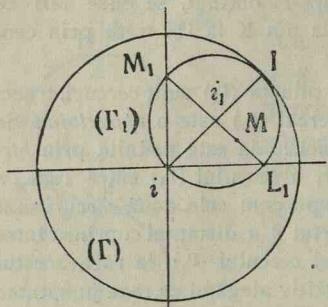


Fig. 74.

lui  $M_1$  în cercul  $(\Gamma_1)$  (Fig. 74) și  $iL_1$  este paralelă cu  $M_1i$ ; punctul  $\mu$  de intersecție al dreptelor  $M_1i$  și  $L_1i$  este la infinit, centrul de curbură  $\mu$  este aruncat la infinit, raza de curbură în  $M_1$  este infinită. Cum această proprietate este verificată pentru orice punct  $M_1$  pe traectoria sa, locul lui  $M_1$  este o dreaptă, care trece neapărat prin punctul  $i$ . Regăsim teorema lui La Hire: *Orice punct a unui cerc ce se rostogolește în interiorul unui cerc de rază dublă, descrie un diametru al cercului al doilea.*

Este asemenea ușor de văzut ce fel de epicicloidă descrie un punct  $M$  oarecare legat de cercul  $(\Gamma_1)$ . Fie  $L_1, M_1$  extremitățile diametrului cercului  $\Gamma_1$  și care trece prin  $M$ . După teorema precedentă, locurile descrise de  $M_1$  și  $L_1$  sunt doi diametrii perpendiculari  $iM_1, iL_1$  ai cercului  $(\Gamma)$ . Cum  $L_1M_1$  este diametrul cercului  $(\Gamma_1)$ , deci o constantă,  $M$  este un punct al unui segment  $L_1M_1$  de lungime constantă ce se sprijină pe două drepte perpendiculare, deci descrie o elipsă.

*Observare.* Pentru ca o epicicloidă să prezinte puncte de inflexiune, trebuie (No. 39, Observare) ca cercul de centru  $i_1$  ce trece prin punctul  $M$  (însemnat), să tăe pe  $ii_1$  între punctul  $I$  și punctul  $H$  conjugatul armonic al lui  $i$  în raport cu extremitățile  $I$  și  $J$  ale diametrului lui  $(\Gamma_1)$  trecând prin  $I$  (Fig. 69). În cazul cicloidei, punctul  $H$  coincide cu  $i_1$ , și se vede deci că pentru ca această curbă să aibă puncte de inflexiune trebuie ca să fie turtită.

## CURBELE STRÂMBE.

### NOȚIUNI INTRODUCTIVE.

**42. Infiniti mici.** Metoda infinitezimală constă în a înlocui cantitățile infinit mici variabile care figurează, cu alți infiniti mici echivalenți, pe care îi alegem astfel ca să se simplifice cât mai mult raționamentul și calculele. Aceasta o putem face ușor dacă ținem seamă de următoarele proprietăți.

1º Un segment rectiliniu infinit mic este echivalent cu proiecția sa pe un plan sau pe o axă care face un unghi infinit mic cu direcția segmentului. În adevar, fie  $AB$  segmentul din spațiu,  $AB'$  proiecția sa pe o axă sau un plan ce face cu direcția segmentului unghiul  $\theta$ ; avem

$$AB' = AB \cos \theta.$$

Dar  $\theta$  fiind infinit mic,  $\cos \theta$  este echivalent cu 1, deci proiecția  $AB'$  și segmentul  $AB$  sunt echivalenți.

2º Un unghi variabil infinit mic este echivalent cu proiecția sa pe un plan care face cu planul acestui unghi un unghi infinit mic. În adevăr, fie  $\theta$  unghiul făcut de planul unghiului  $ABC$  (Fig. 75) cu planul de proiecție și  $B'A'C'$  proiecția acestui unghi.

Să luăm pe laturile unghiului dat lungimile  $AB=c$ ,  $AC=b$  și fie  $\beta$ ,  $\gamma$  unghiiurile ce le fac respectiv  $AB$  și  $AC$  cu planul de proiecție. Avem

$$A'B' = AB \cos \beta = c \cos \beta, \quad A'C' = b \cos \gamma.$$

Stim că

$$(1) \quad \text{aria } A'B'C' = \text{aria } ABC \cos \theta.$$

Dar

$$\text{aria } ABC = \frac{1}{2} \cdot bc \sin BAC,$$

$$\text{aria } A'B'C' = \frac{1}{2} A'B' \cdot A'C' \sin B'A'C' = \frac{1}{2} bc \cos \beta \cos \gamma \sin B'A'C'.$$

Înlocuind în relația (1), avem

$$\frac{1}{2} bc \cos \beta \cos \gamma \sin B'A'C' = \frac{1}{2} bc \sin BAC \cos \theta,$$

de unde

$$\frac{\sin B'A'C'}{\sin BAC} = \frac{\cos \theta}{\cos \beta \cos \gamma}.$$

Unghiiurile  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\theta$  fiind infiniti mici, membrul al doilea tinde către 1, deci raportul sinusurilor este egal cu 1 și deci și raportul unghiiurilor  $BAC$ ,  $B'A'C'$  tinde către 1, adică sunt infiniti mici echivalenți.

3º Două segmente rectilinii,  $AB$ ,  $A'B'$ , sunt echivalente și au aceeași direcție limită, dacă cele două segmente  $AA'$  și  $BB'$

sunt infiniti mici în raport cu  $AB$ . În adevăr, să ducem  $A'B''$  (Fig. 76) egală și paralelă cu  $AB$ . În triunghiul  $BB'B''$ , avem

$$B'B'' = BB'' \cos B'' + BB' \cos B',$$

de unde

$$\frac{B'B''}{A'B''} = \frac{BB''}{A'B''} \cos B'' + \frac{BB'}{A'B''} \cos B',$$

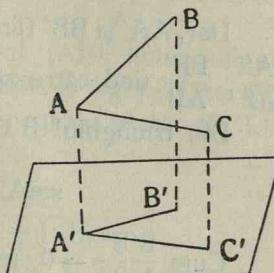


Fig. 75.

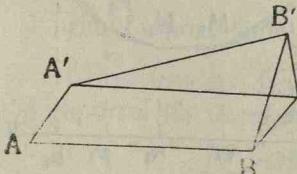


Fig. 76.

$$\frac{B'B''}{A'B''} = \frac{AA'}{AB} \cos B'' + \frac{BB'}{AB} \cos B'.$$

Dar,  $AA'$  și  $BB'$  fiind infiniti mici în raport cu  $AB$ , rapoartele  $\frac{AA'}{AB}$ ,  $\frac{BB'}{AB}$  tind către zero și deci și  $\frac{B'B''}{A'B''}$  tinde către zero.

Din triunghiul  $B'B'A'$ , avem

$$\sin A' = \frac{B'B''}{A'B''} \sin A'B'B''.$$

Cum  $\frac{B'B''}{A'B''} \rightarrow 0$ , rezultă că  $\sin A' \rightarrow 0$ , deci unghiul  $A'$  tinde către zero și deci vectorii  $AB$ ,  $A'B'$  au aceeași direcție limită.

Din triunghiul  $A'B'B''$ , avem

$$A'B' = A'B'' \cos A' + B''B' \cos A'B'B'',$$

de unde

$$\frac{A'B'}{AB} = \cos A' + \frac{B''B'}{AB} \cos A'B'B''.$$

Dar, am văzut că  $\frac{B''B'}{A'B''} = \frac{B''B'}{AB} \rightarrow 0$  și unghiul  $A' \rightarrow 0$ ; deci raportul  $\frac{A'B'}{AB} \rightarrow 1$ , și prin urmare vectorii  $A'B'$ ,  $AB$  sunt echivalenți.

**43. Lungimea unui arc.** Fie  $AB$  un arc de curbă strâmbă (Fig. 77),  $ab$  proiecția sa ortogonală pe planul  $(Q)$ ,  $M$  un punct oarecare al acestui arc și  $m$  proiecția acestui punct. Într-un plan oarecare să ducem o dreaptă  $xy$  (Fig. 77) și să luăm pe

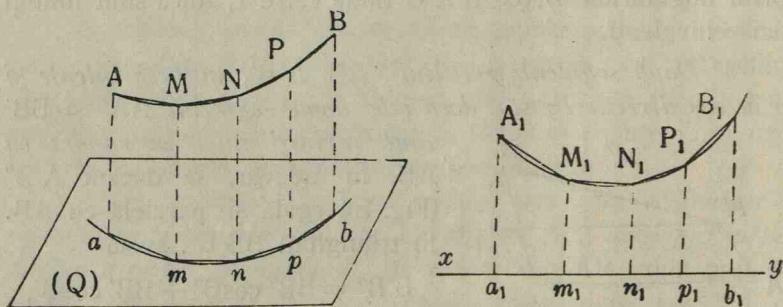


Fig. 77.

această dreaptă, pornind de la un punct oarecare  $a_1$ , lungimea  $a_1m_1$  egală cu lungimea arcului  $am$ . Să ridicăm apoi în  $m_1$  o perpendiculară  $m_1M_1$  egală cu  $MM$ . La orice punct  $M$  al curbei

(AB) va corespunde astfel un punct  $M_1$  și când punctul M descrie arcul AB, punctul  $M_1$  descrie un arc de curbă plană ( $A_1B_1$ ), a cărui lungime să o notăm cu  $l$ .

Așa fiind, să înscriem în arcul (AB) linia poligonală AMNPB și fie  $amnpb$ ,  $A_1M_1N_1P_1B_1$  liniile poligonale corespunzătoare înschise în proiecția (ab) și în curba plană ( $A_1B_1$ ). Se știe că valoarea raportului

$$(2) \quad \frac{AM + MN + NP + PB}{A_1M_1 + M_1N_1 + N_1P_1 + P_1B_1}$$

este cuprinsă între cea mai mică și cea mai mare valoare din acelea ale rapoartelor

$$(3) \quad \frac{AM}{A_1M_1}, \quad \frac{MN}{M_1N_1}, \quad \frac{NP}{N_1P_1}, \quad \frac{PB}{P_1B_1}.$$

Să luăm unul din aceste rapoarte, de ex.,  $\frac{MN}{M_1N_1}$ . Să însemnăm cu  $\delta$  diferența  $Nn - Mm$ , sau egală sa  $N_1n_1 - M_1m_1$ . Avem

$$\text{Deci } \overline{MN}^2 = \overline{mn}^2 + \delta^2, \quad \overline{M_1N_1}^2 = \overline{m_1n_1}^2 + \delta^2.$$

$$\left( \frac{MN}{M_1N_1} \right)^2 = \frac{\overline{mn}^2 + \delta^2}{\overline{m_1n_1}^2 + \delta^2}.$$

Valoarea raportului  $\left( \frac{MN}{M_1N_1} \right)^2$  este cuprinsă între rapoartele

$$\left( \frac{mn}{m_1n_1} \right)^2, \quad \frac{\delta^2}{\delta^2} = 1,$$

sau între rapoartele

$$\left( \frac{\text{coarda } mn}{\text{arc } mn} \right)^2, \quad 1.$$

Dar, când arcul de curbă plană  $mn$  tinde către zero, și primul raport tinde către 1, deci, la limită,  $\frac{MN}{M_1N_1} \rightarrow 1$ .

Prin urmare, fiecare din rapoartele (3) tinde către 1 și deci și raportul (2) tinde către 1, adică numărătorul

$$AM + MN + NP + PB$$

tinde către aceeași limită ca și numitorul  $(A_1M_1 + M_1N_1 + N_1P_1 + P_1B_1)$ . Dar, numitorul tinde către lungimea  $l$  a arcului de curbă plană ( $A_1B_1$ ), ori care ar fi legea după care tinde către zero laturile linii poligonale AMNPB.

Așa dar, suma  $(AM + MN + NP + PB)$  tinde către limita 1, oricare ar fi legea după care laturile liniei poligonale inscrise în curba dată tind către zero. Aceasta este, prin definiție, lungimea arcului AB.

Deci, *lungimea unui arc de curbă (AB) este limita către care tinde perimetru liniei poligonale inscrise în acest arc de curbă. Această limită este unică și nu depinde de legea după care tind către zero laturile acestei linii poligonale.*

**44. Arcul infinit mic și coarda sa sunt infiniți mici echivalenți.** Să considerăm arcul MN al curbei (AB) și reprezentarea sa plană, arcul  $M_1N_1$  al curbei ( $A_1B_1$ ) (Fig. 77). Am văzut că  $\text{arc } MN = \text{arc } M_1N_1$ , deci

$$\frac{\text{arc } MN}{MN} = \frac{\text{arc } M_1N_1}{MN} = \left( \frac{\text{arc } M_1N_1}{M_1N_1} \right) \left( \frac{M_1N_1}{MN} \right).$$

Dar, pentru curba plană ( $A_1B_1$ ), raportul

$$\frac{\text{arc } M_1N_1}{M_1N_1}$$

tinde către 1, când arcul tinde către zero. De asemenea, am arătat că raportul  $\frac{M_1N_1}{MN}$  tinde către 1. Deci raportul

$$\frac{\text{arc } MN}{MN}$$

tinde către 1, adică arcul MN infinit mic și coarda sa MN sunt infiniți mici echivalenți.

Pentru a studia o curbă în vecinătatea unui punct M, se ia, de obicei, arcul infinit mic ca infinit mic principal. Cum arcul infinit mic este echivalent cu coarda sa, urmează că se va putea lua ca infinit mic principal și coarda.

**45. Două arce infinit de mici, corespunzătoare pe două curbe strâmbe care se corespund punct cu punct, sunt infiniți mici de același ordin.** Fie M și N două puncte corespunzătoare pe curbele (M) și (N) și fie  $M'$  și  $N'$  punctele infinit vecine corespunzătoare pe aceleași curbe (Fig. 78). Să ducem prin N segmentul NP egal și paralel cu  $MM'$ . Avem

$$(4) \quad \frac{\text{arc } MM'}{\text{arc } NN'} = \frac{\text{arc } MM'}{MM'} \frac{NN'}{\text{arc } NN'} \frac{MM'}{NN'}.$$

Dar, din triunghiul  $NN'P$ , avem

$$\frac{NP}{\sin NN'P} = \frac{NN'}{\sin N'PN},$$

de unde

$$(5) \quad \frac{NP}{NN'} = \frac{\sin NN'P}{\sin N'PN}.$$

Însă, a zice că curbele  $(M)$  și  $(N)$  se corespund punct cu punct, înseamnă că, fiind date punctele omoloage  $M$  și  $N$  pe cele două curbe, punctul  $N'$  se obține din  $M'$  cu o operație determinată, care face ca să existe, pentru punctul  $N$ , direcțiile  $NN'$  și  $PN'$ , astfel că, ducând prin punctele  $N$  și  $P$  paralele cu aceste direcții, să obținem univoc punctul  $N'$ .

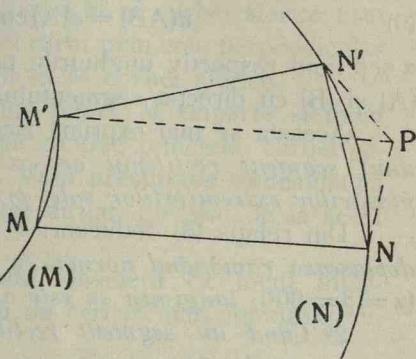


Fig. 78.

Așa dar, triunghiul  $NN'P$  are, pentru punctele  $N$  și  $N'$ , unghiuri determinate, aşa că, la limită, raportul (5) tinde către o valoare determinată și deci și raportul

$$\frac{\text{arc } MM'}{\text{arc } NN'}$$

tinde către o valoare determinată, adică arcele  $MM'$ ,  $NN'$ , corespunzătoare, sunt infiniti mici de același ordin.

Această proprietate ne permite a înlocui arcul unei curbe date cu arcul altrei curbe, care se corespunde punct cu punct cu cea dintâi, dar ale cărei proprietăți sunt mai ușor de determinat.

**46. Variația de lungime a unui segment rectiliniu.**  
Fie  $AB$ ,  $A'B'$  două poziții infinite vecine ale unui segment rectiliniu variabil (Fig. 79). Să însemnăm cu  $A'', B''$  proiecțiile pe dreapta  $AB$  ale punctelor  $A'$ ,  $B'$ . Unghiul lui  $A'B'$  cu  $AB$  fiind infinit mic, știm (No. 42, 1º) că  $A'B'$  și  $A''B''$  sunt echivalenți.

Variația segmentului variabil este  $AB - A'B'$ , care este echivalentă cu

$$AB - A''B'' = AA'' + A''B - A''B - BB'' = AA'' - BB''.$$

Însemnând cu  $\alpha$  și  $\beta$  unghiurile ce le fac la limită  $AA'$  și  $BB'$  cu direcția  $AB$ , avem că variația segmentului  $AB$  este

$$d(AB) = AA' \cos \alpha - BB' \cos \beta.$$

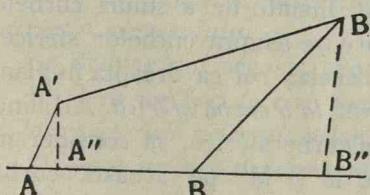


Fig. 79

Presupunând că extremitățile A și B se mișcă pe curbele (A) și (B), AA' și BB' sunt respectiv  $d(A)$  și  $d(B)$ , astfel că variația segmentului AB este dată de

$$(6) \quad d(AB) = d(A) \cos\alpha - d(B) \cos\beta,$$

$\alpha$  și  $\beta$  fiind respectiv unghiurile tangentelor în A și B la curbele (A) și (B) cu direcția segmentului AB.

Aceasta se mai exprimă zicând că *variația de lungime a unui segment rectiliniu are ca parte principală diferența deplasărilor extremităților sale, proiectate pe direcția segmentului.*

Din relația (6) deducem: 1º *Când un segment rectiliniu se deplasează rămânând normal la traectoriile extremităților sale ( $\alpha = \beta = 90^\circ$ ), lungimea sa este o constantă.*

2º *Când un segment rectiliniu de lungime constantă rămâne normal la traectoria uneia din extremități, el rămâne de asemenea normal la traectoria celeilalte extremități.*

Să considerăm, de ex., o curbă (C), astfel că planul său normal, adică planul perpendicular pe tangentă, în fiecare punct, să treacă neconținut printr'un punct fix A. Dacă B și B' sunt două puncte infinit vecine ale acestei curbe, variația AB' – AB va fi nulă, căci, din (6), se vede că AA' și  $\cos\beta$  sunt amândouă nule, și deci  $d(AB) = 0$ , adică AB este o constantă. De aci rezultă că *orice curbă al cărei plan normal trece printr'un punct fix este trasă pe o sferă având ca centru acest punct.*

## CURBE SFERICE.

**47. Curbe sferice.** Multe din proprietățile curbelor plane se extind imediat la curbele sferice (trase pe sferă) și folosesc la studiul curbelor strămbe în general. Înainte de a studia curbele strămbe, vom face deci o scurtă privire asupra curbelor sferice.

Cercul mare joacă pe sferă același rol ca dreapta în plan.

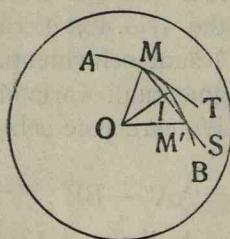


Fig. 80.

Tangentă la o curbă sferică. AB fiind un arc al unei curbe sferice, să considerăm două puncte M și M' pe această curbă (Fig. 80). Triunghiul OMM' fiind isoscel ( $OM=OM'$ ), coarda MM' este perpendiculară pe dreapta OI care unește centrul O cu mijlocul I al coardei MM'. La limită, când M' se apropiște de M, MM' devine tangentă MT în M, OI se confundă cu OM, astfel că tangentă în M la curba sferică este perpendiculară pe raza OM.

*Tangentă la o curbă sferică.* AB fiind un arc al unei curbe sferice, să considerăm două puncte M și M' pe această curbă (Fig. 80). Triunghiul OMM' fiind isoscel ( $OM=OM'$ ), coarda MM' este perpendiculară pe dreapta OI care unește centrul O cu mijlocul I al coardei MM'. La limită, când M' se apropiște de M, MM' devine tangentă MT în M, OI se confundă cu OM, astfel că tangentă în M la curba sferică este perpendiculară pe raza OM.

*Cerc mare tangent și cerc mare normal la o curbă sferică.*  
 Cerc mare tangent într'un punct M al unei curbe sferice este limita cercului mare cu centrul în centrul O al sferei și care trece prin punctul M și punctul M' infinit vecin de M pe curba sferică. Cerc mare normal în punctul M al curbei sferice este cercul mare ce trece prin M și al cărui plan este perpendicular pe acela al cercului mare tangent în M curbei sferice.

Cercul mare tangent într'un punct M împarte sfera în două emisfere din care numai una conține punctele curbei situate în vecinătatea punctului M. Vom presupune totdeauna că cercul normal într'un punct este dirijat, plecând de la acest punct, în regiunea concavității.

Deci, o curbă sferică se poate considera ca locul intersecțiilor succesive ale unei familii de cercuri mari depinzând de un parametru.

**48. Variația unui arc de cerc mare.** Proprietatea relativă la variația unui segment rectiliniu se extinde la un arc de cerc mare mobil pe sferă dată.

Să considerăm, în adevăr, două poziții infinit vecine AB și A'B' ale acestui arc (Fig. 81). Cerculile mari din care fac parte aceste arce se tăie în punctul P și în altul diametral opus pe sferă. Din punctul P, ca pol, să descriem arcele de cercuri A'A'', B'B''. Avem

$$A'B' - AB = A''B'' - AB = BB'' - AA''.$$

*Variația lungimei unui arc de cerc mare este deci echivalentă cu diferența deplasărilor extremităților sale, proiectate pe direcția segmentului.*

Se deduce din această proprietate următoarele :

1º Dacă un arc de cerc mare se deplacează rămânând normal la traectoriile extremităților, lungimea sa rămâne constantă.

2º Dacă un arc de cerc mare, de lungime constantă, rămâne normal la traectoria uneia din extremitățile sale, el rămâne normal și la traectoria celeilalte extremități.

3º Orice curbă sferică al cărei cerc mare normal trece printr'un punct fix, este un cerc având acest punct ca pol.

**49. Desfășurată sferică.** Este, de asemenea, analogie între curbele plane și cele sferice în ce privește teoria desfășurărilor.

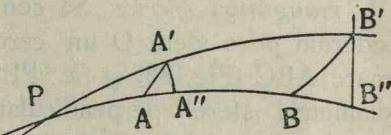


Fig. 81.

Se zice desfășurată sferică a unei curbe ( $C$ ) infășurătoarea cercuriilor mari normale la această curbă.

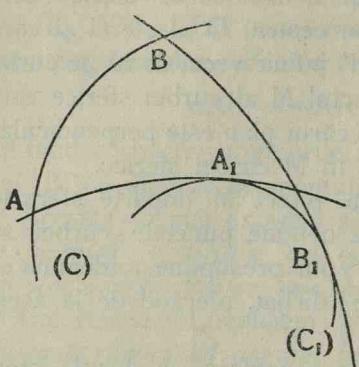


Fig. 82.

de a studia curbura unei curbe sferice, avem nevoie de oarecare noțiuni pregătitoare.

*Triunghiuri sferice.* Să considerăm pe o sferă  $O$  un cerc mare  $ABC$  (Fig. 83) și fie  $PP'$  diametrul sferei perpendicular pe planul cercului. Punctele  $P$  și  $P'$  se zic polii cercului mare  $ABC$ . Considerând un cerc mic  $DE$ , tras pe sferă, al cărui plan este perpendicular pe  $PP'$ , punctele  $P$  și  $P'$  se zic polii acestui cerc. Vom alege ca pol pentru cercul mic  $DE$  acel punct  $P$ , cel mai apropiat de planul cercului, care se obține la intersecția sferei cu diametrul sferei perpendicular pe planul cercului. Punctele cercului  $DE$  sunt depărtate egal de polul  $P$ , înțelegând prin depărtarea a două puncte  $M$  și  $N$  de pe sferă arcul de cerc mare  $MN$  ce trece prin aceste puncte.

Unghiul cercurilor mari  $PAP'$ ,  $PBP'$ , este unghiul tangențelor în  $P$  la aceste cercuri și este egal cu unghiul  $AOB$  (Fig. 83) corespunzător diedrului format de planele acestor cercuri. Acest unghi se măsoară cu arcul  $AB$  al cercului mare  $ABC$  cu planul perpendicular pe  $PP'$  (Fig. 83).

Fie  $A$ ,  $B$ ,  $C$  trei din punctele de intersecție a trei cercuri mari trase pe sferă. Triunghiul curbiliniu  $ABC$  (Fig. 84) se zice

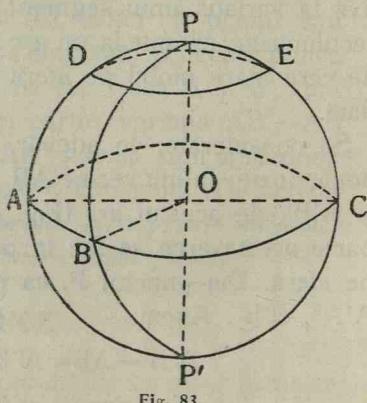


Fig. 83.

un triunghi sferic. Laturile sale sunt arcele BC, CA, AB, măsurate pe cercurile mari din care fac parte aceste arce. Unghiiurile triunghiului sferic sunt A, B, C, egale cu unghiiurile diedrelor formate de planele cercurilor mari care determină triunghiul.

*Aria unui fus sferic.* Portiunea din aria unei sfere determinată de arcele ADA', AEA' (Fig. 85) de cercuri mari, se zice *fus sferic*. Mărimea sa depinde de unghiu A al diedrului format de planele cercurilor mari și se notează *fusul A*. Unghiu A este măsurat cu arcul DE.

Să considerăm două fuse A și  $A_1$  ale aceleiaș sfere. Se

vede că ariile lor stau în acelaș raport ca unghiiurile lor corespunzătoare A și  $A_1$ . Deci

$$(7) \quad \frac{\text{fus } A}{\text{fus } A_1} = \frac{\text{ungh. } A}{\text{ungh. } A_1}$$

Să luăm ca unitate de măsură a ariilor de pe sferă triunghiul sferic tridreptunghic, adică a opta parte din aria sferei, iar ca unitate a unghiielor, unghiuul drept. Luând  $\text{ungh. } A_1 = 1$  unghiu drept, atunci *fus A<sub>1</sub>* este a patra parte din sferă, adică două triunghiuri sferice tridreptunghice, deci aria sa este reprezentată de numărul 2.

Relația (7) devine

$$\frac{\text{fus } A}{2 \text{ aria triungh. tridrept}} = \frac{\text{ungh. } A}{1 \text{ drept}}$$

sau

$$\text{măs. arii fus } A = 2 \text{ măs. ungh. } A.$$

Așa dar, dacă se ia ca unitate de măsură a arii, aria triunghiului sferic tridreptunghic, iar ca unitate de unghi, unghiuul drept, măsura arii unui fus sferic este de două ori măsura unghiuului său.

*Aria unui triunghi sferic.* Fie ABC un triunghi sferic (Fig. 84). Să complecăm cercul mare CB și să prelungim laturile CA și BA până în punctele C', B' unde tăiem acest cerc mare. Avem

$$ABC + B'AC' = \text{fus } A, \quad CBA + CAB' = \text{fus } B, \quad ACB + C'AB = \text{fus } C.$$

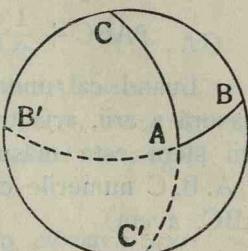


Fig. 84.

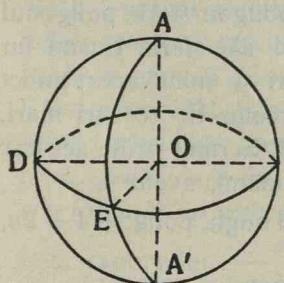


Fig. 85.

unghiuul drept. Luând  $\text{ungh. } A_1 = 1$  unghiu drept, atunci *fus A<sub>1</sub>* este a patra parte din sferă, adică două triunghiuri sferice tridreptunghice, deci aria sa este reprezentată de numărul 2.

Adunând, avem

$$2ABC + CAB + ABC' + AC'B' + B'AC = \text{fusA} + \text{fusB} + \text{fusC},$$

$$2ABC + \frac{1}{2}(\text{aria sferii}) = \text{fusA} + \text{fusB} + \text{fusC}.$$

Luând ca unitate de unghi, unghiul drept, ca unitate de măsură a arii, aria triunghiului sferic tridreptunghic, jumătatea arii sferii este măsurată cu numărul 4 și dacă se notează cu S, A, B, C numerile care măsoară aria și unghiurile triunghiului ABC, avem

$$4 + 2S = 2A + 2B + 2C,$$

de unde

$$S = A + B + C - 2.$$

Deci, aria triunghiului sferic are ca măsură suma numerelor care măsoară unghiurile, micșorată cu 2.

*Aria unui poligon sferic.* Se zice poligon sferic poligonul ale cărui laturi sunt arce de cercuri mari ale sferii. Luând un punct în interiorul unui poligon de  $n$  laturi și unind acest punct cu vârfurile poligonului, cu ajutorul arcelor de cercuri mari, împărțim poligonul în  $n$  triunghiuri sferice. Scriind ariile acestor triunghiuri cu formula de mai sus și adunând, avem  
 măs. arii. polig. = suma numer. ce măsoară ungh. polig. + 4 - 2n,  
 deci

$$\text{măs. arii polig. sferic} = \text{suma numer. ce măsoară ungh. pol.} - 2(n-2).$$

În cazul unui patrulater sferic ABCD, măsura arii este egală cu suma numerelor ce măsoară unghiurile sale micșorate cu 4, adică

$$\text{măs. arii } ABCD = A + B + C + D - 4.$$

*Aria unui triunghi isoscel tras pe sferă.* Să considerăm o calotă sferică cu baza cercul EBCF (Fig. 86) și înălțimea AD.

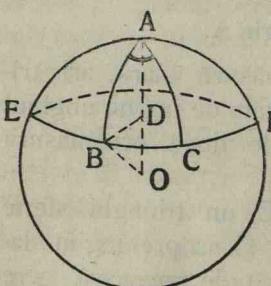


Fig. 86.

Să ducem prin vârful A al calotei două arce de cercuri mari, AB și AC. S'a format un triunghi isoscel ABC tras pe sferă, căruia ii corespunde unghiul A și a cărui arie este în legătură cu calota AEBCF. În adevăr, dacă la un unghi A, corespunde aria triunghiului ABC, când unghiul crește, aria triunghiului obținut se mărește și când ajunge ca unghiul A să fie  $180^\circ$  sau  $\pi$ , aria sa este

jumătate din calota AEBCF. Deci

la ungh.  $\pi$  coreșponde  $\frac{1}{2}$  aria calotei ...  $\frac{1}{2} 2\pi r \cdot AD$ ,

" " A " ABC ...  $\stackrel{\wedge}{A} \cdot r \cdot AD$ ,

adică aria triunghiului isoscel ABC (arc AB = arc AC) este egală cu produsul dintre măsura unghiului A, raza sferii și înălțimea calotei din care face parte acest triunghi, sau, măs.  $\stackrel{\wedge}{ABC} = \stackrel{\wedge}{A} \cdot r \cdot AD$ .

Acestea fiind stabilite, să studiem curbura unei curbe sferice. Să considerăm arcul MM' al unei curbe sferice (Fig. 87) și fie P unul din punctele de intersecție ale cercurilor mari tangente în M și M' la arcul MM'. Unghiul  $\alpha$  format de planele acestor cercuri se zice curbura sferică a arcului MM'. Când arcul MM' este infinit mic, acest unghi se zice unghi de contingență sferică. Curbura sferică într'un punct M este limita raportului  $\frac{\alpha}{\text{arc } MM'}$ , când  $MM' \rightarrow 0$ .

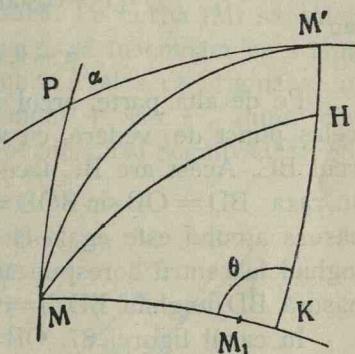


Fig. 87.

Fie K punctul, situat în regiunea concavității arcului MM', unde se tăie cercurile normale în M și M' la arcul MM'. Să ducem din punctul K ca pol arcul de cerc MH și să considerăm triunghiul MKH. Acest triunghi isoscel face parte din calota cu vârful K și înălțimea h distanță de la polul K la planul cercului ce conține arcul MH. Presupunând că sfera are raza 1, aria acestui triunghi curbiliniu MKH este măsurată cu produsul  $\theta \cdot h$ ,  $\theta$  fiind unghiul cercurilor mari normale în M și M'. Să calculăm acum pe  $h$ . Pentru aceasta, ne raportăm la figura 86. Înălțimea h a calotei AEF este  $AD = OA - OD = 1 - OD$ . Pe OD îl calculăm din triunghiul dreptunghic OBD ( $D = 90^\circ$ ), unde unghiul la centru BOD este măsurat cu arcul AB, care, în cazul figurei 87, este arcul MK. Dar,  $OD = OB \cos BOD = \cos(\text{arc } AB) = \cos(\text{arc } MK)$ . Deci,

$$h = AD = 1 - OD = 1 - \cos(\text{arc } MK),$$

iar aria triunghiului sferic MKH este măsurată cu  $\theta [1 - \cos(\text{arc } MK)]$ , luând raza sferei egală cu 1, unitatea de

unghi, unghiul drept și unitatea de arie, aria triunghiului sferic tridreptunghic.

Pe de altă parte, triunghiul MHK este echivalent, din punct de vedere infinitezimal, cu patrulaterul sferic KMPM', a cărui arie este măsurată cu suma unghiurilor sale micșorată cu 4, adică

$$\text{ sau } \cancel{\angle PMK} + \cancel{\angle MKM'} + \cancel{\angle KM'P} + \cancel{\angle M'PM} - 4,$$

$$1 \text{ drept.} + \theta + 1 \text{ drept.} + 2 \text{ dr.} - \alpha - 4 \text{ dr.} = \theta - \alpha.$$

Avem, deci, din punct de vedere infinitezimal,

$$\text{ sau } \theta [1 - \cos(\text{arc MK})] = \theta - \alpha,$$

$$(8) \quad \alpha = \theta \cdot \cos(\text{arc MK}).$$

Pe de altă parte, arcul MM' (Fig. 87) este echivalent, din același punct de vedere, cu arcul MH, care, în figura 85, este arcul BC. Acest arc BC face parte din cercul EBCF (Fig. 86) cu raza  $BD = OB \sin BOD = OB \sin(\text{arc AB})$ . Cum știm că măsura arcului este egală cu produsul dintre raza cercului și unghiul la centru corespunzător, urmează că arcul BC are ca măsură  $BD$  (unghiul BDC) =  $OB \sin(\text{arc AB})$  (unghiul A).

În cazul figurei 87,  $OB=R=1$ , raza sferii, pe care e trasă curba sferică, arc AB=arc MK, unghiul A=ungh.  $\theta$ . Deci, arcul MM' e dat de

$$(9) \quad \text{arc MM}' = R \theta \sin(\text{arc MK}) = \theta \cdot \sin(\text{arc MK}).$$

Divizând (8) cu (9), avem

$$(10) \quad \frac{\alpha}{\text{arc MM}'} = \frac{\theta \cdot \cos(\text{arc MK})}{\theta \cdot \sin(\text{arc MK})} = \cotg(\text{arc MK}).$$

Când M' se apropiie indefinit de M,  $\frac{\alpha}{\text{arc MM}'}$  tinde către curbura sferică în M, punctul K de intersecție a cercurilor normale în M și M' tinde către punctul  $M_1$  al desfășurării sferice corespunzător lui M, arc MK tinde către arcul de cerc mare  $MM_1=\varphi$ . Deci, curbura sferică în M, dată de (10), este

$$(11) \quad \cotg \varphi.$$

Dacă curba (C) se reduce la un cerc, punctul K este fix și coincide cu polul cercului; curbura sferică este deci constantă. Reciproc, cercul este singura curbă a cărei curbură sferică este constantă. În adevăr, pentru orice arc MM' al unei astfel de curbe, avem  $MM_1=M'M'_1=0$  și desfășurata sferică se

reduce la un punct. Cercul mare normal trece printr'un punct fix al sferii și curba este un cerc având acest punct ca pol.

**51. Cerc de curbură.** Să descriem din punctul  $M_1$  ca pol un cerc mic de rază sferică  $M_1M$  (Fig. 86); acest cerc atinge curba în punctul  $M$  și are în toate punctele sale, aceeași curbură sferică ca și curba ( $C$ ) în punctul  $M$ . Acesta se zice *cercul de curbură*. Arcul  $MM_1$  este *raza de curbură sferică*, iar  $M_1$  *polul de curbură*.

### CURBE STRÂMBE. CURBURĂ. TORSIUNE.

**52. Curbură. Rază de curbură.** Pe curba ( $M$ ) să adoptăm un sens de parcurs determinat și să însemnăm cu  $s$  arcul de curbă  $AM$ , cuprins între un punct  $A$  ales ca origină și un punct oarecare  $M$ , precedat de semnul  $+$  sau  $-$ , după cum direcția de la  $A$  la  $M$  este direcția pozitivă sau negativă (Fig. 88).

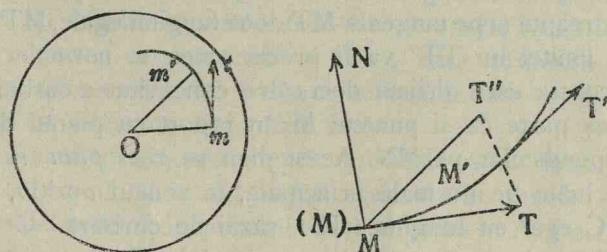


Fig. 88.

Fie  $MT$  direcția pozitivă a tangentei în  $M$ , adică aceea care corespunde la arcele crescătoare. Dacă printr'un punct  $O$  al spațiului paralele cu tangentele  $MT$ ,  $M'T'$ , ..., se formează conul ( $S$ ). Să însemnăm cu  $(\Sigma)$  curba de intersecție a acestui con cu sfera descrisă din  $O$  ca centru și cu raza egală cu unitatea de lungime. Curba  $(\Sigma)$  se zice *indicatoarea sferică* a tangentelor curbei  $(M)$ . Curbele  $(M)$  și  $(\Sigma)$  se corespund punct cu punct; astfel punctului  $M$  îi corespunde pe  $(\Sigma)$  punctul  $m$ , unde paralela la tangentă  $MT$  tăie sfera. Când  $M$  descrie curba  $(M)$  în sensul pozitiv, punctul  $m$  descrie curba  $(\Sigma)$ , într'un anumit sens pe care îl vom adopta ca sens pozitiv pe curba  $(\Sigma)$ , astfel că arcele  $s$  și  $\sigma$  ale acestor două curbe cresc în același timp.

Se zice *curbura în punctul  $M$*  limita raportului

$$\frac{\text{arc } mm'}{\text{arc } MM'},$$

când  $M'$  se apropiie indefinit de punctul  $M$ , adică

$$\frac{d\sigma}{ds}.$$

Se zice punct de inflexiune punctul curbei unde curbura este nulă.

Inversa curburei, adică

$$\frac{ds}{d\sigma}$$

se zice *raza de curbură* în M și se notează cu R.

**53. Normală principală. Centru de curbură. Cerc de curbură.** Curba (M) admite o infinitate de normale, toate situate în planul perpendicular în M pe tangentă MT și care se zice *planul normal* în M la curba (M). Să considerăm acea normală care este paralelă cu tangenta *mt* la indicatoarea sferică în *m* (Fig. 88). Această normală se zice *normală principală*. Vom lua ca sens pozitiv pe această normală MN, sensul tangentei *mt*. Să ducem prin M o paralelă cu tangenta *M'T'* și să luăm pe această dreaptă și pe tangentă MT două lungimi egale, *MT''=MT*. Direcția limitei lui *TT''* va fi precis aceea a normalei principale. Aceasta este dirijată deci către concavitatea curbei, adică de aceeași parte ca și punctul *M'* în raport cu planul dus prin MT perpendicular pe MN. Acest plan se zice *plan rectifiant*.

Să luăm pe normală principală, în sensul pozitiv, un segment MC egal cu lungimea R a razei de curbură. C se zice *centru de curbură*, iar cercul cu centrul în C și cu raza R se zice *cerc de curbură*.

**54. Plan osculator.** Planul dus prin tangentă MT și normală principală MN se zice *planul osculator* în M. Acest plan se bucură de mai multe proprietăți.

1º Planul osculator fiind limita planului MTT'' (Fig. 88) se vede, deci, că *acest plan este limita planului dus prin tangentă MT și paralel cu tangentă infinit vecină M'T'*.

2º Fie A, B, C trei puncte infinit vecine ale curbei (M) situate în planul (P), arcul AB fiind deasupra planului (P), iar arcul BC dedesubt (Fig. 89). Să presupunem că punctele A, B, C sunt puncte ordinare și că nu sunt puncte de inflexiune sau singulare pe arcele AB, BC. Să considerăm punctele A' al arcului AB, B' al arcului BC, cel mai deasupra și cel mai de jos față de planul (P). Dacă în indicatoare punctele a', b' corespunzătoare tangentelor în A' și B', care sunt paralele cu planul (P), urmează că planul Oa'b', paralel cu tangentele în A' și B', este paralel cu planul P.

Să presupunem că punctele A, B, C variază și se apropie nemărginit de un acelaș punct limită M. Atunci punctele  $a'$ ,  $b'$

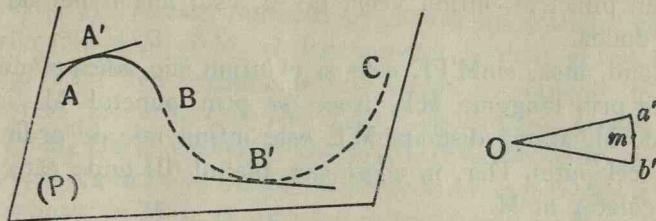


Fig. 89.

vor avea ca limită comună punctul  $m$  corespunzător lui M. Dar, la limită, planul  $Oa'b'$  tinde către planul care este paralel cu planul osculator în M. Deci, planul (P), care trece prin punctele A, B, C, tinde către planul osculator în M, când punctele A, B, C, infinit vecine, tind către punctul M.

Așa dar, dacă trei puncte infinit vecine au ca limită un punct M, care nu este nici singular și nici punct de inflexiune, planul acestor trei puncte are ca limită planul osculator în M.

De aici rezultă că curba traversează planul osculator în M, căci între partea care precede și aceea care urmează acestui plan osculator, curba are trei puncte confundate în M comune cu planul și altele nu mai poate avea.

3º Demonstrația precedentă subsistă când două puncte A și B se confundă în A; planul acestor trei puncte A, B, C e determinat atunci de punctul C și tangentă în A. Deci, planul osculator este limita planului ce trece prin tangentă într'un punct și prin punctul infinit vecin.

4º Să ducem prin tangentă MT în M la curba (M) un plan (II)

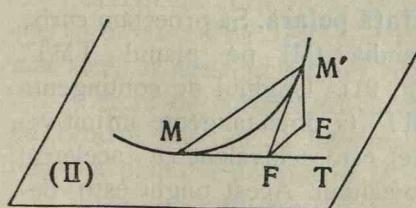


Fig. 90.

(Fig. 90) și fie  $M'$  un punct infinit vecin de M, E piciorul perpendicularei din  $M'$  pe planul (II), F proiecția lui  $M'$  pe tangentă MT. Unghiul  $M'FE$  este unghiul plan corespunzător diedrului format de planele (II) și  $M'MF$ . Avem

$$M'E = M'F \sin M'FE = MM' \sin M'MF \sin M'FE.$$

Dar,  $MM'$  și  $\sin M'MF$  sunt infiniti mici de ordinul întâi când se ia arcul  $MM'$  ca infinit mic principal. De asemenea, cătă vreme planul (II) nu trece prin punctul  $M'$  (nu se confundă

cu planul  $M'MF$ ), unghiul  $M'FE$  este diferit de zero și  $\sin M'FE$  tinde către o limită finită. Așa fiind, distanța  $M'E$  la planul (II) de la un punct  $M'$  infinit vecin de  $M$ , este infinit mic de ordinul al doilea.

Când, însă,  $\sin M'FE$  este și el infinit mic, adică planul (II), ce trece prin tangenta  $MT$ , trece și prin punctul  $M'$  infinit vecin de  $M$ , atunci distanța  $M'E$  este infinit mic de ordinul al treilea, cel puțin. Dar, în acest caz, planul (II) tinde către planul osculator în  $M$ .

Deci, dintre toate planele ce trec prin tangenta  $MT$ , planul osculator este acela care se apropiie mai mult de curbă în  $M$  de cât orice alt plan. De aceea i se zice plan osculator, căci are cu curba un contact de ordinul al doilea, are trei puncte confundate cu curba în  $M$ , tocmai câte trebuie pentru a determina un plan.

5º Planul tangent la conul ( $S$ ) dealungul generatoarei  $Om$  (Fig. 88) este definit de  $Om$  și tangenta  $mt$  și cum  $Om$  și  $mt$  sunt respectiv paralele cu tangenta  $MT$  și normala principala  $MN$ , urmează că planul tangent la con dealungul generatoarei  $Om$  este paralel cu planul osculator în  $M$  la curba ( $M$ ).

Dar, două plane tangente infinit vecine de  $Om$  la conul ( $S$ ) se tăie la limită dealungul generatoarei  $Om$ ; deci și două plane osculatoare infinit vecine de  $M$  se vor tăia la limită după o dreaptă paralelă cu  $Om$ , adică după tangenta  $MT$ . Rezultă că două plane osculatoare infinit vecine de punctul  $M$  al curbei ( $M$ ) se tăie la limită după tangenta în  $M$ . Știind că intersecția a două poziții infinit vecine a două suprafețe variabile se zice caracteristică, urmează că caracteristica planului osculator în  $M$  este tangenta în acel punct.

### 55. Dreaptă polară. Suprafață polară. Să proiectăm curba

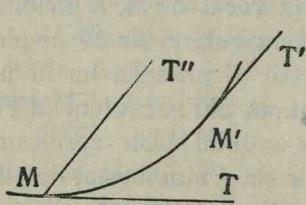


Fig. 91.

strâmbă ( $M$ ) pe planul  $TMT''$  (Fig. 91). Unghiul de contigentă  $TMT''$  (a două tangente infinit vecine) este echivalent cu acela al proiecției. Acest unghi este de altminterea egal cu unghiul planelor normale în  $M$  și  $M'$ . Coarda

$MM'$  este echivalentă cu proiecția ei, fiindcă face cu planul variabil  $TMT''$  un unghi infinit mic. Urmează de aci că curburile curbei și proiecțiile sale, în punctul comun  $M$ , sunt egale și deci curba ( $M$ ) și proiecția sa au același centru de curbură

Dar centrul de curbură  $c$  al proiecției este în planul TMT" la intersecția normalelor la curba proiectată în proiecțiile punctelor M și M'. Aceste normale se găsesc în planele normale la curba (M) în M și M' și deci punctul  $c$  este la intersecția planului TMT" cu dreapta de intersecție a planelor normale în M și M' la curba (M). Dar TMT" tinde către planul osculator în M. Deci, *centrul de curbură C al curbei în M este limita intersecții planului osculator cu dreapta de intersecție a planeelor normale în M și în punctul infinit vecin cu M.*

Dar, intersecția planului normal în M și a celui infinit vecin cu el este *caracteristica planului normal* în M. Se zice *dreapta polară* caracteristica planului normal. Deci, *dreapta polară este perpendiculară în centrul de curbură pe planul osculator*. Locul dreptelor polare pentru o curbă se zice *suprafață polară*.

**56. Cerc osculator.** Am văzut că planul osculator în M este limita planului (P) ce trece prin punctul M și două puncte M', M'' infinit vecine de M. Să proiectăm curba (M) pe planul (P) format de punctele M', M, M''. Cercul circumscris triunghiului M'MM'' coincide cu proiecția sa pe planul (P) și la limită tinde către cercul de curbură al curbei proiectate (care este o curbă plană) pe planul osculator. Dar, am văzut mai sus că, dacă se proiecteză o curbă (M) pe planul TMT", care are aceeași limită ca și (P), curba și proiecția au la limită același centru de curbură în M (același cerc de curbură). Deci, *cercul de curbură al curbei în M, coincide cu limita către care tinde cercul ce trece prin punctul M și două puncte M' și M'' infinit vecine de M.*

Cercul de curbură în M se zice și *cercul osculator în M*, căci are cu curba trei puncte confundate în M, are, cum se mai zice, în acest punct, un contact de ordinul al doilea.

Cercul de curbură (osculator) se află în planul osculator, iar centrul său este la intersecția planului osculator cu caracteristica planului normal în M.

Este evident că, în orice chestiune, unde vor interveni trei puncte infinit vecine, se va înlocui curba cu cercul său osculator.

**57. Binormală. Torsiune.** Se zice *binormală* perpendiculară MB în M pe planul osculator (Fig. 92). Binormala este deci paralelă cu limita perpendiculararei comune la tangentele MT și M'T', de unde și numele de binormală.

Această dreaptă este paralelă cu dreapta polară  $\Delta$ , limita intersecții planelor normale în  $M$  și  $M'$ .

Pe sferă, pe care am figurat indicatoarea  $(\Sigma)$  a tangentelor, să figurăm o indicatoare analoagă a binormalelor. Pentru aceasta,

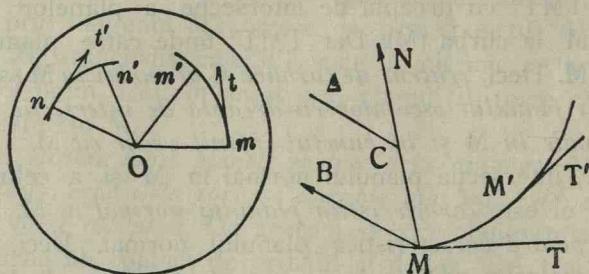


Fig. 92.

vom lua ca sens pozitiv pe binormala  $MB$ , acela pentru care triedrul tridreptunghic, cu muchile, tangentă  $MT$ , normală principală  $MN$ , binormală  $MB$ , să aibă același sens cu un triedru direct  $Oxyz$ . Se știe că triedrul  $Oxyz$  este direct, când un observator, aşezat dealungul lui  $Oz$ , cu picioarele în  $O$ , și capul spre  $z$ , privind  $Ox$  și  $Oy$ , ar trebui să învârtească în sens direct (invers ca acele unui ceasornic) axa  $Ox$  ca să o aștearnă peste  $Oy$ .

Triedrul format de tangentă  $MT$ , normală principală  $MN$  binormală  $MB$ , în sensul indicat, este *triedrul principal* în  $M$ .

Să ducem prin centrul  $O$  al sferii o rază paralelă cu  $MB$  și fie  $n$  punctul unde înteapă sferă (Fig. 92). Când punctul  $M$  descrie curba  $(M)$ , punctul  $n$  descrie curba  $(\theta)$ , indicatoarea binormalelor. Fie  $nt'$  tangentă în  $n$  la această curbă și  $mt$  tangentă la indicatoarea tangentelor.

Să considerăm conul  $(S_1)$  cu vârful  $O$  și directoarea curba  $(\theta)$ . Generatoarea  $On$  a acestui con este perpendiculară pe  $Om$  și  $mt$ , adică pe planul tangent dealungul lui  $Om$  la conul  $(S)$  cu vârful  $O$  și directoarea curba  $(\Sigma)$ . Deci, conul  $(S_1)$  este suplimentar cu conul  $(S)$  și este reciprocitate, adică, generatoarea  $Om$  este perpendiculară pe planul tangent la conul  $(S_1)$  dealungul lui  $On$ , adică dreapta  $Om$  este perpendiculară pe dreptele  $On$  și  $nt'$  și cum  $nt'$  este tangentă la o curbă trasă pe sferă, e perpendiculară pe raza  $On$ . Deci,  $nt'$  este perpendiculară pe  $On$  și  $Om$ , adică pe planul  $mOn$ . De asemenea,  $mt$  este perpendiculară pe  $Om$  și  $On$ , deci pe planul  $mOn$ . *Tangentele  $mt$  și  $nt'$  la indicatoarea tangentelor și binormalelor în punctele cores-*

punzătoare  $m$  și  $n$ , fiind perpendiculare pe planul  $mOn$ , sunt paralele între ele.

Aceste două indicatoare au tangentele  $mt$  și  $nt'$  de acelaș sens sau de sens contrar, după cum s'a luat pe binormala MB sensul pozitiv sau negativ. Vom lua ca sens pozitiv pe indicatoarea ( $\theta$ ), acela în care se deplasează punctul  $n$  când M descrie curba (M) în sensul pozitiv; în rezumat, arcele  $MM'$ ,  $mm'$ ,  $nn'$  sunt câte trele de acelaș sens.

Arcul infinit mic  $nn'$  este echivalent cu unghiul binormalelor, sau cu unghiul planelor osculatoare în M și  $M'$ . Acest unghi se zice *unghiul de torsiu*ne și-l vom nota cu  $d\tau$ . Unghiul de torsiune dă o idee de cantitatea cu care curba, în vecinătatea lui M, se depărtează de forma plană, după cum unghiul tangentelor (de contingă) măsoară cantitatea cu care se depărtează de forma rectilinie.

Raportul  $\frac{ds}{d\tau} = T$  se zice *raza de torsiu*ne în punctul M și este o cantitate pozitivă.

*Torsiu*nea este o cantitate algebrică, a cărei valoare absolută este inversa razei de torsiune, egală cu  $\frac{1}{T}$ , și al cărei semn este determinat de dispoziția ce o are curba față de planul său osculator. Pe când în cazul curburei,  $\frac{1}{R}$ , n'aveam nevoie să ținem seamă de sens, căci curba în vecinătatea lui M era toată așezată de aceeaș parte a planului rectifiant (dus prin tangentă perpendicular pe normala principală), în cazul torsiunei se schimbă, căci planul osculator traversează curba și poate fi așezată în raport cu acest plan în două feluri deosebite.

Planul osculator desparte spațiul în două regiuni. Să ne închipuim un observator așezat în picioare pe acest plan, cu picioarele în M, privind spre centrul de curbură. După cum punctele curbei, vecine de M, din aceeaș regiune cu observatorul, sunt așezate la dreapta sau la stânga sa, vom zice că dispoziția curbei este *dextrorsum* sau *sinistrorsum*. Dispoziția rămâne aceeaș dacă trecem de la una la alta din cele două regiuni separate de planul osculator.

Așa fiind, vom lua pentru măsura torsiunei  $-\frac{1}{T}$  în primul caz și  $+\frac{1}{T}$  în cazul al doilea;  $\frac{1}{T}$  fiind egală cu  $\frac{d\tau}{ds}$  este esențialmente pozitivă.

Este de observat că, cele două dispoziții pe care le-am definit, corespund celor două orientări distințe ale triedrului format de tangentă, normală principală și binormală și că  $\frac{1}{T}$  corespunde sensului direct ce am luat mai sus pe binormala MB.

*Observare.* Să presupunem că torsionea este nulă dealungul curbei (M). Indicatoarea binormalelor se reduce atunci la un punct  $n$  și indicatoarea tangentelor la un cerc mare tras pe sferă cu centrul O și având punctul  $n$  ca pol. Tangenta MT este deci paralelă cu un plan fix (P). Distanța sa la acest plan, când trecem dela punctul M la punctul infinit vecin  $M'$ , crește cu un infinit mic, care rămâne constant de ordinul al doilea, cel puțin. Această distanță rămâne deci constantă și curba este necesar plană. Torsiunea la o curbă strâmbă se anulează deci numai pentru anumite puncte particulare; de aceea se mai zice linie cu dublă curbură la o curbă care nu e plană.

Se zice punct de a *două inflexiune* unui punct al unei curbe strâmbe unde torsionea este nulă.

**58. Relațiunile dintre cele două indicatoare.** Indicatoarea tangentelor ( $\Sigma$ ) și aceea a binormalelor ( $\Theta$ ) (Fig. 93) sunt

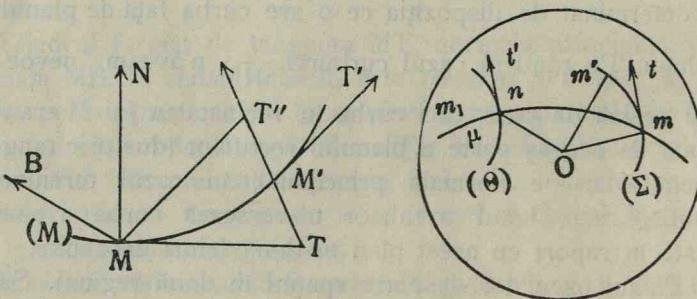


Fig. 93.

două curbe sferice suplimentare, adică  $On$  este perpendiculară pe planul tangent în  $m$  la conul cu vârful O și directoarea ( $\Sigma$ ), după cum  $Om$  este perpendiculară pe planul tangent în  $n$  la conul cu vârful O și directoarea ( $\Theta$ ). Ele au aceeași desfașurată sferică, căci cercul mare  $mn$  (Fig. 93), normal la curba ( $\Sigma$ ) în  $m$ , este normal și la curba ( $\Theta$ ) în  $n$ , tangentele în  $m$  și  $n$  la aceste curbe fiind paralele. Planul cercului mare  $mn$  este paralel cu planul rectifiant dus prin tangentă MT și binormală MB; deci cercul mare  $mn$  reprezintă sferic planul rectifiant al curbei (M). Polul de curbură  $m_1$  [limita intersecției a două cercuri mari nor-

male în două puncte infinit vecine de  $m$  pe curba  $(\Sigma)$ ] este deci reprezentarea sferică a caracteristicei planului rectifiant. Raza de curbură sferică, egală cu arcul  $m_1m$ , măsoară (No. 50) inclinarea  $\varphi$  a acestei caracteristice pe tangentă MT. Așa fiind, unghiurile de contingență și de torsiune în punctul M,  $d\sigma$ , și  $d\tau$ , sunt măsurate respectiv cu arcul  $mm'$  al indicatoarei  $(\Sigma)$  și prin unghiul de contingență sferică al arcului  $mm'$ .

Dar, am văzut (No. 50) că curbura sferică a curbei  $(\Sigma)$  în punctul  $m$  este limita raportului

$$\frac{\text{ungh. conting. a arc } mm'}{\text{arc } mm'}.$$

Deci, acest raport este egal cu

$$(12) \quad \frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Dar, tot curbura sferică în  $m$  este dată de formula (No. 50) (11),

$$\frac{\cotg \varphi}{R},$$

care, în cazul nostru, este

$$(13) \quad \cotg \varphi.$$

Egalând expresiunile (12) și (13), care reprezintă curbura sferică în  $m$ , avem

$$\cotg \varphi = \frac{d\tau}{d\sigma},$$

de unde

$$(14) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{T}{R}.$$

Să observăm, de asemenea, că unghiul  $\theta$  din formulele (8) și (9) (No. 50) devine, când se aplică aceste formule la indicațoarele  $(\Sigma)$  și  $(\Theta)$ , unghiul  $d\omega$  a două normale principale infinit vecine. Aceste formule se pot scrie deci

$$(15) \quad d\tau = d\omega \cos \varphi, \quad d\sigma = d\omega \sin \varphi$$

și deci, între unghiurile infinit mici,  $d\sigma$ ,  $d\tau$ ,  $d\omega$ , avem relația

$$(16) \quad d\omega^2 = d\sigma^2 + d\tau^2.$$

**59. Sferă osculatoare.** Prin punctul M al unei curbe (M) și prin alte trei puncte M', M'', M''', infinit vecine de M, se poate face să treacă o sferă și numai una. Această sferă (S) variabilă, când ultimele trei puncte se apropiie indefinitely de pri-

mul, tinde către o poziție limită și devine ceea ce se zice *sferă osculatoare* în  $M$ . Această sferă osculatoare conține evident cercul osculator, centrul său este situat pe dreapta polară și deci, pentru a cunoaște această sferă, e destul să ști, în mărime și în semn, distanța centrului său la centrul de curbură.

Pentru a determina această distanță, să considerăm un poligon sferic variabil, cu vârfurile în punctele  $M, M', M'', M'''$ ;

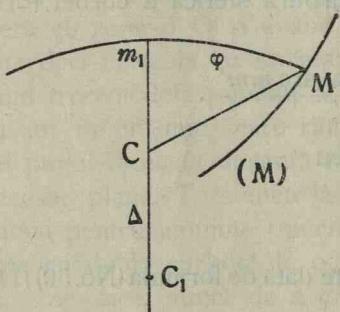


Fig. 94.

acest poligon este în întregime așezat pe sferă variabilă ( $S$ ) și va tinde către o curbă limită ( $M_1$ ) situată pe sferă osculatoare. Curba ( $M_1$ ) și curba ( $M$ ) vor putea evident să fie substituite una alteia, dacă nu trebuie să considerăm de cât infiniti mici de ordinul al treilea cel mult. Fie atunci  $\Delta$  dreapta polară (Fig. 94), caracteristica planului normal în

$M$ , adică intersecția planului normal în  $M$  cu planul normal în punctul infinit vecin de  $M$ . Centrul  $C_1$  al sferei osculatoare în  $M$  este pe dreapta  $\Delta$ , iar proiecția  $C$  a lui  $M$  pe  $\Delta$  este centrul de curbură în  $M$  la curba ( $M$ ) (centrul cercului osculator în  $M$ ). Să însemnăm cu  $R$  raza de curbură  $CM$  (raza cercului osculator) și cu  $C_1M = r$  raza sferei osculatoare.

Să considerăm pe sferă osculatoare curba ( $M_1$ ), cercul mare normal în  $M$  la curba ( $M_1$ ) și cercul mare normal la aceeași curbă în punctul infinit vecin de  $M$ . Planele acestor cercuri normale sunt planele normale în  $M$  și punctul infinit vecin, așa că punctul  $m_1$  de intersecție a acestor cercuri normale este pe dreapta polară  $\Delta$ . Punctul  $m_1$  pentru curba sferică ( $M_1$ ) trăsă pe sferă osculatoare, este polul de curbură în  $M$  la această curbă, iar arcul de cerc mare  $m_1M = \varphi$  este raza de curbură sferică a curbei ( $M_1$ ) în  $M$ .

Pentru a calcula raza sferei osculatoare, să considerăm triunghiul dreptunghic  $CC_1M$  (unghiul drept în  $C$ ), în care avem

$$CM = C_1M \sin CC_1M, \quad R = r \sin \varphi.$$

Raza  $r$  a sferei osculatoare este constantă față de variația arcului  $\varphi$  a cercului mare normal la curba ( $M_1$ ) trăsă pe sferă osculatoare. Deci, diferențind, avem

$$dR = r \cos \varphi d\varphi.$$

Dar, din acelaș triunghi dreptunghic  $\hat{C}C_1M$ , avem

$$C_1C = C_1M \cos\varphi = r \cos\varphi,$$

astfel că relația precedentă devine

$$(17) \quad dR = C_1C d\varphi.$$

Însă  $d\varphi$  este variația arcului de cerc mare normal la curba sferică ( $M_1$ ), este diferența dintre razele de curbură sferică ale curbei ( $M_1$ ), în punctul  $M$  și punctul infinit vecin de  $M$ , și cum  $m_1$  este punctul desfășurării sferice corespunzător punctului  $M$  al curbei sferice ( $M_1$ ), după proprietățile desfășurărilor, urmează că variația razei de curbură sferică este egală cu variația arcului de desfășurată. Deci,  $d\varphi = d(m_1)$ , înțelegând prin  $(m_1)$  curba descrisă pe sferă osculatoare de punctul  $m_1$ .

Dar,  $C_1m_1$  este dreapta polară în  $M$ , este paralelă cu binormala în  $M$ , deci  $d(m_1)$  reprezintă arcul de curbă sferică ( $m_1$ ) care măsoară pe sferă unghiul a două binormale infinit vecine. Însă, acest unghi știm că este unghiul de torsione în  $M$ , adică  $\frac{ds}{T}$ , deci

$$d\varphi = \frac{ds}{T},$$

iar formula (17) devine

$$dR = C_1C \frac{ds}{T},$$

sau

$$CC_1 = -T \frac{dR}{ds},$$

$T$  fiind raza de torsione.

Acestea fiind stabilite, din triunghiul dreptunghic  $CC_1M$ , avem

$$\overline{C_1M}^2 = \overline{C_1C}^2 + \overline{CM}^2 = \left(T \frac{dR}{ds}\right)^2 + R^2,$$

deci raza  $r$  a sferei osculatoare în  $M$  la curba ( $M$ ) este dată de

$$(18) \quad r^2 = R^2 + T^2 \left(\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

*Observare.* Din formulele stabilite, se vede că curba ( $M$ ) și curba sferică ( $M_1$ ) au, în punctul  $M$ , aceeaș curbură, aceeaș torsione și aceeaș derivată a curburei în raport cu arcul  $s$  al curbei ( $M$ ).

#### 60. Formulele lui Frenet—Serret. Considerația indica-

toarelor sferice ne permite să stabilim formulele fundamentale în teoria curbelor strâmbă, care dă variația cosinusurilor directoare  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $(\alpha', \beta', \gamma')$ ,  $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$  ale tangentei, normalei principale și binormalei, muchile triedrului principal.

Pentru aceasta, să ducem prin centrul O al axelor de coordonate rectangulare  $Oxyz$ , paralele cu tangentă, normală principală și binormală, și fie  $m, p, n$  intersecțiile acestora cu o sferă cu centrul O și raza unitatea. Punctul  $m$  descrie indicatoarea tangentelor, iar  $n$  indicatoarea binormalelor.

Fie  $m'$  și  $n'$  punctele infinit vecine de  $m$  și  $n$  pe indicatoare, corespunzătoare punctului  $M'$  infinit vecin de  $M$  pe curba  $(M)$ . Se știe că tangentele în  $m$  și  $n$  la indicatoarele respective sunt paralele cu normală principală, adică cu  $O\hat{p}$ . Dreptele  $mm'$  și  $nn'$  tind, la limită, către tangentele în  $m$  și  $n$  la indicatoarele respective, deci sunt, la limită, paralele cu  $O\hat{p}$ . Dar, arcele  $mm'=ds$ ,  $nn'=d\tau$  și sunt deci egale cu

$$\frac{ds}{R}, \quad \frac{ds}{T}.$$

Însă, afară de infiniti mici de ordinul al treilea, aceste arce sunt egale cu coardele  $mm'$ ,  $nn'$ .

Așa fiind, să observăm că coordonatele punctelor  $m$  și  $n$  sunt  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ , iar ale punctelor  $m'$  și  $n'$  sunt  $(\alpha+d\alpha, \beta+d\beta, \gamma+d\gamma)$ ,  $(\alpha''+d\alpha'', \beta''+d\beta'', \gamma''+d\gamma'')$ . Deci,  $d\alpha, d\beta, d\gamma$  sunt proiecțiile pe cele trei axe ale segmentului  $mm'$ , iar  $d\alpha'', d\beta'', d\gamma''$ , proiecțiile pe aceleași axe ale segmentului  $nn'$ .

Proiectând pe  $mm'$  pe  $Ox$ , avem

$$d\alpha = mm' \cos(Ox, mm') = \frac{ds}{R} \alpha', \quad d\alpha = \frac{ds}{R} \alpha',$$

de unde

$$(19) \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R}.$$

Proiectând pe  $nn'$  pe  $Ox$ , avem

$$d\alpha'' = nn' \cos(Ox, nn') = \frac{ds}{T} \alpha', \quad d\alpha'' = \frac{ds}{T} \alpha',$$

de unde

$$(20) \quad \frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}, \quad \frac{d\beta''}{ds} = \frac{\beta'}{T}, \quad \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma'}{T}.$$

Dar, avem

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1,$$

De unde

$$\alpha d\alpha + \alpha' d\alpha' + \alpha'' d\alpha'' = 0,$$

$$\alpha' d\alpha' = -\alpha d\alpha - \alpha'' d\alpha'',$$

și ținând seamă de (19) și (20), urmează

$$\alpha' d\alpha' = -\alpha \frac{\alpha'}{R} ds - \alpha'' \frac{\alpha'}{T} ds$$

de unde

$$21) \quad \frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, \quad \frac{d\beta'}{ds} = -\frac{\beta}{R} - \frac{\beta''}{T}, \quad \frac{d\gamma'}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma''}{T}.$$

Formulele (19), (20), (21) sunt formulele lui Serret-Frenet și servesc să cunoaște variația celor nouă cosinusuri directoare ale triedrului principal în funcțiune de aceste cosinusuri și razele R și T.

**61. Desfășurătoarele unei curbe strâmbă.** Pe când normalele la o curbă plană sunt tangente la aceeași curbă, desfășurata acelei curbe, normalele principale nu sunt tangente la aceeași curbă.

Se poate, însă, să se găsească, ca și la curbele plane, desfășurătoarele unei curbe strâmbă (M), adică curbele la care sunt normale toate tangentele curbei (M). Fie, în adevăr, A punctul unde tangentă în M întâlnește una din desfășurătoarele (A). Să aplicăm formula (6) de la No. 46, care dă variația unei unui segment rectiliniu. În cazul actual, segmentul este MA, unghiurile subt care acest segment tăie curbele (M) și (A), descrise de extremitățile sale, sunt 0 și  $90^\circ$ ; deci, această formulă devine

$$d(MA) = d(M),$$

și integrând de la o poziție  $M_0$  oarecare, avem

$$MA - M_0 A_0 = \text{arc} MM_0.$$

Pentru a găsi o desfășurătoare a unei curbe (M), n'avem de căt să aplicăm dealungul curbei (M) un fir flexibil și să fixăm unul din capetele firului pe curbă. Deslipind celalt capăt al firului de curba (M) și ținându-l întins, extremitatea firului descrie o desfășurătoare a curbei (M).

Mai urmează de aci că segmentul determinat pe toate tangentele la (M) de două desfășurătoare ale acestei curbe este constant.

**62. Studiul unei curbe în vecinătatea unui punct.** Fie MT, M'T' tangentele la extremitățile unui arc infinit mic MM'

al curbei (M). Să proiectăm figura pe un plan variabil (P), paralel cu aceste două tangente. Punctul de întâlnire al tangentelor la curba proiectată ( $M_1$  și  $M'_1$ ), este piciorul perpendiculararei comunei la  $MT$  și  $M'T'$  (Fig. 95). Curbura totală a arcului  $MM'$  este egală cu curbura totală a proiecției  $M_1M'_1$ ; unghurile și segmentele rectilinii sunt de altfel echivalente cu proiecțiile lor, din punct de vedere infinitezimal, și proprietățile demonstrează pentru curbele plane, pentru un punct ordinar (No. 9), se extind și la curbele strâmbă și anume:

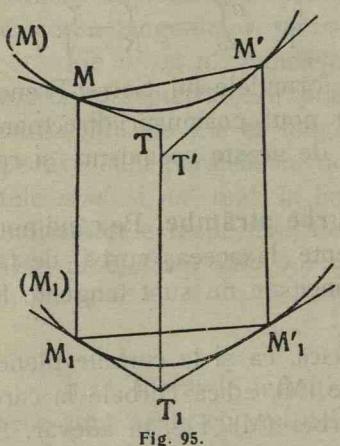


Fig. 95.

1º Segmentele tangentelor la extremitățile unui arc infinit mic, limitate la perpendiculara comună la aceste tangente, sunt infiniti mici echivalenți.

2º Unghiul format de coarda unui arc infinit mic și tangentă la una din extremitățile sale este echivalent cu jumătatea unghiului de contingenta.

3º Unghiul inscris într'un arc infinit mic este echivalent cu suplimentul jumătății curburei totale a acestui arc.

4º Deci, cercul osculator în  $M$  va putea fi substituit curbei însăși, dacă nu se consideră decât relațiuni dintre trei puncte infinit vecine. Se poate, ca și în cazul curbelor plane, să se arate că diferența dintre un arc și coarda sa are ca parte principală  $\frac{ds^3}{24R^2}$ .

5º Distanța de la planul osculator la punctul infinit vecin. Să luăm acum ca plan de proiecție (P), un plan perpendicular pe tangentă  $MT$  (Fig. 96). Fie  $M_1M'_1$  proiecția arcului  $MM'$ . Cele două arce  $M'M$ ,  $MM'$ , care pornesc din punctul  $M$ , fiind situate de aceeași parte a planului rectifiant și de o parte și de alta a planului osculator, punctul  $M_1$  este un punct de întoarcere al curbei ( $M_1$ ). Curba ( $M_1$ ) are deci două ramuri tangente

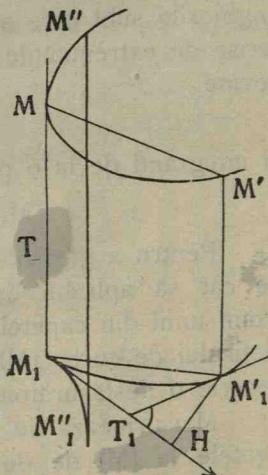


Fig. 96.

în  $M_1$  la dreapta  $M_1T_1$ , urma planului osculator pe planul de proiecție. Ordinul de contact al fiecărei ramuri cu tangenta comună  $M_1T_1$  este  $\frac{1}{2}$ , adică

$$M'_1H = \lambda \overline{M_1H}^{\frac{1}{2}+1},$$

$\lambda$  fiind o funcție de  $M_1H$  care nu se anulează când  $M_1H \rightarrow 0$ .

Dar, unghiul de contingencă  $M'_1T_1H$  este diferențiala unghiului ce tangenta în  $M_1$  face cu o direcție fixă. Deci

$$\operatorname{tg} HM_1M'_1 = \frac{M'_1H}{M_1H}, \quad \operatorname{tg} HM_1M'_1 = \lambda \overline{M_1H}^{\frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{tg} HT_1M'_1 = \frac{d(M'_1H)}{d(M_1H)} = \lambda \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \overline{M_1H}^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \operatorname{tg} HM_1M'_1.$$

Considerând numai părțile principale, avem, din punct de vedere infinitezimal,

$$\cancel{\propto} HM_1M'_1 = \frac{2}{3} \cancel{\propto} HT_1M'_1.$$

Dar, unghiul  $M'_1T_1H$  este unghiul plan corespunzător diedrului format de planele  $MM_1T_1$ , planul osculator în  $M$ , cu planul dus prin tangenta în  $M'$  la curba ( $M$ ) paralel cu tangentă  $MT$  în  $M$ .

Pe indicatoarea sferică (Fig. 97), acest unghi este egal cu unghiul planelor  $Omt$  și  $Omm'$ , care, din punct de vedere infinitezimal, este egal cu unghiul coardei  $mm'$  cu tangenta  $mt$ , ce este echivalent cu jumătatea unghiului de contingencă al indicatoarei sferice  $mm'$ . Dar acest unghi este tot mai unghiul de torsiu, așa că unghiul  $M'_1T_1H$  este echivalent cu jumătatea unghiului de torsiu, iar unghiul  $HM_1M'_1$  este echivalent cu o treime din unghiul de torsiu,  $\frac{d\tau}{3}$ .

Acestea fiind stabilite, expresiunea distanței punctului  $M'$  la planul osculator în  $M$  este dată de

$$M'_1H = M_1M'_1 \sin M'_1M_1H = MM' \sin M'MT \sin M'_1M_1H.$$

Dar  $MM'$  este echivalent cu  $ds$ ;  $\sin M'MT$  cu unghiul format de coarda  $MM'$  cu tangenta la extremitatea  $M$  a arcului, deci echivalent cu jumătatea unghiului de contingencă a arcu-lui  $MM'$ , adică  $\frac{d\sigma}{2}$ ;  $\sin M'_1M_1H$  echivalent cu unghiul  $M'_1M_1H$ , echivalent cu o treime din unghiul de torsiu, adică  $\frac{d\tau}{3}$ .

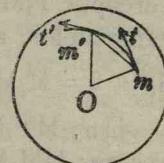


Fig. 97.

Deci, distanța de la punctul  $M'$  la planul osculator în punctul infinit vecin are ca parte principală

$$(22) \quad \Delta = ds \frac{d\sigma}{2} \frac{d\tau}{3} = \frac{ds d\sigma d\tau}{6}.$$

Urmează că această distanță este infinit mic de ordinul al treilea, deci schimbă semnul odată cu  $ds$ , aşa că într'un punct ordinat, planul osculator traversează curba, ceea ce știam.

Să proiectăm acum curba pe planul rectifiant (dus prin tangentă, perpendicular pe planul osculator). Urma planului osculator pe planul rectifiant, adică tangenta  $MT$ , va fi tangentă la proiecția curbei. Dar, planul osculator având trei puncte confundate în  $M$ , în proiecție, curba va avea trei puncte confundate în  $M$ , aşa că în punctul  $M$  curba va avea un punct de inflexiune. Deci, proiecția curbei pe planul rectifiant are în punctul  $M$  o inflexiune.

6º Cea mai scurtă distanță dintre două tangente infinit vecine. Să considerăm tangentele  $MT$  și  $M'T'$  în două puncte infinit vecine. Să proiectăm figura pe un plan perpendicular pe tangentă  $MT$  (Fig. 96). Planul dus prin tangentă  $M'T'$  paralel cu  $MT$  este perpendicular pe planul de proiecție și are urma  $T_1M'_1$ , tangentă la curba de proiecție. Perpendiculara comună la tangentele  $MT$ ,  $M'T'$  este egală cu distanța de la punctul  $M_1$  la dreapta  $T_1M'_1$ . Deci, însemnând cu  $\delta$  cea mai scurtă distanță a tangentelor, avem

$$(23) \quad \delta = M_1M'_1 \sin M_1M'_1 T_1 = MM' \sin M'MT \sin M_1M'_1 T_1.$$

Dar,  $HT_1M'_1$  este echivalent cu jumătatea unghiului de torsiune;  $HM_1M'_1$  echivalent cu o treime din unghiul de torsiune și observând că  $HT_1M'_1$  este exterior triunghiului  $T_1M_1M'_1$ , avem

$$\cancel{\angle} M_1M'_1 T_1 = \cancel{\angle} HT_1M'_1 - \cancel{\angle} HM_1M'_1 = \frac{d\tau}{2} - \frac{d\tau}{3} = \frac{d\tau}{6}.$$

Înlocuind în (23) pe  $MM'$  cu echivalentul său  $ds$ ,  $\sin M'MT$  cu echivalentul său  $\cancel{\angle} M'MT$ , sau  $\frac{d\sigma}{2}$ , pe  $\sin M_1M'_1 T_1$  cu  $\frac{d\tau}{6}$ , urmează că partea principală a distanței  $\delta$  dintre două tangente infinit vecine, este

$$(24) \quad \delta = \frac{ds}{1} \frac{d\sigma}{2} \frac{d\tau}{6} = \frac{ds d\sigma d\tau}{12}.$$

Formulele (22) și (24) se datorează lui O. Bonnet.

**63. Aplicații. Elicea.** Înainte de a termina studiul curbelor strămbe, să aplicăm cele stabilite pentru elice, una din curbelor strămbe cea mai întrebunțată.

Se zice *elice* curba trăsă pe un cilindru, ale cărei tangente fac un unghi constant cu generatoarele cilindrului, sau, ale cărei tangente fac un unghi constant  $\alpha$  cu secțiunile drepte ale cilindrului. Elicea se zice în acest caz de unghiul  $\alpha$  (Fig. 98).

Dacă se desfășoară pe un plan cilindrul pe care e trăsă elicea, unghiiurile se conservă, deci transformata elicei este o dreaptă tăind dreptele care sunt transformatele generatoarelor cilindrului subt unghiul  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ . Această proprietate fundamentală a elicei îi poate servi de definiție.

1º Fie  $G$  paralela la generatoarele cilindrului dusă prin centrul  $O$  al sferei cu raza 1 (Fig. 99). Tangenta la elice făcând

un unghi constant cu  $G$ , paralelele duse prin centrul  $O$  al acestei sfere la aceste tangente, fac un unghi constant cu  $G$  și deci formează un con de rotație. Acest con tăie sfera după un cerc mic, astfel că indicatoarea ( $m$ ) a tangentelor la elice este un cerc mic, al cărui plan este perpendicular pe  $G$ . Fie  $m$  punctul pe indicatoare corespunzător punctului  $M$  de pe elice.

Tangenta în  $m$  la indicatoare este perpendiculară pe  $Om$  și  $G$ , deci pe tangentă în  $M$  la elice (paralelă cu  $Om$ ) și generatoarea cilindrului ce trece prin  $M$ . Așa dar, normala principală la elice, care e paralelă cu tangentă  $mt$  în  $m$  la indicatoare, este perpendiculară pe direcția fixă a generatoarelor sau este paralelă cu un plan perpendicular la direcția generatoarelor.

Planul tangent la cilindru în  $M$  fiind determinat de generatoarea ce trece prin  $M$  și tangentă în  $M$  la elice, se vede că normala principală la elice este perpendiculară pe acest plan, deci se confundă cu normala în  $M$  la cilindru.

2º Binormala în  $M$  la elice fiind perpendiculară pe tangentă în  $M$  și normală principală, este situată în planul tangent în  $M$  la cilindru și fiind perpendiculară pe tangentă  $MT$ , face un unghi constant cu generatoarea ce trece prin  $M$ . Deci,

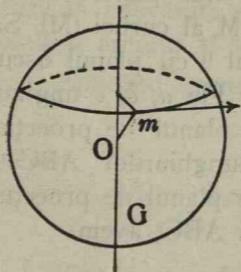


Fig. 99.

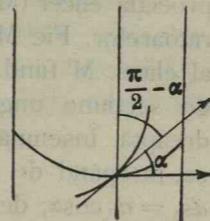


Fig. 98.

*binormala la elice face un unghi constant cu direcția generatoarelor.*

*Planul rectifiant la elice în M, format de tangentă și binormală, se confundă cu planul tangent la cilindru în M.*

3º Fie  $(M_1)$  secțiunea dreaptă a cilindrului, cu alte cuvinte, proiecția elicei ( $M$ ) pe un plan perpendicular pe direcția generatoarelor. Fie  $M_1M'_1$  arcul care reprezintă proiecția arcului  $MM'$  al elicei.  $M'$  fiind infinit vecin de  $M$ , coarda  $MM'$  face cu planul de secțiune unghiul  $\alpha$ , ce-l face tangenta în  $M$  cu secțiunea dreaptă. Însemnând cu  $s$  și  $s_1$  arcele socoite pe elice și proiecția sa, începând de la două puncte  $A$  și  $A_1$ , avem  $M_1M'_1 \leftarrow MM' \cos \alpha$ ,  $ds_1 = ds \cos \alpha$ , de unde, integrând,

(25)

$$s_1 = s \cos \alpha.$$

Deci, un arc oarecare al elicei este proporțional cu proiecția sa pe un plan perpendicular pe direcția generatoarelor.

4º Curbura și torsionea elicei. Să considerăm, în general, pe o curbă ( $M$ ), triunghiul  $ABC$  format de trei puncte infinit vecine, având toate aceeași limită punctul  $M$  al curbei ( $M$ ). Să proiectăm figura pe un plan ce face unghiul  $\theta$  cu planul osculator în  $M$  și cu tangentă în  $M$  unghiul  $\varphi$ . Fie  $a, b, c$  unghiiurile făcute de laturile triunghiului  $ABC$  cu planul de proiecție,  $R$  și  $R_1$  razele cercurilor circumscrise triunghiurilor  $ABC$  și proiecții sale.  $\lambda$  unghiul planului  $ABC$  cu planul de proiecție. Însemnând cu  $A_1B_1C_1$  proiecția triunghiului  $ABC$ , avem

$$\text{aria } A_1B_1C_1 = \text{aria } ABC \cos \lambda.$$

Dar,

$$\text{aria } ABC = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}, \quad \text{aria } A_1B_1C_1 = \frac{A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1}{4R_1}.$$

Deci, relația precedentă devine

$$\frac{A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1}{R_1} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{R} \cos \lambda.$$

Dar  $A_1B_1 = AB \cos c$ ,  $B_1C_1 = BC \cos b$ ,  $C_1A_1 = CA \cos a$ ; deci relația de mai sus devine

$$\frac{\cos \lambda}{R} = \frac{\cos a \cos b \cos c}{R_1}.$$

Trecând la limită, se vede că  $a, b, c$  au ca limită comună unghiul  $\varphi$ , iar  $\lambda$  tinde către unghiul  $\theta$ ; deci, însemnând cu  $R$  și  $R_1$  razele de curbură în  $M$  la curba ( $M$ ) și la proiecția sa, avem relația generală

$$(26) \quad \frac{\cos^2\alpha}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1}.$$

În cazul elicei de unghiul  $\alpha$ , să luăm ca plan de proiecție planul secțiunii drepte. Planul osculator în M este format de tangentă în M și de normala principală (care e normală la cilindru în M); acest plan face cu planul de proiecție unghiul  $\alpha$ , deci în cazul nostru,  $\lambda = \alpha$ . Unghiul format de tangentă MT în M la elice cu planul de proiecție este tot  $\alpha$ . Deci relația (26) devine

$$(27) \quad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1},$$

de unde deducem *raza de curbură R la elice în M*,  $R_1$  fiind raza de curbură a secțiunii drepte în M.

Pentru a afla valoarea *razei de torsiune*, să observăm că normalele principale în două puncte infinit vecine M și  $M'$  fiind paralele cu planul secțiunii drepte, unghiul lor  $d\omega$  se proiectează în adevărata mărime pe acest plan și măsoară curbura totală a arcului  $M_1M'_1$ , proiecția arcului  $MM'$ .

Aplicând formula (16), No. 58,

$$d\omega^2 = d\sigma^2 + dt^2,$$

avem

$$\frac{ds_1^2}{R_1^2} = \frac{ds^2}{R^2} + \frac{dt^2}{T^2}, \quad \frac{ds_1^2}{R_1^2} = ds^2 \left( \frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} \right).$$

Tinând seamă de relațiunile (25) și (27), și înlocuind pe  $ds$  și  $R$ , avem

$$\frac{\cos^2\alpha}{R_1^2} = \frac{\cos^4\alpha}{R_1^2} + \frac{1}{T^2},$$

de unde

$$(28) \quad \frac{1}{T} = \left| \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{R_1} \right|.$$

De aci urmează că *raza de curbură și raza de torsiune a elicei în M sunt și una și alta proporționale cu curbura secțiunii drepte*; apoi, *raportul dintre razele de curbură și torsiunea în M la elice este constant*, egal cu  $|\operatorname{tg}\alpha|$ .

5º Reciproc, să presupunem că raportul curburei către torsione are o valoare constantă dealungul unei curbe (M). Dar, am văzut [No. 58, formula (14)] că raza de curbură sferică a indicatoarei tangentelor este dată de raportul dintre razele de curbură R și torsione T; deci este constantă. Însă, raza de

curbură sferică fiind constantă, urmează (No. 50) că această indicatoare a tangentelor este un cerc și deci curba (M) este o elice. De aci rezultă următoarea proprietate datorită lui Bertrand, anume, *orice curbă a cărei curbură și torsiune sunt într-un raport constant este elice.*

6º Raza  $r$  a sferei osculatoare e dată de (No. 59)

$$(29) \quad r^2 = R^2 + T^2 \left( \frac{dR}{ds} \right)^2.$$

Dar

$$R = \frac{R_1}{\cos^2 \alpha},$$

deci

$$\frac{dR}{ds} = \frac{dR_1}{ds} \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{dR_1}{ds_1} \frac{ds_1}{ds} \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Însă, din (25),  $ds_1 = ds \cos \alpha$ ; deci

$$(30) \quad \frac{dR}{ds} = \frac{dR_1}{ds_1} \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Fie  $\mu_1$  centrul de curbură al curbei  $(M_1)$  proiecția curbei (M); avem  $R_1 = M_1 \mu_1$ , iar curba  $(\mu_1)$  este desfășurată curbei  $(M_1)$ . Unghiul de contingencă în  $\mu_1$  la curba  $(\mu_1)$  este același ca unghiul de contingencă  $d\omega_1$  în  $M_1$  la curba  $(M_1)$ , căci tangentele în  $M_1$  și  $\mu_1$  sunt perpendiculare. Deci, însemnând cu  $R_2$  raza de curbură în  $\mu_1$  la curba  $(\mu_1)$ , avem

$$R_2 = \frac{d(\mu_1)}{d\omega_1},$$

și cum, după proprietatea desfășurărilor,  $dR_1 = d(\mu_1)$ , avem

$$R_2 = \frac{dR_1}{d\omega_1}.$$

De asemenea,

$$R_1 = \frac{ds_1}{d\omega_1}.$$

Deci

$$\frac{dR_1}{ds_1} = \frac{dR_1}{d\omega_1} \frac{1}{\frac{ds_1}{d\omega_1}} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Formula (30) devine

$$\frac{dR}{ds} = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\cos \alpha},$$

iar, din (29), avem

$$r^2 = R^2 + T^2 \frac{R_1^2}{R_1^2 \cos^2 \alpha}.$$

Inlocuind pe  $R$  și  $T$  cu valorile lor, (27), (28),

$$R = \frac{R_1}{\cos^2 \alpha}, \quad T = \frac{R_1}{\sin \alpha \cos \alpha},$$

avem

$$r^2 = \frac{R_1^2}{\cos^4 \alpha} + \frac{R_1^2}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \frac{R_1^2}{R_1^2 \cos^2 \alpha},$$

$$(31) \quad r^2 = \frac{1}{\cos^4 \alpha} \left( R_1^2 + \frac{R_1^2}{\sin^2 \alpha} \right).$$

Aveam deci expresia razei sferei osculatoare în funcție de raza de curbură  $R_1$  a secțiunii drepte și a razei de curbură  $R_2$  a desfășurării acestei secțiuni drepte.

*7º Elicea circulară.* Când cilindrul pe care e trasă elicea este de rotație, elicea se zice circulară. În acest caz, secțiunea dreaptă este un cerc cu centrul  $O$  pe axa cilindrului; *normala principală a elicei* este îndreptată după normala la acest cerc, deci întâlnescă axa cilindrului.

Reciproc, dacă normalele principale la o curbă strâmbă întâlnesc toate, sub un unghi drept, o dreaptă fixă, curba este o elice circulară.

În acest caz, raza de curbură a secțiunii drepte este constantă și egală cu raza cilindrului. Deci, *razele de curbură și torsione ale elicei circulare sunt constante*.

Reciproc, dacă curbura și torsionea unei curbe cu dublă curbă sunt constante, raportul lor este constant, curba este elice. Dar, din (27), rezultă că  $R_1$  este constant, deci secțiunea dreaptă are raza de curbură constantă, este un cerc, elicea este trasă pe un cilindru de rotație. De unde rezultă proprietatea lui Puiseux, *orice curbă cu dublă curbă, ale cărei curbă și torsione sunt constante, este o elice circulară*.

În cazul elicei circulare, secțiunea dreaptă este un cerc, desfășurata secțiunei drepte este centrul acestui cerc, iar raza de curbură  $R_2$  a acestei desfășurate este zero. Deci formula (31) devine

$$r^2 = \frac{R_1^2}{\cos^4 \alpha}, \quad r = \frac{R_1}{\cos^2 \alpha},$$

ceea ce probează că raza  $r$  a sferei osculatoare în  $M$  la elice

este egală cu raza  $R$  a cercului osculator în  $M$ . Deci, la elicea circulară, centrul sferei osculatoare coincide cu centrul cercului osculator.

Elicea circulară se bucură încă de o proprietate interesantă. Însemnând cu  $M_0$  un punct al elicei aşezat pe generatoarea de origină a cilindrului de rotație (Fig. 100) și cu  $M$  un punct oarecare al elicei, fie  $m$  intersecția cercului de secțiune dreaptă ce trece prin  $M_0$  cu generatoarea lui  $M$ .

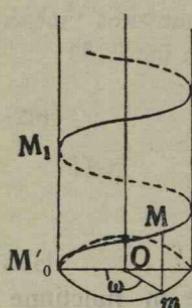


Fig. 100.

Să notăm cu  $\omega$  unghiul  $M_0Om$ . Tânăr cilindrul dealungul generatoarei lui  $M_0$  și desfășurându-l pe un plan, arcul  $M_0M$  devine o dreaptă  $M_0M'$  (Fig. 101) ce face unghiul  $\alpha$  cu dreapta ce reprezintă desfășurarea secțiunii drepte. Arcul  $M_0m$  se transformă în dreaptă  $M_0m'$ , astfel că

$$M_0m' = \text{arc } M_0M = r\omega,$$

$r$  fiind raza cilindrului (cercului de secțiune dreaptă). De asemenea (Fig. 100), (Fig. 101),

$$Mm = M'm' = M_0M'\tan\alpha = r\omega\tan\alpha = h\omega, \quad h = r\tan\alpha,$$

$h$  zicându-se pasul redus al elicei.

Deci, se obține un punct al elicei, rotind raza  $OM_0$  a cercului secțiunei drepte de un unghi  $\omega$ , până ajunge în poziția  $Om$ , apoi dând o translație punctului  $m$ , paralelă cu axa cilindrului, egală cu  $h\omega$  (proporțională cu unghiul  $\omega$ ).

Această proprietate fundamentală poate servi ca definiție a elicei circulare, iar mișcarea, în felul descris, a punctului  $M$  pe elice, se zice *mișcare elicoidală*.

Presupunând că  $m$  a făcut ocolul complet pe cercul  $O$ , punctul  $M$  ajunge în  $M_1$  pe generatoarea lui  $M_0$  (Fig. 100), astfel că  $\omega = 2\pi$  și deci

$$M_0M_1 = r \cdot 2\pi \cdot \tan\alpha = H;$$

$H$  se zice *pasul elicei*. Se vede că pasul redus este egal cu

$$h = r \tan\alpha = \frac{H}{2\pi}.$$

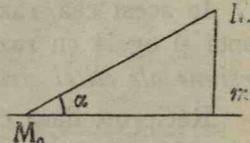


Fig. 101.

**64. Ordinul de contact a două curbe strâmbă.** Se zice că două linii cu dublă curbură ( $C$ ) și ( $C_1$ ) au, în punctul dat

M, un contact de ordinul  $n$ , când, făcând să varieze infinit de puțin curba  $(C_1)$ , de ex., se poate face ca ele să aibă, afară de punctul M,  $n$  alte puncte comune  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , infinit vecine de M. Pentru aceasta, trebuie ca curbele  $(C_1)$  și  $(C)$  să îndeplinească în punctul M anumite condiții pe care le vom determina. Fie  $(C'_1)$  curba care rezultă din deformarea lui  $(C_1)$ ; să presupunem că  $(C'_1)$  revine, după o deformare egală și contrară, să coincidă cu  $(C_1)$ . Atunci punctele  $M_1, M_2, \dots, M_n$  se vor deplasa pe curba  $(C)$ , apropiindu-se indefinitely de M. Dacă  $n=1$ , secanta  $MM_1$  devine, la limită, tangentă comună curbelor  $(C)$  și  $(C_1)$ ; cele două linii date  $(C)$  și  $(C_1)$  trebuie să fie tangente în M, care este condiția *contactului de ordinul întâi*.

Pentru  $n=2$ , cercul circumscris triunghiului  $MM_1M_2$  va avea ca limită, când  $(C'_1)$  va redeveni curba  $(C_1)$ , un cerc osculator de odată la cele două curbe; acestea vor trebui să aibă, în punctul M, aceeași tangentă, aceeași direcție a normalei principale, aceeași rază de curbură. Acestea sunt condițiile unui *contact de ordinul al doilea*.

Când  $n=3$ , sfera circumscrisă tetraedrului  $MM_1M_2M_3$  va avea ca limită, în aceleași condiții, o sferă care va fi osculatoare deodată curbelor  $(C)$  și  $(C_1)$ ; distanța centrului acestei sfere la centrul de curbură, a cărui valoare este (No. 59)

$T \frac{dR}{ds}$ , va avea aceeași valoare pentru cele două linii date. Dar, este evident, că, în acest caz, curbele  $(C)$  și  $(C_1)$  vor avea în punctul  $M_1$ , infinit vecin de M, un contact de ordinul al doilea, și după cele ce am văzut mai sus, cele două raze de curbură în  $M_1$  trebuie să aibă aceeași valoare. Însă  $R + dR = R_1 + dR_1$ , deci neglijând infinitii mici de ordin superior, avem

$$R + MM_1 \frac{dR}{ds} = R_1 + MM_1 \frac{dR_1}{ds_1}.$$

Tinând seamă că  $R = R_1$ , urmează  $\frac{dR}{ds} = \frac{dR_1}{ds_1}$ . Deci, condițiile pentru un contact de ordinul al treilea sunt să aibă aceleași tangente, aceleași normale principale și

$$R = R_1, \quad \frac{dR}{ds} = \frac{dR_1}{ds_1}, \quad T = T_1.$$

În general, dacă avem un contact de ordinul  $n$  în M, adică curbele  $(C)$  și  $(C_1)$  au comune punctele  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , în-

finit vecine de  $M$ , ele au în comun  $(n-1)$  puncte comune infinit vecine de  $M_1$ , deci curbele au în  $M_1$  un contact de ordinul  $(n-1)$ . Vom avea, deci, condițiile căutate, derivând în raport cu arcul condițiile obținute pentru contactul de ordinul  $(n-1)$ .

Urmează, deci, că, pentru a două curbe cu dublă curbură să aibă într-un punct dat un contact de ordinul  $n$ , trebuie: 1º Să aibă aceeaș tangentă și aceeaș normală principală; 2º Curbura și cele dintâi  $(n-2)$  derivate în raport cu arcul să fie egale pentru cele două curbe; 3º Torsiunea și cele dintâi  $(n-3)$  derivate ale sale în raport cu arcul să fie egale pentru cele două curbe.

*Observare.* După cum în plan am considerat, în fiecare punct al unei curbe, *cercul osculator*, care să aibă aceeaș tangentă și curbură ca și curba considerată, se poate, analog, să ne închipuim, în fiecare punct al unei curbe strâmbă, *elicea circulară*, care să aibă acelaș triedru principal, aceeaș curbură, aceeaș torsion. Pentru a defini această elice tangentă în  $M$  la  $MT$ , va fi de ajuns a cunoaște: 1) unghiul  $\alpha$ , pe care, în planul rectifiant în  $M$ , îl face generatoarea cilindrului, pe care este trăsă elicea, cu binormală; 2) raza  $R_1$  a cilindrului tangent la acest plan rectifiant dealungul generatoarei. În adevăr, din (27) și (28), avem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{T}, \quad R_1 = \frac{R \cdot T^2}{R^2 + T^2}.$$

Această elice s-ar putea numi *elicea de curbă și de torsion*, iar nu elicea osculatoare, cum este uneori necorect numită, căci o curbă este osculatoare la altă curbă dată, când are un contact de ordinul cel mai mare compatibil cu gradul său de determinare, adică, în cazul de față, un contact de ordinul al treilea și nu de ordinul al doilea cum este în cazul elicei mai sus considerată. Pentru elicea osculatoare, pe lângă că trebuie să fie aceleași, pentru curbă și elice, curbura și torsionea, mai trebuie ca și  $\frac{dR}{ds}$  să fie egale pentru cele două curbe.

**65. Ordinul de contact a unei curbe și a unei suprafețe.** Se zice că o curbă ( $C$ ) are cu suprafața ( $S$ ) un contact de ordinal  $n$ , când, după o variație infinit mică a curbei ( $C$ ), noua poziție ( $C'$ ) a acestei curbe tăie suprafața în  $n$  puncte  $M_1, M_2, \dots$

$M_n$ , infinit vecine de  $M$ . Așa fiind, o linie cu dublă curbură are un contact de ordinul al doilea cu planul său osculator (intr'un punct ordinar) și de al treilea ordin cu sfera sa osculatoare. Condițiile generale de contact depind de condițiile în care variază curburile și torsionile liniilor, în număr infinit, pe care le putem face să treacă prin punctul  $M$  pe suprafața ( $S$ ). Aceste condiții se pot obține derivând de  $(n-1)$  ori, în raport cu arcul  $s$  al curbei, pe acelea care exprimă că curba și suprafața au în comun punctul  $M$ .

## NOTIUNI SUMARE ASUPRA SUPRAFEȚELOR RIGLATE. SUPRAFEȚE DESFĂȘURABILE. APLICAȚIE LA STUDIUL CURBELOR STRÂMBE

**66. Determinarea suprafețelor riglate. Ordinul suprafețelor riglate.** Când un punct descrie o curbă ( $C$ ), triedrul format de tangentă, normală principală, binormală, variază de asemenea, astfel că fiecare din muchile acestui triedru nasc câte o suprafață. Cum aceste suprafețe sunt riglate, pentru a stabili relațiunile ce există între aceste suprafețe și curba ( $C$ ), vom face o expunere sumară asupra suprafețelor riglate.

Să considerăm trei curbe ( $C_1$ ), ( $C_2$ ), ( $C_3$ ) și un punct oarecare  $M_1$  pe curba ( $C_1$ ). Conurile cu vârful în  $M_1$  și având ca directoare curbele ( $C_2$ ) și ( $C_3$ ), admit, în general, o generatoare comună  $M_1M_2M_3$ ,  $M_2$  și  $M_3$  fiind puncte pe curbele ( $C_2$ ) și ( $C_3$ ). Cum punctul  $M_1$  a fost ales arbitrar pe curba ( $C_1$ ), rezultă că este o simplă infinitate de drepte  $\Delta$  care să se sprijine pe directoarele ( $C_1$ ), ( $C_2$ ), ( $C_3$ ). Deci, dacă mai punem condiția ca această dreaptă  $\Delta$  să întâlnească încă o directoare, curba ( $C_4$ ), vor fi un număr hotărât de drepte  $\Delta$  care să întâlnească de odată curbele ( $C_1$ ), ( $C_2$ ), ( $C_3$ ), ( $C_4$ ).

Numind condiție simplă faptul că dreapta căutată întâlneste o curbă directoare, rezultă că pentru ca o dreaptă să fie determinată, trebuie patru condiții simple.

Tot o condiție simplă este și faptul că dreapta e tangentă la o suprafață dată, numită *nucleu*.

Așa fiind, dacă o dreaptă  $\Delta$  este supusă numai la trei condiții, adică să întâlnească trei directoare date ( $C_1$ ), ( $C_2$ ), ( $C_3$ ), atunci există o simplă infinitate de drepte  $\Delta$  care nasc o suprafață numită *riglată*. Dreptele  $\Delta$  se zic *generatoarele* suprafeței.

Dacă printr'un punct al spațiului se duc paralele la generatoarele unei suprafete riglate, se obține un *con director* al acestei suprafete. Suprafața trece prin curba de la infinit a acestui con, care poate să fie luată ca una din directoarele acestei suprafete. Dacă conul acesta se reduce la un *plan director*, suprafața conține dreapta de la infinit a acestui plan.

În caz când suprafața are un plan director (generatoarele sunt paralele cu un plan) și are o directoare rectilinie, se zice *conoid*. Conoidul e drept când directoarea rectilinie e perpendiculară pe planul director.

Când cele trei directoare  $(C_1)$ ,  $(C_2)$ ,  $(C_3)$  sunt linii drepte, suprafața este un *iperboloid cu o pânză*, care degeneră într'un *paraboloid iperbolic*, când cele trei directoare sunt paralele cu un plan (un paraboloid iperbolic mai este născut de o generatoare care se sprijină pe două directoare linii drepte și este paralelă cu un plan director).

Amândouă aceste cuadrice riglate au un al doilea sistem de generatoare rectilinii, fiecare din generatoarele unui sistem întâlnind pe aceea ale celuilalt sistem și neîntâlnind nici una din același sistem din care face parte. Se zice *semicuadrice* ansamblul tuturor generatoarelor aparținând la același sistem, iar cele două semicuadrice ale unei aceleași cuadrice riglate se zic *complimentare*.

Cele două semicuadrice ale unui același iperboloïd admit același con director, care, când se aşează vârful său în centrul suprafetei, se confundă cu conul asymptotic. Cele două semicuadrice ale unui paraboloid au planele directoare distincte, dreapta de la infinit a fiecăruiu dintre ele aparținând la semicuadrica complimentară. Când aceste plane directoare sunt perpendiculare unul pe altul, *paraboloidul* se zice *echilater*.

Să presupunem că o suprafață riglată  $(\Sigma)$  are ca directoare trei curbe algebrice  $(C_1)$ ,  $(C_2)$ ,  $(C_3)$ , respectiv de ordinele  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , și care n'au nici un punct comun între ele. Ordinul  $\Delta_{m_1, m_2, m_3}$  al acestei suprafete  $(\Sigma)$ , este numărul de puncte în care o dreaptă oarecare  $D$  întâlnește suprafața  $(\Sigma)$ , sau, mai bine, numărul de drepte care întâlnesc de odată pe  $(C_1)$ ,  $(C_2)$ ,  $(C_3)$  și  $(D)$ . Pentru a obține aceste drepte, se poate, invers, considera suprafața rigată  $\Delta_{m_1, m_2, 1}$  cu directoarele  $(C_1)$ ,  $(C_2)$ ,  $(D)$  și să luăm punctele sale de întâlnire cu curba  $(C_3)$ . Aceasta fiind de ordinul  $m_3$ , acest număr este  $m_3 \Delta_{m_1, m_2, 1}$  și deci, avem egalitatea

$$\Delta_{m_1, m_2, m_3} = m_3 \Delta_{m_1, m_2, 1}.$$

Raționând la fel, avem

$$\Delta_{m_1, m_2, 1} = m_2 \Delta_{m_2, 1, 1}, \quad \Delta_{m_1, 1, 1} = m_1 \Delta_{1, 1, 1}.$$

Cum  $\Delta_{1, 1, 1}$  este ordinul unei suprafete cu trei directoare rectilinii, adică o cuadrică, avem

$$\Delta_{m_1, m_2, m_3} = 2 m_1 m_2 m_3.$$

Să observăm că, prin fiecare punct  $M_1$  al directoarei  $(C_1)$  trec generatoarele comune conurilor cu vârfurile în  $M_1$ , având ca directoare  $(C_2)$  și  $(C_3)$ , adică în total  $m_2 m_3$  generatoare. Punctul  $M_1$  este multiplu de ordinul  $m_2 m_3$  și deci directoarea  $(C_1)$  este o linie a suprafetei de ordinul  $m_2 m_3$  de multiplicitate.

Deci, *suprafața riglată*  $(\Sigma)$ , definită de trei directoare respectiv de ordinele  $m_1, m_2, m_3$ , este de ordinul  $2 m_1 m_2 m_3$ , directoarele fiind pe  $(\Sigma)$  ca linii respectiv de ordinele de multiplicitate  $m_2 m_3, m_3 m_1, m_1 m_2$ .

Să presupunem acum că două directoare,  $(C_2)$  și  $(C_3)$ , de ex., au un punct comun,  $A_{2,3}$ . Se vede că generatoarele conului cu vârful  $A_{2,3}$  și directoarea  $(C_1)$  fac parte din acele drepte care întâlnesc pe  $(C_1), (C_2), (C_3)$  și deci, locul propriu zis, în afara de acest con strein de ordinul  $m_1$ , se compune numai din suprafața  $(\Sigma)$  de ordinul  $2 m_1 m_2 m_3 - m_1$ , pe care directoarea  $(C_1)$  este o linie multiplă de ordinul  $(m_2 m_3 - 1)$  de multiplicitate, fiindcă una din dreptele care satisfac la condițiile arătate, care trec prin fiecare punct  $M_1$  al lui  $(C_1)$ , se găsește pe conul strein cu vârful  $A_{2,3}$ .

În mod analog, se vede că dacă curbele  $(C_1), (C_2)$ , au  $\alpha_{1,2}$  puncte comune,  $(C_2)$  și  $(C_3)$  au  $\alpha_{2,3}$  puncte,  $(C_3)$  și  $(C_1)$  au  $\alpha_{3,1}$  puncte comune, suprafața  $(\Sigma)$  este de ordinul

$$2m_1 m_2 m_3 - (\alpha_{2,3} m_1 + \alpha_{3,1} m_2 + \alpha_{1,2} m_3),$$

liniile  $(C_1), (C_2), (C_3)$  având pe  $(\Sigma)$  ordinele de multiplicitate respectiv egale cu

$$m_2 m_3 - \alpha_{2,3}, \quad m_3 m_1 - \alpha_{3,1}, \quad m_1 m_2 - \alpha_{1,2},$$

aceste rezultate fiind găsite de Salmon.

### 67. Proprietățile planului tangent la o suprafață riglată.

1º Vom arăta mai întâi existența planului tangent pentru o suprafață oarecare. Să considerăm trei curbe  $(C_1), (C_2), (C_3)$  trecând prin punctul  $M$  al suprafeței (Fig. 102), situate în întregime pe suprafață. Să lăsăm fixe curbele  $(C_1)$  și  $(C_2)$  și să facem să varieze continuu curba  $(C_3)$ , rămânând mereu pe supra-

față, până ajunge în poziția  $(C'_3)$  și care tăe curbele  $(C_1)$  și  $(C_2)$  în punctele  $M_1$  și  $M_2$ . Să facem printr'o variație, efectuată în sens invers, ca să aducem curba  $(C'_3)$  în poziția inițială  $(C_3)$ , făcând-o să treacă prin aceeași poziții intermedii. Laturile triunghiului  $M_1M_2M$  fiind mereu în acelaș plan, și cum ele au ca limită, afară de cazuri exceptionale al lui M, tangentele în acest punct la curbele  $(C_1)$ ,  $(C_2)$ ,  $(C_3)$ , urmăză că tangentele în acest punct, la

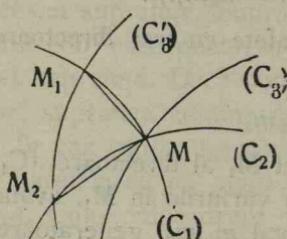


Fig. 102.

trei curbe oarecare trecând prin punctul M sunt așezate în acelaș plan, care este, prin definiție, *planul tangent în M la suprafață*, format de tangentele la curbele  $(C_1)$  și  $(C_2)$  situate pe suprafață și trecând prin punctul M. Un astfel de punct, pentru care tangentele la toate curbele trase pe suprafață și trecând prin M, sunt în acelaș plan, se zice un punct ordinar al suprafetei. Sunt și puncte pentru care aceste tangente nu mai sunt în acelaș plan; un exemplu de punct singular este vârful unui con, unde tangentele la curbele ce trec prin acest punct, adică generatoarele conului, nu sunt în acelaș plan, ci formează chiar conul. Astfel de puncte ale unei suprafete se zic *puncte conice*.

Așa fiind, planul tangent într'un punct ordinar al unei suprafete este format de tangentele la două curbe trase pe suprafață și care trec prin acel punct. Normala la suprafață într'un punct este perpendiculara în acel punct pe planul tangent la suprafață în punctul considerat.

2º Planul tangent într'un punct M al unei suprafete riglate ( $\Sigma$ ) conține generatoarea G a suprafetei și care trece prin punctul M.

Să considerăm acum suprafața născută de o dreaptă mobilă, care are un singur grad de libertate (depinde de un parametru variabil); fie G și  $G'$  două poziții infinit vecine ale acestei generatoare (Fig. 103), M și  $M'$  intersecțiile lor cu un plan (P) perpendicular pe G,  $M'H$  proiecția lui  $G'$  pe acest plan. Să ducem din M o perpendiculară MH pe această proiecție și fie K punctul lui  $G'$  care se proiectează în H. Să ducem prin K o paralelă la HM care tăe pe G în L. Dreapta LK

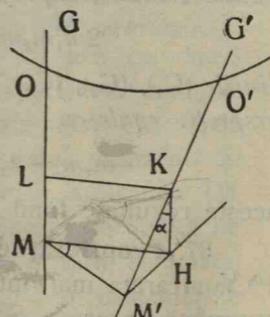


Fig. 103.

este perpendiculara comună la generatoarele  $G$  și  $G'$ . Lungimea  $\delta = LK$  măsoară cea mai scurtă distanță între aceste generatoare care fac între ele unghiul  $M'KH = \alpha$ .

Din triunghiurile dreptunghice  $HMM'$ ,  $M'HK$ , avem

$$M'H = KH \operatorname{tg} \alpha = MH \operatorname{tg} HMM',$$

$$(1) \quad \operatorname{tg} M'MH = \frac{ML}{\delta} \alpha.$$

Luând unghiul  $\alpha$  ca infinit mic principal, să presupunem că distanța  $\delta$  este infinit mic de același ordin; atunci  $\frac{\delta}{\alpha}$  tinde către o limită determinată,  $k$ ; piciorul  $L$  al perpendiculararei comune celor două generatoare  $G$  și  $G'$  tinde către un punct  $O$ , numit *punctul central* al generatoarei  $G$ . Planul  $OLK$  tinde către planul tangent la suprafață în acest punct central, care se zice *planul central* pentru generatoarea  $G$ ; planul  $GMM'$  tinde către planul tangent în  $M$ ; distanța  $ML$  tinde către  $MO$ ; unghiul  $M'MH$  tinde către unghiul  $\varphi$  făcut de planul tangent în  $M$  cu planul central.

Notând cu  $MO = x$ , relația (1) devine

$$(2) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{k}.$$

Această formulă a lui Chasles face să se cunoască distribuția planelor tangente dealungul generatoarei  $G$ .  $k$  se zice *parametru de distribuție* pentru generatoarea  $G$ . Pentru a înlătura orice ambiguitate, parametrul de distribuție va avea semnul + sau -, după cum, când punctul  $M$  se depărtează de  $O$ , într'un sens sau într'altul, planul tangent se învârtește în sensul direct sau retrograd pentru un observator cu capul în  $M$  și picioarele în  $O$ .

3º Relațiunea (2) arată că fiecărui punct al generatoarei  $G$  ii corespunde un plan tangent și invers, la fiecare plan ce trece prin generatoarea  $G$ , ii corespunde un punct de contact a cărui distanță  $x$  de punctul central e dată de relația (2). Deci, există între aceste puncte și aceste plane o corespondență omografică și deci *raportul anarmonic a patru plane tangente în patru puncte ale generatoarei este egal cu acela al celor patru puncte de contact*.

Să considerăm două plane perpendiculare între ele, de unghiiurile  $\varphi_1$  și  $\varphi'_1$ , adică  $\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi'_1 + 1 = 0$ . Avem  $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{x_1}{k}$ ,

$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{x'_1}{k}$ , deci  $x_1 x'_1 + k^2 = 0$ . Însemnând cu  $M_1, M'_1$  punctele de contact corespunzătoare distanțelor  $x_1, x'_1$  de punctul central, relația  $x_1 x'_1 + k^2 = 0$  arată că  $OM_1 \cdot OM'_1 + k^2 = 0$ , adică *diviziunile (punctualele) descrise de punctele  $M_1, M'_1$  sunt în involuție, punctul central al involuției fiind O*, de aceea s'a dat numirea de punct central punctului O.

4º Când punctul M se depărtează nemărginit de O,  $\operatorname{tg}\varphi$  tinde către  $\infty$ , iar  $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Planul tangent în punctul de la infinit al lui G, zis *plan asymptotic*, este deci perpendicular pe planul central. Planul  $G'KH$  (Fig. 103), perpendicular pe  $LK$ , deci pe planul  $GLK$ , rămâne tot timpul perpendicular, chiar când trecem la limită. Acest plan se confundă deci la limită cu planul asymptotic și cum acest plan la limită este paralel cu planul tangent corespunzător la conul director, se vede că *planul asymptotic al unei generatoare este paralel cu planul tangent la conul director dealungul generatoarei corespondente*.

Ducând prin fiecare generatoare un plan perpendicular la fiecare din planele precedente, se vede că *planul central dealungul unei generatoare este paralel cu planul normal la conul director dealungul generatoarei corespondente*.

În particular, dacă suprafața este cu plan director, planele asymptotice ale acestei suprafețe sunt toate paralele și planele centrale sunt perpendicularare la acest plan director.

5º Locul punctelor centrale O ale suprafeței este o curbă care se zice *linia de stricțiune* a suprafeței. Linia de stricțiune nu este ortogonală generatoarele. În adevăr, dacă  $G'$  tinde către G, sau  $G$  către  $G'$ , L în primul caz, K în al doilea, tind, unul pe G, altul pe  $G'$ , către poziții limite aparținând liniei de stricțiune, dar dreapta care unește aceste două poziții limite are o direcție care diferă de aceea a lui  $LK$ , astfel că nu trebuie confundat  $LK$  cu arcul infinit mic al liniei de stricțiune.

**68. Punctul reprezentativ al distribuției planelor tangente.** 1º Adoptând pe generatoarea  $G$  un sens pozitiv indicat de săgeată (Fig. 104), să ridicăm pe această generatoare prin punctul său central O, o perpendiculară  $OI$  egală cu parametrul de distribuție  $k$  și dusă într'un sens astfel ca săgeata ce indică sensul pozitiv al lui  $G$  să tindă să facă să se învârtească brațul de pârghie  $IO$  în sensul direct sau retrograd, după cum  $k$  este pozitiv sau negativ. Se vede că punctul I este astfel că

unghiul MIO, luat cu sensul său, este egal cu acela ce planul tangent în M face cu planul central. Pentru acest motiv, punctul I, considerat întâia oară de Mannheim, a fost numit *punct reprezentativ al distribuției planelor tangente dealungul generatoarei G*.

Rezultă de aici că, *unghiul sub care se vede din I un segment oarecare MM' al lui G face să se cunoască unghiul, cu sensul său, care-l fac între ele planele tangente în M și M'*.

Se vede de aici că, dacă se cunosc planele tangente în trei puncte  $M_1, M_2, M_3$  ale generatoarei G, se poate afla planul tangent într'un punct oarecare al acestei generatoare. În adevăr, să observăm că punctul reprezentativ I este la intersecția segmentelor de cercuri descrise pe  $M_1M_2$  și  $M_2M_3$  și capabile de unghiiurile ce fac între ele, de o parte planele tangente în  $M_1$  și  $M_2$ , de altă parte planele tangente în  $M_2$  și  $M_3$ . Punctul I fiind construit, unind un punct oarecare M al generatoarei cu I, unghiul  $MIM_1$  este unghiul făcut de planul tangent în M cu planul tangent în  $M_1$  și deci se poate construi planul tangent în M, căci este cunoscut planul tangent în  $M_1$  (<sup>1</sup>).

2º Dacă două suprafețe au o generatoare comună G, există pentru ele, pe această generatoare, două *puncte de racordare*, adică puncte unde planul tangent este același și pentru una și pentru cealaltă suprafață. Aceste puncte pot fi reale, confundate sau imaginare. În adevăr, planele tangente dealungul lui G ale uneia din suprafețe pe de o parte, și ale celeilalte suprafețe pe de altă parte, formează două fasciole omografice, care au, după cum se știe, două plane duble.

Pentru a obține aceste plane duble, observăm că, dacă  $N_1$  este unul din aceste puncte de racordare, unghiiurile pe care planul tangent comun în  $N_1$  le face cu planele centrale ale celor două suprafețe fiind date de  $OIN_1$  și  $O'I'N_1$ , atunci unghiul  $IN_1I'$  este egal cu unghiul acestor plane centrale. *Punctele de racordare sunt deci la intersecția generatoarei G cu segmentul capabil de unghiul celor două plane centrale construit pe dreapta ce unește punctele reprezentative I și I'*.

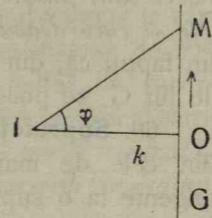


Fig. 104.

(<sup>1</sup>) Pentru determinarea punctului reprezentativ în cazul unei suprafețe strâmbă trecând printr-o direcție dată și circumscrisă la o suprafață (nucleu) dată, dealungul unei curbe date, a se vedea Nota D-lui M. d'Ocagne în *Comptes Rendus de l'Acad. des Sc.*, 1-er semestru 1928, p. 64.

Dacă, în afară de aceste două puncte de racordare pe generatoarea  $G$  mai există un al treilea, toate punctele generatoarei sunt puncte de racordare, cu alte cuvinte cele două suprafețe se racordează dealungul generatoarei  $G$ . Aceasta rezultă din faptul că, din cunoașterea planelor tangente în trei puncte ale lui  $G$ , se poate afla planul tangent în orice punct al lui  $G$ .

### 69. Suprafețe de racordare. Paraboloidul normalelor.

Din cele de mai sus rezultă că, pentru a determina planele tangente la o suprafață riglată  $(\Sigma)$ , dealungul unei generatoare  $G$ , se va putea substitui suprafeței  $(\Sigma)$  o altă suprafață  $(\Sigma')$ , trecând prin  $G$ , cu condiție ca să aibă același plan tangent cu  $(\Sigma)$  în trei puncte ale lui  $G$ .

Se va putea să se ia pentru  $(\Sigma')$  o cuadrică care să fie de racordare cu  $(\Sigma)$  în trei puncte  $M_1, M_2, M_3$  ale lui  $G$ . Va fi deajuns să se ia pentru directoarele lui  $(\Sigma')$ , trei drepte,  $D_1, D_2, D_3$ , trecând prin  $M_1, M_2, M_3$  și situate respectiv în planele tangente la  $(\Sigma)$  în aceste puncte. Dacă aceste drepte  $D_1, D_2, D_3$  sunt obținute la intersecția planelor tangente în  $M_1, M_2, M_3$  cu plane paralele cu un plan  $(\pi)$ , cuadrica de racordare este un paraboloid iperbolic, având planul  $(\pi)$  ca plan director; celalt plan director va fi ( $N.67,4^{\circ}$ ) paralel cu planul asymptotic al lui  $(\Sigma)$  dealungul lui  $G$ .

Dacă planul  $(\pi)$  este perpendicular pe  $G$ , toate generatoarele paraboloidului de racordare dealungul lui  $G$  sunt ortogonale la această generatoare, și cum cele două plane directoare sunt perpendiculare unul pe altul, paraboloidul este echilater.

Să rotim în jurul lui  $G$  de un unghi drept acest paraboloid al tangentelor ortogonale. Fiecare din aceste generatoare, perpendiculară pe  $G$ , va rămâne perpendiculară și după rotoire, mai mult, fiecare generatoare devenind perpendiculară pe poziția primitivă a sa, este perpendiculară pe o a doua dreaptă din planul tangent corespunzător la  $(\Sigma)$ ; ea este deci perpendiculară pe acest plan tangent, adică se confundă cu normala corespunzătoare la  $(\Sigma)$ . Deci, *locul normalelor la o suprafață riglată dealungul uneia din generatoarele sale  $G$  este un paraboloid echilater, al cărui unul din planele directoare este perpendicular pe  $G$ , celalt fiind paralel cu planul central al lui  $G$ .*

Planul tangent în vârful paraboloidului este perpendicular pe direcția axei paraboloidului, care este dată de intersecția

celor două plane directoare, unul perpendicular pe  $G$ , altul confundat cu planul central, amândouă, prin urmare, perpendiculare pe planul asymptotic, aşa că direcția axei paraboloidului este perpendiculară pe planul asymptotic. Planul tangent la vârf va fi deci planul asymptotic. Făcând o rotație inversă de  $90^\circ$ , acest paraboloid al normalelor devine paraboloidul de racordare, planul asymptotic precedent devine planul central al cărui punct de contact este punctul central. Deci, punctul central  $O$  al generatoarei  $G$  este vârful paraboloidului normalelor dealungul generatoarei  $G$ .

**70. Aplicații.** I Se dă planul tangent într-un punct  $M$  al unei generatoare și două din cele trei elemente, punctul central  $O$ , planul central (adică unghiul  $\varphi$ ), parametrul de distribuție  $k$  (adică lungimea  $OI$ , fig. 104); să se găsească al treilea din aceste elemente.

1º Se dă punctul  $M$  și cantitățile  $\varphi$  și  $k$ . Se duce prin punctul  $M$  (Fig. 104) o dreaptă care face cu partea negativă a generatoarei unghiul  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  și se duce o paralelă la generatoare la distanța  $k$  care tăie dreapta construită în punctul  $I$ . Din punctul  $I$  se lasă perpendiculara  $IO$  pe generatoare și astfel găsim punctul central  $O$ .

2º Dacă se dă  $O$  și  $k$ , punctul  $I$  se găsește imediat pe perpendiculara în  $O$  pe generatoare la distanța  $k$ ; unindu-l cu punctul  $M$ , avem unghiul  $OIM = \varphi$ .

3º Dacă se dau  $O$  și  $\varphi$ , se ridică în  $O$  o perpendiculară pe generatoare și se duce prin  $M$  o dreaptă care face cu partea negativă a generatoarei unghiul  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ ; această dreaptă tăie perpendiculara în  $I$ , iar  $IO$  este parametrul de distribuție  $k$ .

II. Se dau planele tangente în două puncte  $M$  și  $M'$  și unul din cele trei elemente, punctul central, planul central, parametrul de distribuție. Să se afle celelalte două elemente.

1º Elementul dat este punctul central  $O$ . Fie  $\alpha$  unghiul (cu semnul său) al planelor tangente în  $M$  și  $M'$  (Fig. 105). Punctul  $I$  este la intersecția perpendiculararei în  $O$  pe generatoare cu segmentul de cerc ce trece prin  $M$  și  $M'$  și capabil de unghiul  $\alpha$ . Sunt două soluții, una sau nici una, după cum cercul tăie, este tangent sau nu tăie perpendiculara în  $O$ .  $OI$  este parametrul de distribuție și unghiul  $MIO$  este unghiul făcut de planul central cu planul tangent în  $M$ .

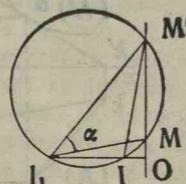


Fig. 105.

2º Dacă se dă planul central, se cunosc unghiiurile  $\varphi$  și  $\varphi'$  pe care planele tangente în  $M$  și  $M'$  (Fig. 106) le face cu planul central. Înănd seamă de sens, se duc prin  $M$  și  $M'$  dreptele ce fac cu generatoarea unghiiurile  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ ,  $\frac{\pi}{2} - \varphi'$ . Punctul lor de întâlnire este punctul reprezentativ,  $I$ , de unde se deduce punctul central  $O$  și parametrul de distribuție,  $IO = k$ .

3º Dacă se dă parametrul de distribuție  $k$ , punctul reprezentativ  $I$

este (Fig. 107) la intersecția paralelei cu generatoarea la distanța  $k$ , cu segmentul de cerc descris pe  $MM'$  capabil de unghiul  $\alpha$  egal cu acela al

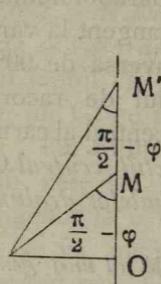


Fig. 106.

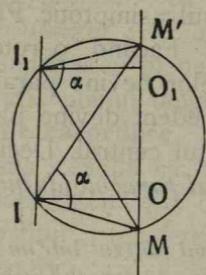


Fig. 107.

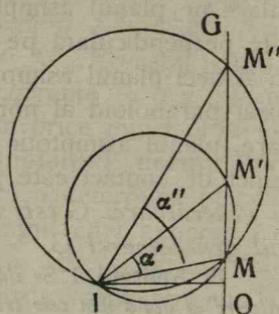


Fig. 108.

planelor tangente în  $M$  și  $M'$ . Odată găsit punctul  $I$ , punctul central  $O$  este piciorul perpendicularei din  $I$  pe generatoare. Sunt două soluții, una, sau nici una.

III. Se dă planele tangente în trei puncte  $M, M', M''$ , să se afle punctul central, planul central și parametrul de distribuție. Să măsurăm unghurile  $\alpha'$  și  $\alpha''$  cu care trebuie să învățăm planul tangent în  $M$  pentru a-l aplica pe planele tangente în  $M'$  și  $M''$ . Punctul reprezentativ  $I$  (Fig. 108) este la intersecția segmentelor de cercuri descrise pe  $MM'$  și  $MM''$  respectiv capabile de unghurile  $\alpha'$  și  $\alpha''$ . În toate cazurile avem o singură soluție. Perpendiculara  $IO$  din  $I$  pe  $G$  ne dă punctul central  $O$ , parametrul de distribuție este  $IO = k$ , iar unghiul  $IOM$  este egal cu cel făcut de planul tangent în  $M$  cu planul central.

IV. Plan tangent la o suprafață riglată cu două curbe directoare

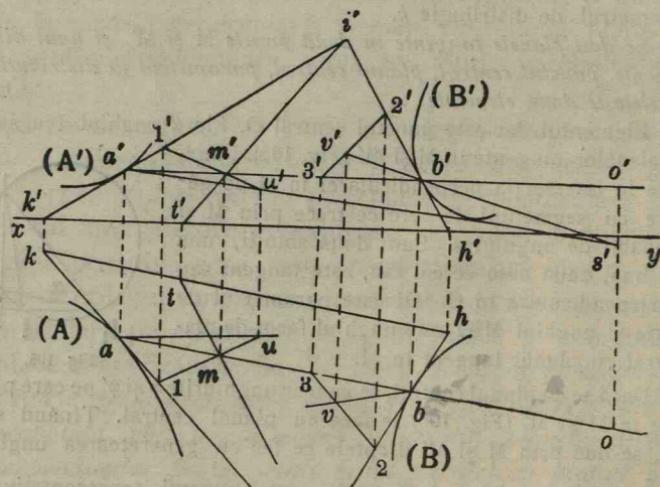


Fig. 109.

și plan director. Să alegem planul orizontal de proiecție paralel cu planul director (Fig. 109) și fie  $(A, A')$ ,  $(B, B')$  cele două curbe directoare. Să

ducem planul tangent în punctul  $(m, m')$  al generatoarei  $(ab, a'b')$ , care este o orizontală ce se sprijină pe curbele directoare. Pentru aceasta, să considerăm paraboloidul de racordare dealungul generatoarei  $(ab, a'b')$ , care are ca plan director un plan orizontal și pentru directoare tangentele în  $(a, a')$ ,  $(b, b')$  la curbele date. Acest paraboloid este de racordare, căci, în punctele  $(a, a')$ ,  $(b, b')$  și punctul de la infinit pe dreapta  $(ab, a'b')$ , are același plan tangent ca și suprafața.

Va trebui să construim planul tangent în  $(m, m')$  la acest paraboloid, care va fi planul tangent căutat. Pentru aceasta, ne servim de faptul că planul tangent la paraboloid într'un punct, este determinat de cele două generatoare de sisteme diferite ce trec prin acel punct. Să găsim deci generatoarea de al doilea sistem ce trece prin  $(m, m')$  și se sprijină pe cele din sistemul întâi. Printre generatoarele sistemului întâi, la fel cu  $(ab, a'b')$ , paralele cu planul orizontal, este și aceea perpendiculară pe planul vertical ce se sprijină pe tangentele în  $(a, a')$ ,  $(b, b')$ , adică o dreaptă perpendiculară pe vertical ce trece prin punctul  $i'$  de intersecție al dreptelor ce reprezintă proiecțiile verticale ale tangentelor în  $(a, a')$ ,  $(b, b')$ . Generatoarele sistemului al doilea întâlnind pe aceasta, de sistemul întâi, proiecția lor verticală trece prin  $i'$ ; generatoarea de sistemul al doilea ce trece prin  $(m, m')$ , este  $m'i'$ , a cărui proiecție orizontală, pe urma orizontală  $kh$  a planului format de tangentele în  $(a, a')$ ,  $(b, b')$ , urmă paraboloidului, este  $(t, t')$ . Generatoarea a două este  $(mt, m't')$ , iar planul tangent în  $(m, m')$  la suprafață este format de  $(ab, a'b')$  și  $(mt, m't')$ .

Punctul central al generatoarei  $(ab, a'b')$  este punctul acestei generatoare, care reprezintă punctul de contact al paraboloidului cu planul tangent la paraboloid trecând prin generatoarea considerată și perpendicular pe planul director, adică pe planul orizontal. Se va duce, deci, prin această generatoare un plan perpendicular pe planul orizontal și se va găsi, cum se știe, punctul său de contact cu paraboloidul, care va fi punctul central al generatoarei.

Aceasta o mai putem face și pe alte cale, în modul următor. Printre parabolozii de racordare cu suprafața dealungul lui  $(ab, a'b')$ , să considerăm pe acela care are ca directoare drepte din planele tangente în  $(a, a')$ ,  $(b, b')$  la suprafață și care sunt frontale. Acest paraboloid are planele de proiecție ca plane directoare, iar directoarele sale sunt frontalele  $(au, a'u')$ ,  $(bv, b'v')$ . Fie  $s'$  punctul unde se tăie proiecțiile lor verticale. Generatoarele din același sistem cu aceste drepte trec în proiecție verticală prin  $s'$ , proiecția verticală a generatoarei de același sistem cu  $(ab, a'b')$ , a paraboloidului și care este perpendiculară pe planul vertical de proiecție. Prin acest punct trece proiecția verticală a unei generatoare frontale, care întâlnind pe  $(ab, a'b')$ , se proiectează orizontal în  $o$  (pe planul orizontal generatoarele se proiectează trecând prin  $o$ ). Planul tangent în  $(o, o')$  este format de  $(ab, a'b')$  și de perpendiculara în  $o$  pe planul orizontal, este deci perpendicular pe orizontal, pe planul director al suprafeței, este planul central al generatoarei, iar  $(o, o')$  este punctul central căutat.

Se mai observă că planul central este perpendicular pe planul orizontal, este un plan tangent al cărui punct de contact este un punct al conturului aparent orizontal. Deci, linia de stricțiune a suprafeței, locul punctelor centrale, se proiectează pe planul orizontal după curba care este

proiecția orizontală a conturului aparent orizontal, adică după curba înfășurătoare a proiecțiilor generatoarelor pe planul orizontal.

Dacă directoarele  $a's$ ,  $b's$  sunt paralele, punctul  $s'$  este aruncat la infinit, punctul central  $o$  este de asemenea la infinit. Sunt, deci, generatoare singulare, pentru care punctul central este la infinit.

Curba de umbră este formată de punctele de contact ale planelor tangente paralele cu o direcție dată, sau un fascicol de raze luminoase, duse, prin fiecare generatoare, fie paralel cu direcția razelor, sau trecând prin punctul ce reprezintă sorginte luminoasă.

V. Suprafață strâmbă cu două curbe directoare și con director. Pentru a construi o generatoare ce trece prin punctul  $(a, a')$  al uneia din curbele directoare, se transportă conul director ca să aibă vârful în  $(a, a')$ ; el este tăiat de celalaltă curbă directoare într'un număr de puncte; dreptele ce unesc aceste puncte cu punctul  $(a, a')$  sunt generatoarele suprafeței. Dacă, pentru una din aceste drepte, se cere planul tangent în  $(m, m')$  (Fig. 110), se întrebunează paraboloidul de racordare care are ca plan director planul tangent la conul director dealungul generatoarei paralelă cu  $(ab, a'b')$  și aceleași plane tangente ca și suprafața în  $(a, a')$ ,  $(b, b')$ .

Să considerăm cazul când *conul director este de rotație*. Să luăm ca plan orizontal (Fig. 110) un plan perpendicular pe axa acestui con. Pentru o generatoare oarecare a suprafeței, planul central fiind perpendicular pe planul tangent la conul director, este paralel cu planul meridian al conului (ce trece prin generatoarea de contact a conului cu planul tangent și prin axa conului), este deci (vertical) perpendicular pe planul orizontal.

Acestea fiind stabilite, se vede că planul central al suprafeței strâmbă pentru generatoarea  $(ab, a'b')$  (Fig. 110), este unul din planele directoare

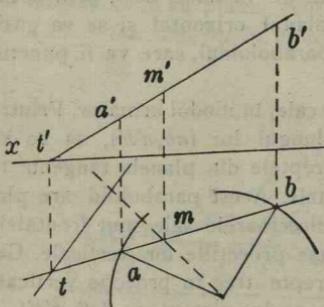


Fig. 110.

ale paraboloidului normalelor la această suprafață pentru generatoarea considerată. Generatoarele acestui paraboloid, care nu sunt paralele cu acest plan central, adică normalele la suprafața strâmbă, se proiecteză atunci orizontal după drepte care trec prin același punct. Se cunoaște planul tangent la suprafață riglată în  $(a, a')$ , unde  $ab$  întâlneste una din directoarele date, și deci normala în acest punct la suprafață; de asemenea, în punctul  $(b, b')$ . Punctul  $c$  de întâlnire al proiecțiilor orizontale ale acestor normale este punctul prin care trec proiec-

tiile orizontale ale normalelor la suprafață riglată pentru diferitele puncte ale generatoarei  $ab$ . Prin urmare, pentru un punct  $(m, m')$ , normala la suprafață se proiecteză orizontal după dreapta  $cm$  și urma orizontală a planului tangent în  $(m, m')$  este perpendiculara coborâtă pe  $cm$  din urma  $t$  a generatoarei  $ab$  pe planul orizontal.

Am văzut că planul central pentru o generatoare este planul proiectant orizontal al acestei generatoare și cum este tangent în punctul central, rezultă că linia de strictiune (locul punctelor centrale) este locul punctelor de contact ale planelor tangente la suprafață perpendiculară pe

planul orizontal, adică linia de stricțiune este curba de contur aparent orizontal.

VI. Suprafață strâmbă cu trei directoare curbe. Pentru generatoarea  $abc$ , care întâlneste directoarele date în  $a, b, c$  (Fig. 111), cunoaștem planele tangente la suprafață în aceste puncte, ele sunt plane determinate de generatoare și tangente la curbele directoare în  $a, b, c$ . Să luăm în aceste plane tangente respectiv dreptele  $A, B, C$  și să considerăm iperboloidul de racordare ce are ca directoare aceste trei drepte. Pentru a determina planul tangent în  $m$  al generatoarei  $abc$ , vom construi planul tangent în  $m$  la iperboloidul de racordare. Pentru aceasta, să ducem două generatoare  $G_1$  și  $G_2$  ale acestui iperboloid, de același gen cu  $abc$  (adică două drepte care să se sprijine pe  $A, B, C$ ). Dreapta ce trece prin  $m$  și se sprijină pe  $G_1$  și  $G_2$ , este generatoarea iperboloidului de același sistem cu  $A, B, C$ . Această dreaptă și generatoarea  $abc$  determină planul tangent la suprafață în  $m$ .

Invers, dacă prin generatoarea  $abc$  se duce un plan oarecare, se obține punctul de contact unde acest plan atinge suprafață riglată, luând punctul de întâlnire al generatoarei  $abc$  cu dreapta după care acest plan tăie iperboloidul de racordare. Această dreaptă de intersecție a planului cu iperboloidul este aceea care unește următoarele puncte  $G_1$  și  $G_2$  pe planul dat, dus prin  $abc$  și avem astfel punctul de contact al acestui plan cu suprafața riglată.

*Exemplu. Bias pâssé.* Această suprafață ce se întâlnește în cursul de Stereotomie, are ca directoare două cercuri egale cu planele paralele și perpendiculară la aceste plane dusă prin mijlocul segmentului de dreaptă cuprins între centrele cercurilor.

Să luăm ca plan vertical de proiecție acel paralel cu planele cercurilor  $C_1$  și  $C_2$  (Fig. 112) și ca plan orizontal un plan perpendicular pe acesta și dus prin linia centrelor cercurilor. Cercurile se proiectează vertical după cercuri egale  $p'_1q'_1, p'_2q'_2$  și orizontal după dreptele paralele cu linia de pământ  $p_1q_1, p_2q_2$ . Directoarea  $D$  are ca proiecție verticală o punctul  $o'$  egal depărtat de centrele cercurilor și ca proiecție orizontală o perpendiculără pe linia de pământ (dreaptă perpendiculară pe verticală și situată în planul orizontal).

Fie  $a'b'c'd'$  proiecția verticală a unei generatoare, proiecțiile orizontale ale acestor puncte fiind  $a, b, c, d$ . Punctul  $(o, o')$  unde aceste generatoare tăie directoarea  $D$  are proiecția orizontală  $o$  egal depărtată de proiecțiile orizontale ale centrelor cercurilor. Proiecția verticală  $a'b'$ , ce trece prin  $o'$ , corespunde la patru drepte ce întâlnesc cele trei directoare date; dar, printre aceste patru, sunt totdeauna două care trec prin același punct  $o$ . Ansamblul acestor două drepte formează un con având ca vârf punctul  $(o, o')$  și ca directoare cercurile date. *Suprafața bias pâssé este aceea născută de celelalte drepte, ca ad și bc.*

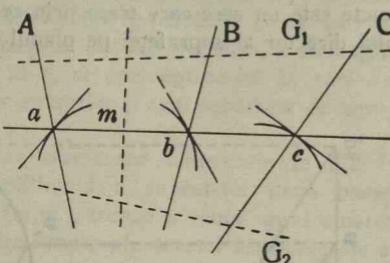


Fig. 111.

Prin punctul  $o$  să ducem  $ol$  paralelă cu  $ad$  și  $bc$ ; punctul  $l$  este mijlocul lui  $bd$ . Proiectând pe  $l$  în  $l'$  pe  $d'b'$ ,  $l'$  este mijlocul lui  $d'b'$ . Pentru o generatoare oarecare a suprafeței, avem un punct  $l'$ . Locul acestor puncte este un cerc care trece prin centrul lui  $C'_1$ , acesta este urma conului director al suprafeței pe planul acestui cerc director.

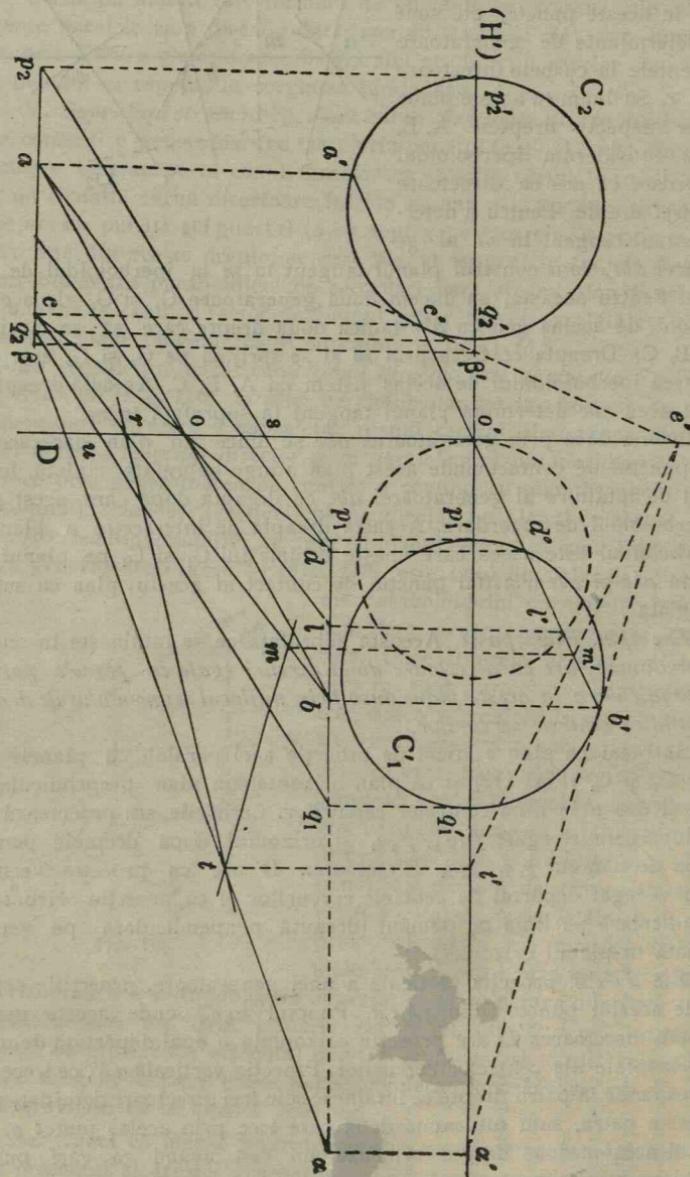


Fig. 112.

Deci, așezând în o vârful conului director, acest con va avea ca urmă pe planele cercurilor  $C'_1$ ,  $C'_2$ , un cerc.

*Plan tangent într'un punct.* Să luăm un punct  $(m, m')$  pe genera-toreala  $(bc, b'c')$ . Vom intrebuința iperboloidul de racordare dealungul ge-neratoarei  $(bc, b'c')$ . Să ducem în punctul  $c'$  o tangentă la  $C'_1$ ; această tangență se proiectează orizontal pe segmentul de dreaptă după care se proiectează cercul. Să ducem și tangenta în  $(b, b')$  la cercul  $C'_1$ . Proiecțiile verticale ale acestor tangente se tăie în  $e'$ , pe prelungirea lui  $D$ , căci  $o'e'$  este perpendiculară pe linia centrelor cercurilor și egal depărtată de aceste cercuri cu raze egale.

Iperboloidul de racordare are ca directoare tangentele în  $b', c'$  la cercurile directoare și directoarea rectilinie  $D$  a suprafeței biais passé. Pentru a construi planul tangent în  $(m, m')$ , trebuie să căută generatoarea acestui iperboloid care întâlnesc două drepte ale acestei suprafețe, de același sistem cu  $bc$ . Să luăm, pentru una din aceste drepte, urma iperboloidului pe planul orizontal  $(H')$ , care conține deja directoarea rectilinie  $D$ ; această urmă se găsește unind urmele  $\alpha, \beta$  pe acest plan ale tangentelor la cercurile directoare, tangente care sunt directoarele iperboloidului.

Perpendiculara în  $e'$  pe planul vertical întâlnesc directoarele iperboloidului proiectate după  $e'c'$ ,  $e'b'$  și dreapta  $D$  cu care este paralelă. Această perpendiculară pe planul vertical este deci de asemenea o dreaptă a iperboloidului de același sistem cu generatoarea ce conține punctul  $m$ . Unind  $e'$  cu  $m'$ , avem proiecția verticală a generatoarei acestui iperboloid și cum urma acestei drepte pe  $(H')$  trebuie să fie pe urma iperboloidului pe același plan, această urmă este în punctul  $t$ , pe  $\alpha\beta$ . Unind  $m$  cu  $t$ , avem proiecția orizontală a dreptei  $e'm'$ . Dreapta  $(mt, m't')$  și generatoarea  $(bc, b'c')$  definesc planul tangent căutat. Urma pe  $(H')$  a acestui plan tangent este dreapta  $rt$ .

Generatoare singulare ale suprafeței sunt cele situate în planul orizontal  $(p_1p_1, p'_1p'_1)$ ,  $(q_2q_2, q'_2q'_2)$ ; ele întâlnesc directoarea rectilinie în  $s$  și  $u$ . Aceste generatoare întâlnesc cercurile directoare în puncte unde planele tangente sunt verticale și confundate. Planul tangent este același dealungul acestor generatoare; este diferit în punctele  $s$  și  $u$  care sunt punctele centrale pe aceste generatoare.

Alte generatoare singulare sunt acelea care se proiectează vertical după drepte duse prin  $o'$ , tangente la proiecțiile verticale ale cercurilor directoare. În punctele unde aceste drepte întâlnesc cercurile directoare, avem, pentru fiecare din aceste drepte, același plan tangent.

*Punctul central* pentru generatoarea  $(bc, b'c')$  este punctul acestei generatoare unde planul tangent în acest punct este perpendicular pe planul tangent la conul director dealungul generatoarei  $(ol, o'l')$  paralelă cu  $(bc, b'c')$ . Planul tangent la conul director este determinat de  $(ol, o'l')$  și tangenta în  $(l, l')$  la cercul  $o'l'$  din planul cercului  $C'_1$ . Se va găsi deci planul ce trece prin  $(bc, b'c')$  și perpendicular pe acest plan, iar urma sa pe planul  $(H')$  trece prin  $r$  și va tăia pe  $\beta\alpha$  în punctul  $\theta$ , a cărui proiecție verticală este  $\theta'$ ;  $\theta'e'$  tăie pe  $b'c'$  în punctul  $\mu'$ , a cărui proiecție orizontală  $\mu$  este pe  $bc$ ;  $(\mu, \mu')$  este punctul central. Locul acestor puncte este linia de strictiune.

**71. Suprafețe desfășurabile.** Fie  $G$  și  $G'$  două genera-toare infinit vecine,  $O$  și  $O'$  punctele centrale corespunzătoare

(Fig. 113),  $LK = \delta$  perpendiculara lor comună,  $\alpha$  unghiul lor. Dacă OF paralelă cu LK și FE perpendiculară pe  $G'$ , se

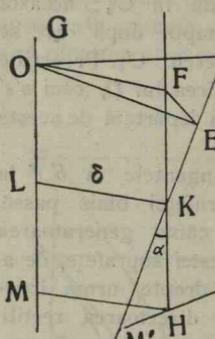


Fig. 113.

vede că OE este perpendiculara din O pe  $G'$ , iar OE este distanța de la O la  $G'$ . Din triunghiul OFE, avem

$$OE = \sqrt{OF^2 + FE^2},$$

$$OE = \sqrt{LK^2 + FK^2 \sin^2 \alpha},$$

$$OE = \sqrt{\delta^2 + OL^2 \sin^2 \alpha} = \delta \sqrt{1 + \left(\frac{OL \sin \alpha}{\delta}\right)^2}.$$

Din triunghiul OO'E, avem

$$OE = OO' \sin OO'E,$$

deci, egalând,

$$(3) \quad \delta \sqrt{1 + \left(\frac{OL \sin \alpha}{\delta}\right)^2} = OO' \sin OO'E.$$

Am văzut că, dacă  $\delta$  și  $\alpha$  sunt infiniti mici de același ordin, însemnând cu  $\varphi$  unghiul format de planul tangent în M cu planul central, avem

$$(4) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{k}, \quad k \rightarrow \lim \frac{\delta}{\alpha}, \quad x = OM.$$

Să presupunem că  $\delta$  este infinit mic față de  $\alpha$ . Atunci suprafața riglată se zice *suprafață desfășurabilă*. Din (3) se vede că  $OL$  și  $\alpha$  fiind infiniti mici, raportul  $\frac{OL \sin \alpha}{\delta}$  poate avea o limită finită, deci, membrul întâi este infinit mic de același ordin cu  $\delta$ ; deci, și membrul al doilea este infinit mic cel puțin de ordinul al doilea. Deci, trebuie sau ca  $OO'$  să fie infinit mic de ordinul al doilea, sau ca unghiul  $OO'E$  să fie infinit mic.

Dacă  $OO'$  este infinit mic superior în raport cu unghiul a două generatoare infinit vecine, înseamnă că O este fix față de aceste două generatoare, adică generatoarele trec prin același punct fix; suprafața ar fi un con.

Lăsând la o parte acest caz particular, să presupunem că  $\cancel{OO'E}$  este infinit mic, adică are ca limită pe 0 (zero). Aceasta însemnează că direcția limită a lui  $OO'$  coincide cu  $G$ ; această generatoare  $G$  este deci tangentă în punctul O la linia de stricțiune. Se poate deci defini o suprafață desfășurabilă ca locul tangentelor la o curbă strâmbă.

Parametrul de distribuție  $k = \lim \frac{\delta}{\alpha} \rightarrow 0$ , deci, din formula

(4) se vede că  $\operatorname{tg}\varphi \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , deci, *planul tangent la o suprafață desfășurabilă în orice punct al unei generatoare este acelaș*. Acest plan e perpendicular pe limita planului determinat de GLK, planul central. Dar, dreapta LK devine la limită binormală la linia de stricțiune (ca fiind perpendiculară pe două tangente infinit vecine, G și G'); deci, planul GLK tinde către planul rectifiant la linia de stricțiune. Așa dar, *planul tangent la suprafață*, care am văzut că îi este perpendicular, este *planul osculator la linia de stricțiune*, care se zice *muchia de întoarcere* (rebroussement).

*Observare.* Am văzut (No. 62) că cea mai scurtă distanță a două tangente infinit vecine a unei linii cu dublă curbură este infinit mic, cel puțin de ordinul al treilea. Deci, dacă o dreaptă se deplasează continuu, cea mai mică distanță dintre două poziții consecutive nu va putea să fie de ordinul al doilea; dacă nu este de ordinul întâi, ea trebuie să fie cel puțin de ordinul al treilea și atunci dreapta rămâne tangentă la o curbă strâmbă. Aceasta este teorema lui Bouquet.

**72. Infășurătoarea unui plan mobil.** Să considerăm un plan variabil, a cărui poziție depinde de un parametru și fie P și P' două poziții infinit vecine ale planului. Voim să arătăm că dacă P' tinde către P, intersecția  $\Delta$  a acestor două plane tinde către o dreaptă G, bine determinată în planul P. În adevară, fie D urma planului mobil P pe un plan fix Q, E urma dreptei  $\Delta$  pe acelaș plan. Când planul P variază, dreapta D infășură o curbă (C), și când P' tinde către P, punctul E tinde către punctul de contact M al dreptei D cu infășurătoarea sa. Urma dreptei  $\Delta$  pe un plan oarecare tinde către un punct limită perfect determinat și deci  $\Delta$  va tinde către o dreaptă determinată G.

Limita G a intersecției  $\Delta$  a planului P și a celui infinit vecin se zice *caracteristica* planului variabil P. Când P variază, dreapta G naște o suprafață riglată. Planul P, conținând, de altfel, tangentă la curba (C) intersecția acestei suprafețe cu planul Q, este tangent în M la această suprafață. Cum această suprafață are acelaș plan tangent în toate punctele generatoarei G (dealtminterlea oarecare), este o suprafață desfășurabilă, este *infășurătoarea planului mobil P*.

Punctul central al caracteristicei G se numește punct de întoarcere, locul acestor puncte, cu alte cuvinte linia de stricție a suprafetei, se zice *muchia de întoarcere* (rebroussement).

Deci, dacă planul mobil rămâne tangent la o curbă (trece prin tangenta la curbă), caracteristica sa trece prin punctul de contact Așa dar, *tangenta într'un punct variabil al unei linii cu dublă curbură coincide cu caracteristica planului osculator.*

**73. Diferite moduri de generare ale suprafeteelor desfășurabile.** Am văzut că, în definiția unei suprafete desfășurabile, se poate dispune de două condiții arbitrarе pe care să le impunem generatoarelor, așa că aceste condiții pot fi, sau ca generatoarele să întâlnescă două curbe (directoare), sau să fie tangente la două suprafete (zise nuclei) date, sau să întâlnescă o curbă dată și să fie tangentă la o suprafață dată, sau, dacă se presupune că această curbă să fie situată pe această suprafață, generatoarele să fie tangente la o suprafață dealungul unei curbe date pe suprafață.

Dacă admitem că planul tangent la o curbă este orice plan ce trece prin tangenta la această curbă, se vede că, în fiecare din aceste cazuri, suprafața desfășurabilă este infășurătoarea planelor tangente comune la cele două elemente directoare (directoare sau nuclei dați) ce au servit să o definească.

Să considerăm cazul când generatoarele întâlnesc două directoare date, curbele (A) și (B). Dacă AB este o generatoare a suprafetei desfășurabile ( $\Sigma$ ) ce trece prin aceste curbe, planele tangente în A și B fiind determinate de AB și tangentele în A și B la curbele (A) și (B), cum aceste plane sunt confundate, urmează că tangentele în A și B trebuie să se întâlnescă într'un punct T. Se obțin deci generatoarele AB ale suprafetei ( $\Sigma$ ), alegând punctele A și B astfel ca tangentele în aceste puncte la curbele (A) și (B) să se întâlnescă. Aceasta se poate face astfel. Să considerăm suprafetele desfășurabile ( $\Sigma'$ ), ( $\Sigma''$ ) născute de tangentele la curbele (A) și (B); fie (T) curba de intersecție a suprafeteelor ( $\Sigma'$ ) și ( $\Sigma''$ ). Dintr-un punct T al acestei curbe, care aparține deodată la desfășurabilele ( $\Sigma'$ ) și ( $\Sigma''$ ), se poate duce o tangentă TA la curba (A) și una TB la curba (B); dreapta AB care unește punctele de contact a acestor tangente este o generatoare a suprafetei ( $\Sigma$ ) desfășurabile căutată. Acest procedeu îl aplicăm cu succes în cazul când curbele (A) și (B) sunt plane, fără să fie în același plan; desfășurabilele ( $\Sigma'$ ) și ( $\Sigma''$ ) sunt planele acestor curbe, iar curba (T) este dreapta de intersecție a acestor plane.

Mai putem obține generatoarea AB și în modul următor. Să considerăm conul cu vârful A și directoare curba (B); prin tangentă în A la curba (A) să ducem la acest con un plan tangent a cărui generatoare de contact tăie curba (B) în punctul B. Tangenta în B la această curbă, conținută în planul tangent la con dealungul lui AB, întâlneste deci tangentă în A prin care acest plan a fost dus; deci AB aparține suprafetei desfășurabile ( $\Sigma$ ).

Fiecare con cu vârful A și directoarea (B) fiind tangent la ( $\Sigma$ ) dealungul lui (AB), această *suprafață desfășurabilă* ( $\Sigma$ ) poate fi considerată ca *infășurătoarea conurilor trecând prin curba* (B), ce aparține *suprafetei* ( $\Sigma$ ) și având ca *vârfuri punctele unei altă curbe* (A) *a lui* ( $\Sigma$ ). În particular, se poate lua ca curbă (B) curbă situată la infinit pe suprafața ( $\Sigma$ ). Fiecare con cu vârful A este atunci un con director al suprafetei. Deci, *orice suprafață desfășurabilă este infășurătoarea conurilor sale directoare având ca vârfuri punctele unei curbe oarecare care aparțin suprafetei*.

**74. Proprietățile liniilor trase pe o suprafață desfășurabilă.** Fie AMM' muchia de întoarcere a suprafetei desfășurabile (Fig. 114). Un punct  $M_1$  al suprafetei este cunoscut, dacă se știe punctul central M al generatoarei ce trece prin  $M_1$ , adică tangentă MM<sub>1</sub> la curba (C), muchia de întoarcere, și vectorul MM<sub>1</sub>. Trebuie deci a cunoaște arcul  $AM = s$ , socotit de la un punct fix A al curbei (C) și valoarea algebrică  $l$  a vectorului MM<sub>1</sub>. Pentru ca  $M_1$  să descrie o curbă (C<sub>1</sub>), trebuie ca  $l$  să fie o funcție dată de arcul  $s$ ,  $l = f(s)$ . Fie  $i$  unghiul subt care curba (C<sub>1</sub>) tăie generatoarea MM<sub>1</sub>. Însemnând cu  $d\sigma$  unghiul de cotinență al muchiei de întoarcere,  $ds_1$  arcul  $M_1M'_1$ , aplicând formula relativă la variația lungimii unui segment rectiliniu, avem

$$(5) \quad dl = -ds + ds_1 \cos i.$$

Din triunghiul  $TM'_1M_1$ , găsim

$$\frac{M_1M'_1}{\sin(d\sigma)} = \frac{TM_1}{\sin TM'_1M_1},$$

deci

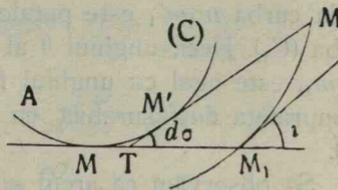


Fig. 114.

$$\begin{aligned} M_1 M'_1 \sin(i - d\sigma) &\leftarrow T M_1 \sin(d\sigma), \\ M_1 M'_1 \sin i &\leftarrow T M_1 d\sigma, \quad M_1 M'_1 \sin i \leftarrow M M_1 d\sigma, \\ (6) \quad d s_1 \sin i &= l d\sigma. \end{aligned}$$

Fie  $mm'$ ,  $m_1 m'_1$  indicatoarele sferice ale tangentelor pentru muchia de întoarcere ( $C$ ) și curba ( $C_1$ ) (Fig. 115). Planul tangent la suprafața desfășurabilă în  $M_1$  fiind definit de tangentă în  $M$  la ( $C$ ) și tangentă în  $M_1$  la ( $C_1$ ), planul cercului mare  $mm_1$  este paralel cu acest plan tangent. Cum acest plan tangent este planul osculator în  $M$  la muchia ( $C$ ), planul cercului mare  $mm_1$  este paralel cu planul osculator în  $M$  la curba ( $C$ ). Deci acest cerc mare  $mm_1$  este

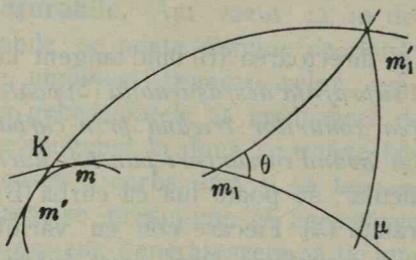


Fig. 115.

găzduit în  $m$  arcului  $mm'$ , căci, și pentru arcul  $mm_1$  și pentru arcul  $mm'$ , sunt confundate în  $m$  punctele indicatoarei corespunzătoare la două tangente infinit vecine la curba ( $C$ ). De asemenea, cercul  $m'm'_1$  este tangent în  $m'$  arcului  $mm'$ .

Planul format de centrul sferei, punctul  $m_1$  și tangentă în  $m_1$  la curba  $m_1 m'_1$  este paralel cu planul osculator în  $M_1$  la curba ( $C_1$ ). Deci, unghiul  $\theta$  al arcelor  $mm_1$  și  $m_1 m'_1$ , în punctul  $m_1$ , este egal cu unghiul format de planul tangent în  $M_1$  la suprafața desfășurabilă cu planul osculator în  $M_1$  la curba ( $C_1$ ).

Să observăm că arcul  $mm_1$  măsoară unghiul  $i$ , unghiul tangentelor în  $M_1$  la curba ( $C_1$ ) și în  $M$  la curba ( $C$ ); deci

$$mm_1 - m'm'_1 = d(mm_1) = di.$$

Să aplicăm proprietatea variații de lungime a arcului de cerc mare  $mm_1$  și anume, variația lungimei unui arc de cerc mare  $mm_1$  este echivalentă cu diferența deplasărilor extremităților  $m$  și  $m_1$ , proiectate pe direcția arcului  $mm_1$ . Însemnând cu  $\theta$  unghiul arcelor  $mm_1$  și  $m_1 m'_1$ , cu  $d\sigma \leftarrow$  arc  $mm'$ ,  $d\sigma_1 \leftarrow$  arc  $m_1 m'_1$ , unghiurile de contingență ale curbelor ( $C$ ) și ( $C_1$ ), se vede că  $m$  se deplasează pe  $mm_1$ , deci deplasarea extremității  $m$  face unghiul zero cu direcția  $mm_1$ , iar deplasarea extremității  $m_1$ , adică  $m_1 m'_1$ , face unghiul  $\theta$  cu  $mm_1$ ; deci

$$(7) \quad di = d\sigma_1 \cos \theta - d\sigma.$$

Relațiunile (5) și (6) se pot scrie

$$\frac{ds_1}{ds} \cos i = \frac{dl}{ds} + 1, \quad \frac{ds_1}{ds} \sin i = l \frac{d\sigma}{ds},$$

sau

$$(8) \quad \frac{ds_1}{ds} \cos i = f'(s) + 1, \quad \frac{ds_1}{ds} \sin i = \frac{l}{R},$$

$R$  fiind raza de curbură în  $M$  la  $(C)$ .

Ridicând la patrat și adunând, avem

$$\left( \frac{ds_1}{ds} \right)^2 = \left[ f'(s) + 1 \right]^2 + \frac{l^2}{R^2},$$

de unde

$$(9) \quad \frac{ds_1}{ds} = \sqrt{\left[ f'(s) + 1 \right]^2 + \frac{l^2}{R^2}}.$$

Din (8) deducem

$$\cot g i = \frac{f'(s) + 1}{\left( \frac{l}{R} \right)},$$

$$(10) \quad \cot g i = \frac{R}{f'(s)} \left[ 1 + f'(s) \right].$$

Din (7) avem

$$d\sigma_1 \cos \theta = di + d\sigma, \quad \frac{d\sigma_1}{ds_1} \cos \theta = \left( \frac{di}{ds} + \frac{d\sigma}{ds} \right) \frac{ds}{ds_1},$$

$$(11) \quad \frac{\cos \theta}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{\left[ f'(s) + 1 \right]^2 + \frac{l^2}{R^2}}} \left( \frac{di}{ds} + \frac{1}{R} \right),$$

$R_1$  fiind raza de curbură în  $M_1$  la  $(C_1)$ .

Fie  $K$  punctul de intersecție ale cercurilor mai mari  $mm_1$ ,  $m'm'_1$ , (Fig. 115). Să descriem din punctul  $K$  ca pol, pe sferă de centru  $O$  și raza 1, un arc de cerc mic,  $m'_1\mu$ . Fie  $H$  intersecția diametrului  $HO$  al sterei (Fig. 116) cu planul dus prin  $m'_1\mu$  perpendicular pe  $KO$ . Arcul  $\mu m'_1$  face parte din cercul cu centrul  $H$  și raza  $Hm'_1$ . În triunghiul  $OHm'_1$  (Fig. 116), unghiul  $HOM'_1$  este măsurat de arcul  $Km'_1$ , care, afară de infiniti mici de ordin superior, este echivalent cu arcul de cerc mare  $m'm'_1$  (Fig. 115), adică  $i$ . Deci, din triunghiul dreptunghic  $HOM'_1$ , avem  $Hm'_1 \perp Om'_1$  și  $\sin i = \sin Hm'_1$ . Lungimea arcului  $m'_1\mu$  în cercul cu centru  $H$  și raza  $Hm'_1$  este  $\sin i$  (Fig. 116), este arc  $m'_1\mu = Hm'_1 \not\propto m'_1 H\mu$ . Dar, unghiul  $m'_1 H\mu$  măsoară unghiul planelor

$OKm'_1, OK\mu$ , adică unghiul planelor cercurilor mari  $m'm'_1, mm_1$  (Fig. 115); cum aceste plane sunt paralele cu planele osculatoare în  $M'$  și  $M$  la muchia ( $C$ ), urmează că unghiul lor,  $m'_1H\mu$ , este egal cu unghiul de torsiune  $d\tau$ . Deci, arcul  $m'_1\mu = d\tau$  sini.

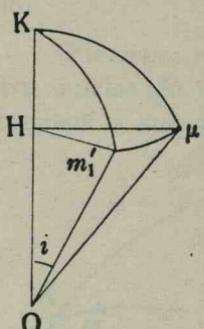


Fig. 116.

În triunghiul dreptunghic  $m_1m'_1\mu$  (Fig. 115), avem

$$m'_1\mu = m'_1m_1 \sin \theta \quad d\tau \sin i = d\sigma_1 \sin \theta.$$

De unde

$$\frac{d\tau}{ds} \sin i = \frac{d\sigma_1}{ds_1} \frac{ds_1}{ds} \sin \theta,$$

$$(12) \quad \frac{1}{T} \sin i = \frac{1}{R_1} \sqrt{\left[ f'(s) + 1 \right]^2 + \frac{l^2}{R^2}} \sin \theta.$$

Formulele (9), (10), (11), (12) ne dau toate proprietățile curbei ( $C_1$ ) trasă pe suprafața desfășurabilă considerată.

*Observare.* Să proiectăm figura pe planul tangent la suprafața desfășurabilă în  $M_1$ . Acest plan este planul osculator în  $M$  la muche și este reprezentat pe sferă cu planul cercului mare  $mm_1$ . Planul osculator în  $M_1$  la curba ( $C_1$ ) este reprezentat pe sferă de  $Om_1$  și tangenta în  $M_1$  la arcul  $m_1m'_1$ , deci unghiul  $\theta$  este unghiul format de planul osculator în  $M_1$  la ( $C_1$ ) cu planul tangent în  $M_1$  la suprafață.

Acest plan tangent trecând prin tangentă în  $M_1$  la curba ( $C_1$ ), face cu această tangentă unghiul zero. Deci, proiectând curba ( $C_1$ ) pe planul tangent în  $M_1$  la suprafață, însemnând cu  $\rho_1$  raza de curbură a proiecției și aplicând formula (26) de la No. 63, avem

$$\frac{\cos \theta}{R_1} = \frac{1}{\rho_1}.$$

Deci,  $\frac{\cos \theta}{R_1}$  este curbura proiecției curbei ( $C_1$ ) pe planul tangent în  $M_1$  la suprafața desfășurabilă. Din aceasta cauză i se dă numele de *curbură tangențială* a curbei ( $C_1$ ) în  $M_1$ . Aceasta se mai numește și *curbura geodezică*.

**75. Desfășurarea suprafeței desfășurabile.** Să considerăm mai întâi o curbă plană ( $c$ ) a cărei curbură este o funcție dată  $F(s)$  de arcul  $s$  al curbei. Însemnând cu  $\alpha$  unghiul ce face cu  $OX$  tangentă la curba ( $c$ ) și la extremitatea arcului  $s$  al

curbei, curbura e dată de  $\frac{d\alpha}{ds}$ ; deci  $\frac{d\alpha}{ds} = F(s)$ . Întregând, avem

$$\alpha = \alpha_0 + f(s),$$

$\alpha_0$  fiind o constantă. Din relațiile  $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$ ,  $\frac{dy}{ds} = \sin\alpha$ , integrând, obținem

$$x = x_0 + \varphi(s), \quad y = y_0 + \psi(s).$$

De aici rezultă că funcțiunii  $F(s)$  date, îi corespunde o singură curbă  $(c)$ , căci constantele  $x_0, y_0, \alpha_0$ , care caracterizează fiecare soluție particulară, servesc pentru a fixa în plan poziția curbei  $(c)$  și nu au nici o influență asupra formei și dimensiunilor curbei.

Deci, se poate construi numai o curbă plană și una singură pentru care curbura să fie funcția dată de arc.

Așa fiind, să considerăm suprafața  $(S)$ , locul tangentelor la o curbă  $(C)$ . Însemnând cu  $s$  arcul curbei  $(C)$ , socotit de la originea fixă  $A$ , curbura la extremitatea  $M$  a arcului  $s$  este o funcție dată a acestui arc.

Conform proprietății precedente, putem construi în planul  $P$  (Fig. 117) o linie  $(c)$ , a cărei curbură să fie definită de aceeași lege ca și pentru curba  $(C)$ . Curbele  $(c)$  și  $(C)$  se corespund punct cu punct, astfel că curburile în două puncte corespunzătoare sunt egale ca și lungimile arcelor corespunzătoare. Fie  $M_1$  un punct oarecare al supra-

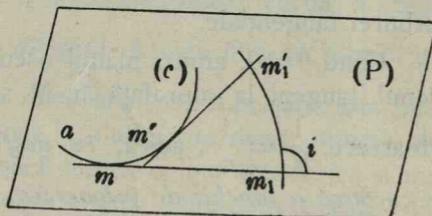


Fig. 117.

feței  $(S)$  (Fig. 114),  $M$  punctul corespunzător al muchiei de întoarcere,  $m$  punctul pe  $(c)$  (Fig. 117) omologul lui  $M$ . Să luăm ca omolog al punctului  $M_1$  al suprafaței punctul  $m_1$  al planului, obținut luând pe tangentă în  $m$  la curba  $(c)$  un vector  $mm'$  egal în mărime și în semn în vectorul  $MM_1 = l$ . Suprafața și planul se corespund atunci punct cu punct, astfel că cantitățile  $s$ ,  $\frac{1}{R}$ ,  $l$  au aceleași valori pe suprafață și pe plan pentru două puncte omoloage. Din relațiile (9), (10), (11), unde figurează numai aceste cantități și derivatele lor în raport cu arcul  $s$ , se deduce pentru curbele  $(c)$  și  $(C)$  aceleași valori pentru  $\frac{ds_1}{ds}$ ,  $\operatorname{tg} i$ ,  $\frac{\cos\theta}{R_1}$ .

De aici rezultă, 1) că această transformare conservă lungimile de arc; 2) de asemenea, se conservă și unghiiurile, căci dacă două curbe care se tăie în  $M_1$  pe suprafață formează unghiurile  $i$  și  $j$  cu generatoarea ce trece prin  $M_1$ , curbelor omoloage care se tăie în  $m_1$ , formează cu transformata acestei generatoare aceleași unghiiuri  $i$  și  $j$ ; diferența ( $i - j$ ) este aceeași în plan și pe suprafață, și deci două linii ale suprafeței se tăie subt același unghi ca și liniile omoloage din plan.

Această proprietate rezultă de altfel din precedenta, căci este evident că orice transformare a unei suprafețe care conservă arcele, conservă și unghiiurile.

3) Această transformare conservă și curbura tangențială  $\frac{\cos\theta}{R_1}$ . Planul osculator în cazul unei curbe plane confundându-se cu planul curbei,  $\cos\theta$  devine egal cu 1 și curbura tangențială este chiar curbura proprie; însemnând cu  $r_1$  raza de curbură a curbei transformate, avem

$$(13) \quad \frac{\cos\theta}{R_1} = \frac{1}{r_1},$$

de unde numele de *curbură de desfășurare* care se mai dă curburei tangențiale.

Când  $\theta = 0$ , atunci planul osculator în  $M_1$  se confundă cu planul tangent la suprafață în  $M_1$ ; curba ( $M_1$ ) este muchia de întoarcere,  $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r_1}$ , adică, *în desfășurarea pe un plan, raza de curbură a muchiei de întoarcere se conservă*.

Din cele expuse de mai sus, rezultă că *suprafața locul tangentelor la o curbă, poate fi aplicată pe un plan cu conservarea lungimii arcelor, de unde și numele de suprafață desfășurabilă dată acestei suprafețe*.

Transformarea suprafeței desfășurabile pe un plan poate fi obținută cu o deformare continuă. Pentru aceasta, va fi deajuns să facem ca muchia de întoarcere să devină curbă plană, lăsând invariabilă lungimea arcului cuprins între două puncte oarecare și curbura în fiecare punct. Această deformare continuă se zice *desfășurarea suprafeței* (S).

Aplicabilitatea suprafeței desfășurabile pe un plan poate fi stabilită, procedând astfel. Să înscriem în muchia (C) (Fig. 118) linia poligonală  $M_1M_2M_3\dots$ , cu laturi infinit de mici. Laturile  $M_1M_2$ ,  $M_2M_3\dots$ , prelungite, formează o suprafață poliedrală,

care se confundă, la limită, cu suprafața desfășurabilă a cărei muchie este (C). Dar suprafața poliedrală considerată poate fi desfășurată pe un plan prin rotații succesive în jurul laturilor  $M_1M_2, M_2M_3, \dots$ . Această proprietate subsistă la limită și astfel se poate aplica suprafața desfășurabilă pe un plan. Trăgând pe suprafața poliderală o linie poligonală  $N_1N_2N_3\dots$ , lungimile ele. N<sub>1</sub> N<sub>2</sub> N<sub>3</sub> mentelor acestei linii după desfășurare, ca și unghiiurile cu muchile adiacente nu sunt alterate. Trecând la limită, se vede că lungimea arcului unei curbe cuprins între două generatoare oarecare și unghiiurile acestei curbe cu generatoarele se conservă în desfășurare.

**76. Liniile geodezice ale suprafeței desfășurabile.** Se zice *linie geodezică* a unei suprafețe desfășurabile, o linie trasă pe această suprafață, pentru care *curbura tangentială este nulă în fiecare punct*. Din formula (13) se vede că curbura tangentială este nulă când  $\theta = 90^\circ$ , adică *planul osculator la curbă este normal la suprafața desfășurabilă*.

De aici urmează că dacă se desfășoară suprafața pe un plan, o linie geodezică se transformă într-o curbă a cărei curbură  $\frac{1}{r_1} = 0$ , deci o linie dreaptă. Aceste linii se bucură de următoarele proprietăți. Ea măsoară pe suprafață, cea mai scurtă distanță de la un punct la altul; prin două puncte ale suprafeței putem face să treacă numai o linie geodezică și numai una; orice linie trasă pe suprafață admite în fiecare din punctele sale o linie geodezică tangentă; unghiul format de cele două linii geodezice tangente la extremitățile unui arc, este egal cu unghiul tangentelor rectilinii duse la extremitățile arcului transformat; curbura tangentială într'un punct al unei linii oarecare este deci egală cu unghiul format de liniile geodezice la extremitățile arcului, divizat prin lungimea arcului infinit mic ce înconjură acel punct; din această cauză curbura tangentială se zice *curbura geodezică*.

### APLICAȚII.

**77. Suprafața strâmbă a binormalelor. Suprafața desfășurabilă a tangentelor.** Ca aplicații a celor stabilite, să considerăm suprafețele riglate născute de muchile, sau infășurate de fețele triedrului principal al unci curbe strâmbe,

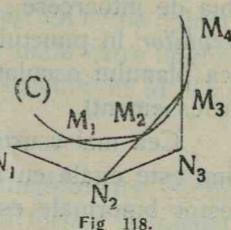


Fig. 118.

format de tangentă, binormală și normală principală a unei curbe strâmbă. O astfel de linie poate fi considerată ca muchia de întoarcere a *desfășurabilei, infășurătoarea planului osculator* în punctul variabil M, tangentă MT fiind caracteristica planului osculator și punctul M punctul de întoarcere (rebroussement).

Cea mai scurtă distanță dintre două binormale infinit vecine este egală cu arcul  $MM' = ds$  al curbei date, unghiul acestor binormale este unghiul de torsion; parametrul de distribuție al planelor tangente la *suprafața riglată a binormalelor* este egal cu  $\frac{ds}{d\tau} = T$ , raza de torsion; punctul M este punctul central, curba strâmbă dată este linia de stricțiune comună desfășurabilei descrisă de tangentă și suprafeței strâmbă riglată a binormalelor; astfel de suprafețe se zic conjugate.

**78. Suprafața rectifiantă.** Planul rectifiant conținând tangentă MT, caracteristica sa, sau dreapta rectifiantă, trece prin punctul M. Dar, am văzut [No. 58, formula (14)] că ea face cu planul osculator un unghiu  $\varphi$ , a cărui tangentă este  $\frac{T}{R}$  relație care o determină complet. Planul rectifiant fiind perpendicular pe planul osculator în M, unghiul  $\theta$  din formula (11) (No. 74) este  $90^\circ$ , deci curbura tangențială este nulă, deci curba dată este o linie geodezică a suprafeței rectifiante și se transformă deci într-o linie dreaptă când se aşează suprafața

pe un plan, de unde și numele de *plan rectifiant și suprafață rectifiantă*.

**79. Suprafața strâmbă a normalelor principale.** Fie MO și  $M'O'$  două normale principale infinit vecine (Fig. 119), O și  $O'$  punctele centrale, K centrul de curbură în M.  $M'K$  poate fi considerată ca proiecția lui  $M'O'$  pe planul osculator în M. Să coboram  $O'H$  perpendiculară pe dreapta  $M'K$  și să unim O cu H. Triunghiul  $O'OH$  este dreptunghic în H.

Planele rectifiante în M și  $M'$  sunt respectiv perpendiculare pe MO și  $M'O'$ ; deci dreapta rectifiantă, adică limita intersecției acestor două plane, este perpendiculară pe MO și  $M'O'$ , adică paralelă cu limita dreptei  $OO'$ , care se apropie de perpendiculara comună

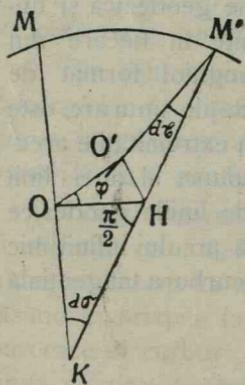


Fig. 119.

at dreptelor MO, M'O'. Planul MKM' tinde către planul osculator în M și cum OH este proiecția lui OO' pe planul MKM', urmează că unghiul O'OM la limită tinde către unghiul  $\varphi$  format de dreapta rectifiantă cu planul osculator în M. Dar, am văzut [No. 58, formula (14)], că  $\operatorname{tg}\varphi = \frac{T}{R}$ .

Unghiurile, MKM' este echivalent cu unghiul de contință  $d\sigma$ ; O'M'H este e hivalent cu unghiul format de planele osculatoare în M și M', este deci echivalent cu unghiul de torsiune,  $d\tau$ .

În triunghiurile O'M'H, OO'H, OHK, avem

$$\begin{aligned} O'H &= O'M' \sin O'MH, \quad O'H \leftarrow O'M' \sin d\tau, \quad O'H \leftarrow OM d\tau, \\ OH &= OH \operatorname{tg} O'OH, \quad O'H \leftarrow OH \operatorname{tg} \varphi, \\ OH &= OK \sin OKH, \quad OH \leftarrow OK d\sigma. \end{aligned}$$

De unde

$$\frac{MO}{OK} \leftarrow \frac{O'H}{OH} \frac{d\sigma}{d\tau} \leftarrow \frac{d\sigma}{d\tau} \operatorname{tg} \varphi.$$

Cum  $\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{T}{R} = \operatorname{tg} \varphi$ , avem, la limită,

$$\frac{MO}{OK} = \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

de unde

$$\frac{MO}{\sin^2 \varphi} = \frac{OK}{\cos \varphi} = \frac{MO + OK}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = R,$$

$$(14) \quad MO = R \sin^2 \varphi, \quad OK = R \cos^2 \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{T}{R}.$$

Dar, după formula (16) (No. 58), d $\omega$  fiind unghiul a două normale principale infinit vecine, avem

$$d\omega^2 = d\sigma^2 + d\tau^2,$$

sau

$$\left( \frac{d\omega}{ds} \right)^2 = \left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2 + \left( \frac{d\tau}{ds} \right)^2, \quad \left( \frac{d\omega}{ds} \right)^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2},$$

de unde

$$\frac{d\omega}{ds} = \pm \frac{1}{T} \sqrt{1 + \frac{T^2}{R^2}}, \quad \frac{d\omega}{ds} = \pm \frac{1}{T} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \pm \frac{1}{T \cos \varphi},$$

$$(15) \quad \frac{d\omega}{ds} = \pm \frac{1}{T \cos \varphi}.$$

Pentru a avea parametrul de distribuție la această suprafață a normalelor principale, să observăm că planul tangent în M

este format de normala principală MO și tangentă în M la curba (C), adică planul osculator în M la curba (C). Aplicând formula (2) (No. 67) care dă parametrul de distribuție al planelor tangente, avem

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{k},$$

$\varphi$  fiind unghiul format de planul tangent în M cu planul central (tangent în O),  $x = OM$ ,  $k$  parametrul de distribuție. Dar, planul tangent în M este planul osculator în M; planul tangent în O este limita planului format de MO și OO'; deci, unghiul acestor două plane tangente este dat de unghiul O'OH, adică tocmai unghiul din formulele de mai sus și deci parametrul de distribuție este dat de

$$k = \frac{OM}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{R \sin^2 \varphi}{\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}} = R \sin \varphi \cos \varphi.$$

Dar, din (14),  $\operatorname{tg}\varphi = \frac{T}{R}$ ,  $R \sin \varphi = T \cos \varphi$ , deci

$$(16) \quad k = T \cos^2 \varphi,$$

Cea mai scurtă distanță OO' este dată din triunghiul OO'H,

$$OH = OO' \cos \varphi, \quad OO' = \frac{OH}{\cos \varphi} = \frac{OK \sin OKH}{\cos \varphi} = \frac{R \cos^2 \varphi d\sigma}{\cos \varphi},$$

$$(17) \quad OO' = R \cos^2 \varphi d\sigma, \quad OO' = \frac{ds}{d\sigma} \cos \varphi d\sigma, \quad OO' = ds \cos \varphi.$$

*Aplicații.* Formulele (14), (15), (16), (17) dau toate relațiile ce pot exista între curba (C) și suprafața strâmbă formată de normalele principale. Ca aplicație, să determinăm curbele (C) așa ca normalele sale principale să fie normale principale la altă curbă ( $C_1$ ).

Să observăm (No. 46) mai întâi că segmentul  $MM_1$  din normala comună cuprins între două puncte corespunzătoare ale curbelor (C) și ( $C_1$ ), trebuie să aibă o lungime constantă; fie  $l$  această lungime.

Să considerăm indicațoarele tangentelor la curbele (C) și ( $C_1$ ). Tangentele la aceste curbe sferice în punctele  $m$  și  $m_1$ , corespunzătoare punctelor M și  $M_1$ , sunt paralele cu normalele principale în M și  $M_1$ , adică sunt paralele. Razele  $Om$  și  $Om_1$  ale sferei, fiind ambele perpendiculare pe direcția comună a acestor tangente, cercul mare  $mm_1$  este normal la aceste două

indicatoare; are deci o lungime constantă și unghiul  $i$ , măsurat de arcul  $mm_1$ , este și el constant. Urmează deci următoarele proprietăți pentru curbele (C) și (C<sub>1</sub>).

1º *Distanța MM<sub>1</sub> a două puncte corespunzătoare are o lungime constantă, l.*

2º *Unghiul format de tangentele la cele două curbe, în două puncte corespunzătoare are o valoare constantă i.*

3º Să considerăm suprafața născută de normala principală MM<sub>1</sub>; unghiul  $i$  este egal cu unghiul planelor tangente la suprafață în M și M<sub>1</sub>. Dacă O este punctul central,  $k$  parametrul de distribuție al planelor tangente, aplicând formula (2) (No. 67), avem

$$\text{de unde } \operatorname{tg}\varphi = \frac{MO}{k}, \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{M_1O}{k},$$

$$\operatorname{tg}i = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{\frac{M_1O}{k} - \frac{MO}{k}}{1 + \frac{MO \cdot M_1O}{k^2}} = \frac{MM_1 \cdot k}{k^2 + MO \cdot M_1O},$$

$$\operatorname{tg}i = \frac{lk}{k^2 + MO(l + MO)},$$

relație în care intră numai elementele curbei (C).

Înlocuind în această relație pe MO și  $k$  prin valorile lor (14) și (16),  $k = T \cos^2 \varphi$ ,  $OM = R \sin^2 \varphi$ ,  $\operatorname{tg}\varphi = \frac{T}{R}$ , avem

$$k = \frac{TR^2}{T^2 + R^2}, \quad OM = \frac{RT^2}{T^2 + R^2},$$

$$\overline{OM}^2 + k^2 = \frac{T^2 R^4}{(T^2 + R^2)^2} + \frac{R^2 T^4}{(T^2 + R^2)^2} = \frac{R^2 T^2}{R^2 + T^2},$$

și deci

$$\operatorname{tg}i = \frac{\frac{TR^2}{T^2 + R^2}}{\frac{R^2 T}{T^2 + R^2} + l \frac{RT^2}{T^2 + R^2}} = \frac{lR}{RT + lT}, \quad \frac{\cos i}{\sin i} = \frac{R}{T} + \frac{T}{l},$$

sau

$$(18) \quad \frac{\cos i}{T} = \frac{\sin i}{R} + \frac{\sin i}{l}.$$

De aici urmează că, dacă normalele principale ale unei curbe (C) sunt în același timp normale principale la o a doua curbă (C<sub>1</sub>), curbura și torsionarea curbei (C) verifică o relație lineară. Curbele (C) care se bucură de această proprietate se zic *curbele lui Bertrand*.

Să observăm că elicea este un caz particular al curbelor lui Bertrand, pentru că raportul curburei către torsiune este constant. Dacă se consideră în particular elicea circulară, pentru care  $R$  și  $T$  sunt constante, este evident că normalele principale sunt normale principale la o infinitate de elice de aceeași axă; suprafața formată de aceste normale se zice *elicoidul strâmb*.

4º Să presupunem acum că relația (18) este verificată pentru două sisteme de valori  $i_1$ ,  $i_2$ , și  $l_1$ ,  $l_2$ , ale lui  $i$  și  $l$ . Vom avea atunci două ecuații care ne dau pe  $\frac{1}{R}$  și  $\frac{1}{T}$ ; aceste două ecuații încețează de a mai fi compatibile când  $i_1 = i_2$ . Dar aceasta nu se poate, căci ar urma ca planul tangent să fie același în două puncte ale aceleiași normale principale, ceea ce este imposibil, căci normalele principale la o curbă strâmbă nu formează o suprafață desfășurabilă, ceea ce se vede din relația (16) care dă parametrul de distribuție. Deci, valorile lui  $i_1$  și  $i_2$ , corespunzătoare la două valori diferite ale lui  $l$ , sunt neapărat diferite. Rezultă că valorile lui  $\frac{1}{R}$  și  $\frac{1}{T}$ , corespunzătoare curbei (C) sunt constante și această curbă este deci elice circulară. Avem deci următoarea proprietate: *Dacă normalele principale ale unei curbe (C) sunt în același timp normale principale la două curbe (C<sub>1</sub>) și (C<sub>2</sub>), ele sunt la o infinitate de curbe; toate aceste curbe sunt elice circulare de aceeași axă și normalele lor principale formează un elicoid strâmb.*

**80. Suprafața înfășurătoare a planelor normale.** Am văzut că caracteristica planului normal (No. 55) coincide cu

*dreapta polară* (perpendiculara în centrul de curbură pe planul osculator), de aceea se dă numele de *suprafață polară* la înfășurătoarea planelor normale la o curbă strâmbă. Pentru a determina punctul de contact al dreptei polare cu înfășurătoarea sa, să considerăm sferă care atinge curbă (C) în punctul M și în alt punct infinit vecin M'; această sferă are ca limită sfera osculatoare în M. Cum centrul său este în planul normal în M', centrul sferei osculatoare este deci limita punctului de intersecție a caracteristicei planului normal în M cu planul normal în-

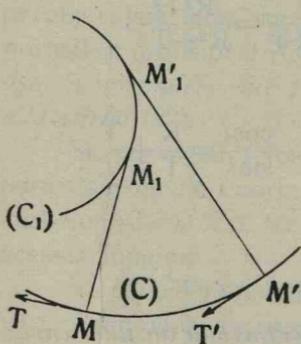


Fig. 120.

finit vecin, adică punctul de contact al dreptei polare cu înfășurătoarea sa. *Muchia de întoarcere a suprafeței polare este deci locul centrelor sferelor osculatoare, iar tangentă la curba descrisă de centrul sferei osculatoare este paralelă cu binormala.*

*Desfășurata unei curbe* ( $C$ ) *este o altă curbă* ( $C_1$ ), ale cărei tangente tăie normal curba ( $C_1$ ) (Fig. 120). Proprietățile găsite la curbele plane au loc și pentru curbele strâmbă. Așa, de ex., variația de lungime a unui segment  $MM_1$  este egal cu arcul corespunzător din desfășurată și desfășurătoare se obține prin același procedeu ca și la curbele plane. O curbă plană sau strâmbă admite o infinitate de desfășurate, fiecare fiind muchia de întoarcere a unei desfășurabile ( $\Sigma$ ) trecând prin curba ( $C$ ) și care este o traectorie ortogonală a generatoarelor. Planul tangent la suprafața ( $\Sigma$ ),  $MM_1T$ , dus prin  $M_1$  și tangentă  $MT$  la curba ( $C$ ), este (No. 71) osculator desfășuratei ( $C_1$ ) în punctul  $M_1$ . Binormala desfășuratei în  $M_1$  este deci perpendiculară pe  $MT$ , ea este deci situată în planul normal la ( $C$ ); punctul  $M_1$  aparține deci dreptei polare a lui  $M$ . Se vede că planul osculator al desfășuratei conținând pe  $MT$ , este perpendicular pe planul normal în  $M$ , adică pe planul tangent la suprafața polară. Deci, *curba* ( $C_1$ ) *este o curbă trasă pe suprafață polară*, al cărei plan osculator în  $M_1$  este perpendicular pe planul tangent în  $M_1$  la suprafața polară, este, deci, conform definiției, o geodezică a suprafeței polare.

Deci, desfășurile unei curbe ( $C$ ) sunt pe suprafață polară și formează pe această suprafață o familie de linii geodezice.

*Desfășura suprafeței polare.* Rezultă deci că dacă se intinde suprafața polară pe un plan, desfășurile se transformă în linii drepte. Fie PK dreapta polară relativă la  $M$  (Fig. 121),  $K$  centrul de curbură. Prin fiecare punct  $M_1$  al lui PK trece o desfășurată și numai una și această desfășurată tăie dreapta PK sub un unghi  $i$ , a cărui tangentă este egală cu  $\frac{R}{M_1K}$ .

Efectuând desfășurarea, fie ( $\Gamma$ ) (Fig. 122) curba în care se transformă muchia de întoarcere a suprafeței polare; PK se transformă într-o tangentă  $\mu_k$  la această curbă ( $\Gamma$ ); prin fiecare punct  $m_1$  al acestei drepte trece o dreaptă  $m_1O$  care este transformata uneia din desfășurate, iar unghiul  $i$  se conservă în desfășurare.

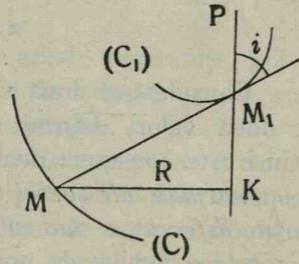


Fig. 121.

Fie O punctul unde această dreaptă întâlneste perpendiculara în  $k$  pe  $\mu k$  (Fig. 122). Triunghiul dreptunghic  $Km_1O$

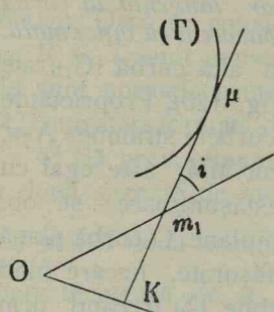


Fig. 122.

(Fig. 122) este egal cu triunghiul  $KM_1M$  (Fig. 121), ca având unghiiurile din  $M_1$  și  $m_1$  egale și latura unghiului drept  $m_1k = M_1K$ . Urmează deci  $Ok = MK = R$  și deci punctul O este independent de linia geodezică considerată. Avem, astfel următoarea proprietate a lui Lancret,

*Când se desfășoară pe un plan suprafața polară, desfășurările se transformă într'un sistem de drepte concurente și curba transformată a locului centrelor de curbură este podara punctului lor de întâlnire în raport cu transformata muchiei de întoarcere.*

*Observări.* I. Să considerăm o desfășurată ce tăe dreapta polară sub unghiul  $i$ ; această desfășurată este o geodezică pentru suprafața polară, deci planul tangent la suprafața desfășurabilă în  $M_1$  (Fig. 121) este perpendicular pe planul osculator în  $M_1$  la muchia de întoarcere, ( $M_1$ ). Deci unghiul  $\theta$  din formula (7) (No. 74) este  $90^\circ$  și deci avem  $di = -ds_0$ ,  $ds_0$  fiind unghiul de contingență al muchiei. Dar, tangenta la muche este dreapta polară, paralelă ca binormala, așa că unghiul de contingență  $ds_0$  este unghiul a două binormale infinit vecine, adică tocmai torsionea  $d\tau$  a curbei (C). Deci,  $di = -d\tau$ , sau  $di = -\frac{ds}{T}$ . Însemnând cu  $\alpha$  unghiul lui  $MM_1$  cu  $MK$  (Fig. 121), urmează  $\alpha = 90^\circ - i$ , deci  $d\alpha = -di$ ,  $d\alpha = \frac{ds}{T}$ . Intregând,

$$\alpha = \alpha_0 + \int_0^s \frac{ds}{T}.$$

Considerând două valori ale unghiului  $\alpha$ , corespunzătoare la două valori diferite ale lui  $\alpha_0$ , diferența acestor două unghiuri este constantă dealungul curbei (C). Se vede, deci, că, două normale ale curbei (C), care sunt tangente la două desfășurate diferite, se tăe sub un unghi constant. Deci, dacă se cunoaște o familie de normale la curba (C) care nasc o desfășurabilă, adică dacă se cunoaște o desfășurată a curbei (C), se obțin celealte desfășurate ale curbei (C) învărtind primele normale de un un unghi constant în jurul punctului unde tăe curba (C).

II. Locul centrelor de curbură nu poate fi desfășurată. În adevăr, dacă ar fi aşa, podara punctului O, în raport cu curba (T) (Fig. 122) ar fi o dreaptă ce trece prin O, tangentele la curba (T) ar fi toate paralele cu aceeași direcție fixă și curba ar fi plană.

Este ușor de văzut care e tangentă în centrul de curbură K al curbei (C) la curba (K) descrisă de acest punct. Pentru că, afară de infiniți mici de ordinul al treilea, axele de curbură (dreptele polare) corespunzătoare punctelor infinit vecine M și M' ale curbei (C) pot fi socotite că se tăie în centrul S al sferei osculatoare în M, apoi, aceste axe fiind respectiv perpendicular pe planele osculatoare în M și M', dreapta KK' este perpendiculară la intersecția acestor plane. Deci, la limită, tangentă căutată este perpendiculară pe tangentă MT în M la curba (C). Pe de altă parte, unghurile MKS, MK'S fiind drepte, elementul KK' aparține sferei de diametru MS. Deci, tangentă la locul centrelor de curbură se confundă cu tangentă în K conținută în planul normal în M la (C), la sfera de diametru MS, sau, încă, cu tangentă în K la cercul circumscris triunghiului MKS.

### 81. Suprafețe de egală pantă. Elicoidul desfășurabil.

Să considerăm acele suprafețe desfășurabile, al căror con director este de rotație, cu axa verticală. Planul tangent dealungul fiecărei generatoare G este paralel cu planul tangent la conul director dealungul generatoarei corespunzătoare g. Dar, planul tangent la con admite generatoarea g ca linie de cea mai mare pantă; deci, G este linia de cea mai mare pantă a planului tangent la suprafața desfășurabilă. Planele tangente ale acesteia au deci o pantă constantă, egală cu aceea  $\rho$  a generatoarelor, de unde și numele de *suprafețe de egală pantă* ce se dă acestor suprafețe.

Din cele ce am văzut (No. 73), aceste suprafețe pot fi considerate ca infășurătoarea conurilor directoare, având vârfurile pe una oarecare din liniile ce-i aparțină.

Pentru a ne face idee de forma suprafeței, să presupunem că dintr'un punct deasupra unui plan orizontal lăsăm să cadă nisip; acesta va lua forma unui con de rotație, ale cărui generatoare au în raport cu orizontul o pantă caracteristică ce depinde de natura nisipului. Rezultă, deci, că dacă turnăm la fel nisip dealungul unei linii oarecare, nisipul turnat va lua forma unei suprafețe de egală pantă ce trece prin această linie.

Fie  $(H)$  o secțiune orizontală a unei suprafețe  $(\Sigma)$ . Pentru că pe fiecare con cu vârful  $H$ , generatoarea suprafeței  $(\Sigma)$  se obține ducând la con un plan tangent prin tangenta în  $H$  la curba  $(H)$ , se deduce că generatoarea  $G$  este normală la  $(H)$ . Toate generatoarele  $G$  ale suprafeței desfășurabile  $(\Sigma)$ , fiind normale la  $(H)$ , muchia de întoarcere a suprafeței  $(\Sigma)$  este o desfășurată  $(D)$  a lui  $(H)$ . Este deci situată pe suprafața polară a lui  $(H)$ , care este cilindrul vertical  $(\Gamma)$ , având ca secțiune dreaptă  $(D_1)$  desfășurata lui  $(H)$  situată în același plan cu  $(H)$ . Generatoarele  $G$ , tangente la  $(D)$ , fiind egale și inclinate pe orizont, această curbă  $(D)$  este o elice trăsă pe cilindrul  $(\Gamma)$ .

Deci orice suprafață de egală pantă  $(\Sigma)$  este locul tangentelor lor la o elice trăsă pe un cilindru vertical  $(\Gamma)$ . Cum planul tangent dealungul fiecărei generatoare se confundă cu planul osculator la această elice [care este muchia de întoarcere a lui  $(\Sigma)$ ], urmează că suprafața  $(\Sigma)$  este ortogonal cilindrului  $(\Gamma)$  dealungul acestei elice.

Să considerăm cazul când cilindrul  $(\Gamma)$  este de rotație, iar elicea  $(D)$  este circulară. Suprafața  $(\Sigma)$  se zice atunci elicoid desfășurabil. Desfășurând elicoidul pe un plan, raza de curbură a muchii de întoarcere se conservă (No. 75) și cum raza de curbură a elicei circulare este constantă, urmează că curba desfășurată are raza de curbură constantă, este un cerc. Deci, dacă dintr-o foaie subțire de hârtie, se tăie un cerc de rază  $R = \frac{r}{\cos^2 \alpha}$  ( $r$  raza cilindrului și  $\alpha$  unghiul elicei,  $R$  raza de curbură a elicei, No. 63), apoi, tăind foaia rămasă dealungul uneia din razele cercului, o răscrim pentru a o așeza ortogonal pe un cilindru de rază  $R \cos^2 \alpha$ , dealungul unei elice de unghiul  $\alpha$ , foaia ia forma unui elicoid desfășurabil, numit *surupul lui Arhimede*.

## NOTIUNI ASUPRA SUPRAFETELOR. PROPRIETĂȚILE CURBELOR TRASE PE O SUPRAFAȚĂ.

**82. Așezarea unei suprafețe față de planul tangent.**  
Orice dreaptă ce trece printr'un punct  $O$  al unei suprafețe și care este situată în planul tangent în acest punct, are cu suprafață două puncte comune, confundate cu  $O$ . Deci  $O$  este un punct dublu al secțiunii făcute în suprafață prin planul tangent în  $O$ , iar această curbă de secțiune prezintă în  $O$  două ramuri.

Tangentele în O la aceste două ramuri se zic *tangente asymptotice*. Aceste tangente au în punctul O trei puncte comune cu suprafața, au contact de ordinul al doilea. Orice secțiune plană dusă prin una din ele are punctul O ca punct de inflexiune.

Fie M un punct al suprafetei a cărui distanță de punctul O (Fig. 123) să fie infinit mic de ordinul întâi. Să însemnăm cu P proiecția acestui punct pe planul tangent în O. Dacă în punctul O suprafața nu prezintă nici o singularitate, distanța MP este, în general, de ordinul al doilea; această distanță poate deveni de ordinul al treilea, când punctul

P este așezat pe una din tangentele asymptotice X'X, Y'Y. Se obseră că PM rămâne de aceeași parte a planului tangent atât vreme cât proiecția sa P rămâne în interiorul unghiului XOY, sau opusul său X'YO'; PM este de cealaltă parte a planului tangent, dacă P este în celelalte unghiuri X'YO, XOY'. Se pot prezenta trei cazuri.

1º Cele două tangente asymptotice sunt imaginare. În acest caz MP are același semn și suprafața este în vecinătatea lui O față de planul tangent cum ar fi elipsoidul. Punctul O se zice *eliptic* și este un punct dublu izolat al secțiunii prin planul tangent.

2º Cele două tangente asymptotice sunt reale și distincte. Aceste drepte împart planul tangent în două regiuni distincte, fiecare fiind formată din cele două unghiuri opuse la vîrf (cu vîrful în O). Punctele suprafetei, vecine de O, sunt așezate de o parte și de alta a planului tangent, după cum proiecțiile lor sunt în una sau în alta din regiunile determinate în planul tangent de tangentele asymptotice. Suprafața, în vecinătatea lui O, este dispusă, față de planul său tangent, cum ar fi o suprafață riglată de ordinul al doilea. Pentru secțiunea prin planul tangent, punctul O este un punct dublu cu tangente distincte și punctul O se zice *punct iperbolic*.

3º Tangentele asymptotice sunt confundate. Punctul O este atunci un punct de întoarcere al secțiunii cu planul tangent și se zice *punct parabolic*. În vecinătatea punctului O suprafața față de planul tangent se prezintă ca o suprafață desfășurabilă într'un punct al muchiei sale de întoarcere.

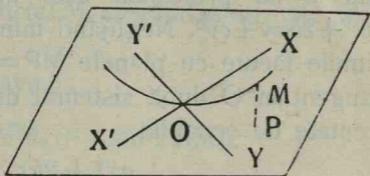


Fig. 123.

**83. Forma suprafetei. Indicatoare.** Pentru a ne face o idee de forma suprafetei, într'un punct dat O, vom tăia suprafața cu plane paralele cu planul tangent în O, infinit vecine și echidistante de planul tangent. Distanța MP este o funcție de coordonatele  $x$  și  $y$  ale punctului P raportat la axe fixe din planul tangent; cum această distanță este de ordinul al doilea, parteală principală este un trinom de gradul al doilea,  $ax^2 + 2bxy + cy^2$ . Neglijând infiniții mici de ordinul al treilea, secțiunile făcute cu planele  $MP = \pm h$ , se proiectează pe planul tangent în O după sistemul de două conice conjugate, reprezentate de ecuațiile

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \pm h.$$

Având în vedere numai *forma* suprafetei în O, putem substitui lui  $h$  o valoare finită și constantă oarecare, de ex., 1, iar conicele obținute,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \pm 1,$$

sunt omotetice și concentrice cu precedentele. Aceste două conice formează ceea ce se numește *indicatoarea* în punctul O. Ea se compune din două iperbole conjugate având ca asymptote tangentele asymptotice, când punctul este iperbolic; dintr-o elipsă reală și una imaginară, când punctul este elitic; când punctul O este parabolic, indicatoarea se reduce la două drepte paralele.

**84. Curbura unei curbe trase pe suprafață. Teorema lui Meusnier.** Fie M un punct al unei curbe (M) trasă pe o

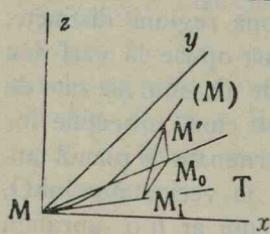


Fig. 124.

suprafață (S) (Fig. 124), MT tangentă în M, M' un punct infinit vecin. Să luăm în planul tangent axele  $Mx$ ,  $My$  paralele cu axele indicatoarei în M. Fie  $M_0$  piciorul perpendicularei din M' pe planul tangent,  $M_0M_1$  perpendiculara pe MT. Observând că MM' diferă de proiecția sa MM<sub>0</sub> pe planul tangent  $Mxy$  cu un infinit mic de ordinul al doilea, raza de curbură R a curbei (M) în M este dată de

$$(1) \quad R = \lim_{2M'M_1} \frac{\overline{MM_0}^2}{\overline{MM_0}^2} = \lim_{2M'M_1} \frac{\overline{MM_0}^2}{\overline{MM_0}^2} \cos \angle M_0M'M_1.$$

Dar, însemnând cu  $(x, y)$  coordonatele punctului  $M_0$ , față axeelor  $Mx$ ,  $My$ , avem

$\overline{MM_0}^2 = x^2 + y^2$  și deci

$$x = MM_0 \cos x MM_0, \quad y = MM_0 \sin x MM_0.$$

Însă, între  $M'M_0 = z$  și  $(x, y)$  avem relația

$$(2) \quad z = M'M_0 = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2,$$

care este ecuația indicatoarei în punctul M, alegând pentru  $Mx, My$  paralele cu axele indicatoarei.

Înlocuind în (2) pe  $x$  și  $y$ , avem

$$M'M_0 = \overline{MM_0}^2 (\alpha_1 \cos^2 x MM_0 + \alpha_2 \sin^2 x MM_0),$$

asa că relația (1) devine

$$(3) \quad R = \lim_{\frac{1}{2}} \frac{\cos x M'M_1}{\alpha_1 \cos^2 x MM_0 + \alpha_2 \sin^2 x MM_0}.$$

La limită, planul  $MM_0M'$  devine planul normal dus la suprafață prin tangentă MT, planul  $MM_1M'$  devine planul osculator în M la (M). Deci, însemnând cu  $\theta$  unghiul planului osculator cu planul normal și cu  $\varphi$  limita unghiului  $xMM_0$ , adică  $xMT$ , avem din (3)

$$(4) \quad R = \frac{\cos \theta}{2(\alpha_1 \cos^2 \varphi + \alpha_2 \sin^2 \varphi)}.$$

Această expresie rămânând constantă pentru aceeaș valoare a lui  $\varphi$  când  $\theta$  este acelaș, se vede că R este acelaș pentru toate curbele trase pe suprafață având acelaș plan osculator în M, în particular pentru secțiunea făcută în suprafață prin planul osculator. Aceasta aduce studiul curburei unei curbe trasă pe suprafață în M la acela al secțiunii plane.

Făcând în (4) pe  $\theta = 0$ , se vede că

$$(5) \quad R_1 = \frac{1}{2(\alpha_1 \cos^2 \varphi + \alpha_2 \sin^2 \varphi)}$$

este raza de curbură a secțiunii normale dusă prin MT. Însemnând cu R raza de curbură a secțiunii dușă prin MT ce face cu secțiunea normală unghiul  $\theta$ , din (4), avem

$$R = R_1 \cos \theta.$$

Adică, raza de curbură a unei secțiuni plane duse prin tangentă MT este proiecția pe planul acestei secțiuni a razei de curbură a secțiunii normale dusă prin MT. Această teoremă a lui Meusnier reduce încă studiul curburei în M la acela al secțiunilor normale.

**85. Curbura secțiunilor normale.** Să însemnăm cu  $R$  raza de curbură a unei secțiuni normale, ce trece prin normala într'un punct  $M$  al unei suprafețe. Valoarea acestei raze este dată de expresia (5),

$$(6) \quad R = \frac{1}{2(\alpha_1 \cos^2 \varphi + \alpha_2 \sin^2 \varphi)},$$

unde  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$  sunt coeficienții din ecuația indicatoarei în  $M$ , iar  $\varphi$  unghiul format de tangentă  $MT$  din planul tangent în  $M$  la suprafață cu axa  $Ox$ , adică cu direcția uneia din axele indicatoarei.

Făcând în (6)  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = 90^\circ$ , obținem

$$R_1 = \frac{1}{2\alpha_1}, \quad R_2 = \frac{1}{2\alpha_2},$$

care sunt razele de curbură ale secțiunilor normale corespunzătoare axelor indicatoarei în  $M$ , care se zic *secțiuni normale principale*.

Din aceste relații, deducem

$$\alpha_1 = \frac{1}{2R_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2R_2},$$

și deci relația (6) devine

$$(7) \quad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2}.$$

Această relație a lui Euler dă raza de curbură  $R$  a unei secțiuni normale oarecare în funcție de razele de curbură principale  $R_1$  și  $R_2$  și de unghiul  $\varphi$  făcut de planul secțiunii normale principale cu planul secțiunii normale.

Inlocuind în relația (2), pe  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$  cu valorile lor, ecuația indicatoarei devine

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = 2z, \quad \frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = 2h,$$

Însemnând cu  $\rho$  semidiametrul indicatoarei ce face unghiul  $\varphi$  cu  $Mx$ , avem

$$\frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\rho^2 \sin^2 \varphi}{R_2} = 2h,$$

și comparând cu (7), urmează

$$\rho^2 = 2hR,$$

deci, raza de curbură a fiecărei secțiuni normale este propor-

*tională cu pătratul semidiametrului indicatoarei dirijat după urma acestei secțiuni normale pe planul tangent.* Grație acestei teoreme a lui Dupin, variația curburei în jurul punctului M este figurată de indicatoare.

Rezultă de aci că dacă două suprafețe tangente într'un punct au în acel punct aceeași indicatoare, toate secțiunile determinate în ambele suprafețe de planele normale comune au aceeași curbură în punctul considerat. Se zice atunci că cele două suprafețe sunt osculatoare în punctul considerat.

Din proprietatea lui Dupin și acelea ale conicelor, urmează.  
1º Printre secțiunile normale corespunzătoare lui M, cele două secțiuni principale sunt acelea ale căror raze de curbură sunt maximum sau minimum.

2º Suma curburilor a două secțiuni normale rectangulare este constantă și egală cu suma curburilor principale.

3º Suma razelor de curbură a celor două secțiuni normale duse prin doi diametrii conjugăți ai indicatoarei, este constantă și egală cu suma razelor de curbură principală.

Aceste ultime două proprietăți sunt enunțate pentru cazul indicatoarei eliptică. Dacă indicatoarea ar fi iperbolică, trebuie înlocuit cuvântul sumă cu diferență. De altfel, această distincție devine inutilă dacă se convine a privi curbura unei secțiuni normale ca pozitivă sau negativă, după cum centrul de curbură este de o parte sau de alta a planului tangent.

Toate aceste rezultate sunt conținute în formula (7) a lui Euler,

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2}.$$

*Observări.* I. Curbura secțiunii normale se anulează, când planul trece printr-o asimptotă a indicatoarei, ceea ce rezultă din faptul că secțiunea normală corespunzătoare admite punctul M ca punct de inflexiune.

Condiția ca o conică să fie de gen parabolic exprimându-se cu o singură relație între parametrii, urmează că punctele parabolice ale unei suprafețe sunt așezate pe o linie care separă suprafața în două regiuni, din care una conține punctele eliptice, cealaltă punctele iperbolice.

II. Sunt pe orice suprafață puncte eliptice pentru care indicatoarea este un cerc. Un astfel de punct, care se zice *ombilic*, este, în general, un punct izolat, căci condițiile ca indicatoarea să fie redusă la un cerc se exprimă prin două relații între

parametrii conicei. Se poate întâmpla, însă, că pe o suprafață particulară, una din aceste ecuații să se reducă la o identitate; în acest caz ombilicurile formează un sir continuu și sunt așezate pe o linie.

**86. Tangente conjugate.** Când un punct  $M$  descrie o curbă  $(C)$  pe o suprafață, planul tangent în  $M$ , a cărui poziție depinde de un parametru, infășură o desfășurabilă circumșrisă suprafetei dealungul curbei  $(C)$  și caracteristica planului tangent trece prin punctul  $M$ . Există între direcțiile acestei caracteristice și tangenta  $MT$  la curba  $(C)$  o relație remarcabilă.

În adevăr, fie  $M'$  (Fig. 125) un punct variabil al curbei  $(C)$ , infinit vecin de  $M$ . Planele tangente  $(P)$  și  $(P')$  în  $M$  și  $M'$  se

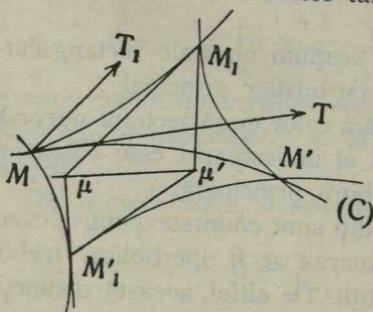


Fig. 125.

tă după o dreaptă  $(D)$  care, la limită, devine caracteristica  $MT_1$  și care atinge suprafața în  $M$ . Trebuie deci ca ea să întâlnească suprafața în două puncte  $M_1$ ,  $M'_1$ , infinit vecine de  $M$ . Să presupunem că punctul  $M$  este iperbolic; cele patru puncte  $M$ ,  $M'$ ,  $M_1$ ,  $M'_1$  sunt varfurile unui patrulater curbiliniu, format de

cele patru ramuri ale secțiunilor făcute în suprafață prin planele  $(P)$  și  $(P')$ . Tangentele în  $M_1$  și  $M'_1$  la aceste patru ramuri formează un patrulater strâmb  $M_1 M'_1 \mu \mu'$  a cărui diagonală  $\mu \mu'$  este intersecția planelor tangente  $(P_1)$ ,  $(P'_1)$  în punctele  $M_1$ ,  $M'_1$ . Să observăm că una cel puțin din cele două coarde  $MM_1$ ,  $MM'_1$  nu este infinit mic în raport cu coarda  $MM'$ , căci în acest caz cele trei segmente  $M'M$ ,  $M'M_1$ ,  $M'M'_1$  ar avea aceeași direcție limită și punctul  $M$  ar fi parabolic. Pe de altă parte,  $M\mu$  este infinit mic cel puțin în raport cu una din coardele  $MM_1$ ,  $MM'_1$ , căci altfel, direcția sa limită ar fi tangentă de o dată la cele două ramuri de curbă ce pleacă din  $M$ , ceea ce este imposibil. Deci  $M\mu$  este infinit mic în raport cu  $MM'$  și de asemenea și  $M'\mu'$ . Deci dreptele  $\mu \mu'$  și  $MM'$  au aceeași direcție limită și tangentă  $MT$  se deduce din  $MT_1$ , după cum  $MT_1$  se deduce din  $MT$ . Aceste două tangente se zic pentru acest motiv *tangente conjugate*.

Din cele de mai sus rezultă că o tangentă variabilă și conjugata sa descriu, în planul tangent, două fasciole în involuție. Pentru ca  $MT$  să se confundă cu  $MT_1$ , trebuie ca punct-

tul M să fie punctul de întoarcere al planului tangent. Dacă MT se confundă cu  $MT_1$ , planul tangent, ce conține tangenta MT, are în acest caz drept caracteristică tangentă în M la curba (C), este deci planul osculator în M la curba (C). Secțiunea normală dusă prin MT trebuie să aibă un punct de inflexiune în M; deci, când MT se confundă cu  $MT_1$ , atunci MT trebuie să fie una din tangentele asymptotice. Dar când MT se confundă cu  $MT_1$ , aceasta este o rază dublă a involuții determinate și deci razele duble ale involuții determinate de tangentele conjugate sunt asymptotele indicatoarei.

Rezultă de aci că o pereche de tangente conjugate, formând un fascicol armonic cu razele duble, coincide cu un sistem de diametrii conjugăți ai indicatoarei și în particular, axele acestei conice formează perechea de raze perpendiculare ale acestei involuții.

Se știe însă că, dacă într'un sistem în involuție, sunt două perechi de raze perpendiculare, razele duble sunt izotrope și atunci toate perechile de raze conjugate sunt perpendiculare. Indicatoarea este atunci un cerc și punctul M este un omobilic.

Se vede de asemenea că caracteristica planului tangent este nedeterminată când să deplasăză pe tangentă asymptotică ce pornește dintr'un punct parabolic.

**87. Linii asymptotice.** 1º Se zice *linie asymptotică* o linie trăsă pe suprafață, a cărei tangentă în fiecare punct coincide cu conjugata sa; o astfel de linie atinge, în fiecare punct al său, una din asymptotele indicatoarei. Există, deci, în general, pe o suprafață oarecare, două familiile de linii asymptotice, reale sau imaginare, după cum suprafața admite sau nu puncte iperbolice.

2º Orice dreaptă situată pe suprafață este o linie asymptotică, căci orice plan trecând prin această dreaptă dă loc la o secțiune ale cărei toate punctele sunt puncte de inflexiune. Dacă, mai mult, planul tangent este același dealungul acestei drepte, caracteristica sa este în fiecare punct nedeterminată, iar cele două raze duble ale involuției se confundă, căci cele două tangente asymptotice se confundă. În acest caz, cele două linii asymptotice, în fiecare punct al dreptei considerate, se confundă cu această dreaptă; toate punctele sunt parabolice.

Așa dar, pe o suprafață desfășurabilă, cele două familiile de linii asymptotice se reduc la una singură, formată din generatoare, și toate punctele unei astfel de suprafață sunt puncte parabolice.

Reciproc, orice suprafață (S) ale cărei toate punctele sunt parabolice este o suprafață desfășurabilă. În adevăr, pe o astfel de suprafață, cele două familii de linii asymptotice se reduc la una singură. Deplasându-ne dealungul uneia din aceste linii asymptotice, caracteristica planului tangent este într'una nedeterminată, ceea ce însemnează că planul tangent este invariabil. Suprafața admite deci un sistem de generatoare, astfel că planul tangent este același dealungul lor. Fie (G) o astfel de generatoare a suprafetei (S). Planul (P) tangent la suprafață dealungul lui (G) depinde de același parametru de care depinde generatoarea (G), deci de un singur parametru. Așa dar, planul (P) când variază admite o caracteristică (D). Dar acest plan este tangent la suprafața (S) în punctul M, care se găsește pe caracteristica (D). Să presupunem că în mișcarea planului tangent, punctul de contact descrie pe suprafață drumul infinit mic MM'. Dar, necontenit punctul de contact M este pe caracteristica (D), oricare ar fi poziția acestui punct pe generatoarea (G); cu alte cuvinte, toate punctele generatoarei (G) aparțin lui (D), sau că generatoarele suprafetei (S) sunt linii drepte. Deci dacă suprafața admite o familie de generatoare, astfel că dealungul lor planul tangent să fie invariabil, aceste generatoare sunt linii drepte, suprafața este desfășurabilă.

*Observare.* Planele tangente la o suprafață oarecare depind în general de doi parametrii (formează, în general, un ansamblu dublu infinit); numai la suprafetele desfășurabile planele tangente depind de un singur parametru (o simplă infinitate). Nu există, în general, pe o suprafață, o curbă, dealungul căreia planul tangent să fie invariabil, aceasta poate să aibă loc excepțional pentru o curbă izolată, cum sunt, de ex., paralelele extreme ale torului. În cazul suprafeteelor desfășurabile, această proprietate apareține la toate generatoarele.

3º Dealungul unei linii asymptotice, tangentele conjugate se confundă, adică tangentă într'un punct M al acestei linii este caracteristica planului tangent la suprafață când ne deplasăm pe această linie (Fig. 125). Dar planul tangent la suprafață conținând tangentă MT și având caracteristică chiar această dreaptă, este planul osculator la curba (C) în M, căci caracteristica planului osculator este tangentă la curba strâmbă. Deci, o linie asymptotică este o linie trasă pe suprafață astfel că planul osculator într'un punct al ei este tangent la suprafață. Sau, linia asymptotică coincide cu muchia de întoarcere a supra-

*fetei desfășurabile circumscrisă suprafetei (S) dealungul acestei linii.*

4º Să presupunem că toate suprafetele desfășurabile circumscrise dealungul liniilor asymptotice ale unei aceleas familii au în comun o curbă ( $\Gamma$ ). Fie ( $g$ ) o astfel de linie asymptotică punctul unde tangenta în  $M$  întâlnește curba ( $\Gamma$ ) (Fig. 126). Se poate ca punctul  $\mu$  să rămâne invariabil când  $M$  variază; linia ( $g$ ) ale cărui toate tangentele trec prin acelaș punct  $\mu$  este evident linie dreaptă și suprafața ( $S$ ) este desfășurabilă. Dacă  $\mu$  variază cu  $M$ , planul osculator al lui ( $g$ ) în  $M$  atinge suprafața desfășurabilă născută de  $M\mu$  în fiecare punct al acestei drepte. Cum curba ( $\Gamma$ ) este presupusă situată pe această suprafață desfășurabilă, planul tangent conține tangentă  $\mu t$  la curba ( $\Gamma$ ).

Dacă această proprietate are loc pentru toate liniile asymptotice ale unei aceleas familii, se vede că toate planele tangente la suprafața ( $S$ ) vor fi tangente la aceaș curbă ( $\Gamma$ ). Aceste plane tangente la suprafața ( $S$ ) depind de un singur parametru, suprafața este deci o suprafață desfășurabilă. Deci, *dacă suprafetele desfășurabile născute de tangentele la toate liniile asymptotice ale unei aceleas familii a suprafetei (S) au în comun o curbă ( $\Gamma$ ), suprafața (S) este desfășurabilă.*

5º În acest ultim caz cele două familii de linii asymptotice se confundă. Deci, dacă proprietatea enunțată aparține numai la una din cele două familii de asymptotice, trebuie ca  $\mu$  să fie invariabil pe ( $\Gamma$ ) pentru fiecare generatoare ( $g$ ) și variază numai când se trece de la o generatoare la alta. Suprafața ( $S$ ) este deci o suprafață strâmbă riglată trecând prin curba ( $\Gamma$ ).

Deci, *dacă suprafetele desfășurabile circumscrise dealungul unei aceleas familii de linii asymptotice se tăie după aceeaș curbă ( $\Gamma$ ), aceste linii asymptotice sunt drepte.*

6º Dacă se ține seamă că orice suprafață dublu riglată este cuadrică, urmează că *dacă două familii de suprafete desfășurabile circumscrise dealungul celor două familiile asymptotice trec respectiv prin două curbe fixe ( $\Gamma$ ) și ( $\Gamma'$ ), suprafața considerată este de ordinul al doilea.*

*Observare.* Este evident că se poate înlocui în cele ce

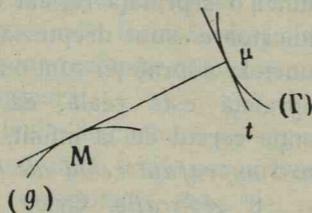


Fig. 126.

preced curba fixă ( $\Gamma$ ) cu o suprafață fixă ( $\Sigma$ ), la care să fie circumscrise suprafetele desfășurabile dealungul asimptoticelor. Se poate deosemenea presupune că cele două curbe ( $\Gamma$ ) și ( $\Gamma'$ ), sunt distincte sau confundate.

7<sup>a</sup> Sa aplicăm cele ce preced la cazul când una din cele două curbe, ( $\Gamma$ ) de ex., este cercul de la infinit. Suprafața este atunci o suprafață riglată cu generatoare izotrope. Asimptotele indicatoarei sunt drepte izotrope, deci indicatoarea este un cerc, punctele suprafetei sunt ombilicuri. Dacă presupunem că această suprafață este reală, ea va fi dublu riglată și cum trebuie să conție cercul de la infinit, ea este o sferă. Deci, *sfera este singura suprafață reală ale cărei toate punctele sunt ombilicuri*.

8<sup>a</sup> *Aplicație.* Orice suprafață de ordinul al doilea fiind dublu riglată, are ca linii asimptotice aceste două sisteme de generatoare. Dar, este evident că suprafața ( $S$ ) formată de normalele principale ale unei curbe strâmbă ( $C$ ) admite această curbă ca linie asimptotică, căci planul osculator al acestei linii ( $C$ ) este evident tangent la suprafața ( $S$ ) [planul osculator este format de normala principală și tangenta în  $M$  la curbă ( $C$ ), cere fiind tangentă la două curbe de pe suprafața ( $S$ ) formează planul tangent la suprafața ( $S$ )]. Deci, *normalele principale ale unei curbe strâmbă nu pot niciodată să formeze o suprafață de ordinul al doilea, ele nu pot niciodată să întâlnească trei drepte fixe, nici să întâlnească două drepte fixe rămânând paralele cu un plan fix*.

9<sup>a</sup> *Aplicație la elicoid șurup patrat.* Exemplu de determinare de linii asimptotice ale unei suprafete riglate. Să considerăm suprafața ( $S$ ) născută de normalele la un cilindru circular dealungul unei elice trasă pe cilindru, suprafață care se numește *elicoid șurup patrat*. Fie  $M$  un punct care descrie elicea. Dacă  $M$  se ridică cu cantitatea  $z$  dealungul axei când raza cilindrului ce trece prin acel punct se rotește de unghiul  $\omega$ , se știe că  $z = h\omega$ . Dar, pentru orice punct însemnat  $M'$  pe raza punctului  $M$ ,  $z$  și  $\omega$  sunt aceleași. Deci acest punct  $M'$  descrie o elice de același pas redus ca și acela al lui  $M$ . Se vede astfel că intersecțiile elicoidului cu cilindrului circular având ca axă axa cilindrului dat, sunt elice de același pas. În fiecare punct al acestei suprafete planul tangent e determinat de tangentă la elice și de generatoarea rectilinie,adică normală la cilindru pe care e trasă elicea; deci acest plan se confundă cu planul osculator la elice. Așa dar, *fiecare din aceste elice este*

*o linie asimptotică a elicoidului.* Cele două liniile asimptotice, elicea și normala la cilindru, sunt ortogonale în fiecare punct; indicatoarea este iperbolă echilateră și, cum vom vedea, suprafața aparține categoriei de suprafețe minime.

**88. Linii de curbură.** 1º Se zice linie de curbură o linie care atinge în fiecare din punctele sale una din cele două axe ale indicatoarei. Din această definiție rezultă că există pe fiecare suprafață o rețea conjugată ortogonală formată de liniile de curbură. Această rețea este totdeauna reală, pe când rețeaua asimptotică este când reală când imaginară.

2º Este ușor de văzut ce sunt liniile de curbură pe suprafețe particulare. Pe o suprafață desfășurabilă, liniile de curbură sunt generatoarele și traectoriile lor ortogonale, ceea ce rezultă din faptul că într'un punct parabolic cele două direcții coincid cu una din direcțiile principale.

3º De aci rezultă o proprietate importantă a liniilor de curbură pentru o suprafață oarecare. În cazul unei *surafețe desfășurabile, normalele la suprafață dealungul unei generatoare* (care formează un sistem de liniile de curbură) formează *un plan, deci o suprafață desfășurabilă*.

Fie o curbă oarecare (C) trăsă pe o suprafață desfășurabilă și două puncte infinit vecine M și M' (Fig. 127), m și m' punctele corespunzătoare ale muchiei de întoarcere. Normalele în M și M' la suprafață sunt perpendiculare pe planele tangente în M și M', adică pe planele osculatoare în m și m' la muchie; deci aceste normale la suprafață în M și M' sunt paralele cu binormalele în m și m' la muchia de întoarcere. Planul normal în m este paralel cu limita către care tinde planul format de binormalele în m și m'. Deci, un plan dus prin normală în M și paralel cu normală în M' este la limită paralel cu planul normal în m, adică cu planul dus prin M perpendicular pe mM. Așa dar, cea mai scurtă distanță dintre normalele în M și M' are ca parte principală distanța de la punctul M' la planul dus prin M perpendicular pe mM. Dar această distanță are ca parte principală produsul lui MM' cu cosinusul unghiului sub care curba (C) tăie pe mM. Însă, pentruca suprafața născută de normalele în M și M' să fie desfășurabilă, trebuie ca cea mai scurtă distanță a lor să fie infinit mic de

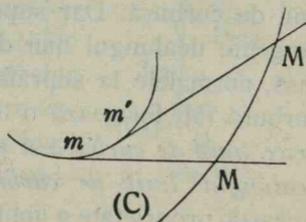


Fig. 127.

un ordin superior; deci trebuie să fie zero cosinusul unghiului sub care curba  $MM'$  tăie pe  $mM$ , adică curba (C) să fie traectoria ortogonală a generatoarelor rectilinii a suprafeței desfășurabile date.

Așa dar, pe o suprafață desfășurabilă, normalele la suprafață dealungul generatoarelor rectilinii și traectoriilor lor ortogonale, nasc suprafețe desfășurabile. Dar, pe o suprafață desfășurabilă, generatoarele rectilinii și traectoriile lor ortogonale formează rețea una ortogonală de linii de curbură. Deci, pentru suprafețele desfășurabile, normalele la suprafață dealungul liniei lor de curbură nasc suprafețe desfășurabile.

Această proprietate a liniilor de curbură are loc și pentru o suprafață oarecare. În adevăr, M fiind un punct al unei linii de curbură a unei suprafețe (S), planul tangent dealungul acestei linii de curbură descrie o suprafață desfășurabilă ( $\Sigma$ ) care conține linia de curbură (M). Dar, caracteristica (G) a planului tangent în M este conjugată cu tangentă în M la linia de curbură. Însă această tangentă MT este o axă a indicatoarei. Caracteristica fiind conjugată în indicatoare cu ea, este cealaltă axă, adică perpendiculară pe MT.

Deci, generatoarea (G) a suprafeței ( $\Sigma$ ) tăie ortogonal curba (M); deci, pe suprafață desfășurabilă ( $\Sigma$ ), (G) și (M) sunt două linii de curbură. Dar suprafețele (S) și ( $\Sigma$ ) au aceleași plane tangente dealungul liniei de curbură și deci și aceleleași normale. Însă, normalele la suprafață desfășurabilă ( $\Sigma$ ) dealungul liniei de curbură (M) formează o suprafață desfășurabilă. Deci, *pentru orice linie de curbură a unei suprafețe, normalele la suprafață dealungul liniei de curbură nasc o suprafață desfășurabilă*. Această proprietate a liniilor de curbură îi poate servi ca definiție.

Dacă se consideră, de ex., o suprafață de rotație, suprafețele născute de normalele dealungul meridianelor sunt plane, cele relative la paralele sunt conuri de rotație. Deci cele două familii de linii de curbură sunt compuse din meridiane și paralelele suprafeței de rotație.

*Observare.* Într'un omobilic, direcțiile principale sunt nedeterminate, liniile de curbură ale uneia din cele două familii se reunesc toate, cum sunt meridianele în vârful unei suprafețe de rotație; acele din a două familie înconjură acest omobilic, ca paralelele în jurul vârfului suprafeței de rotație.

4º Normala MN la suprafață este normală și curbei (M). Dar se știe că punctul de contact al acestei normale cu înfă-

șurătoarea sa este pe dreapta polară a curbei (M) pentru punctul M, adică pe perpendiculara pe planul osculator dusă prin centrul de curbură al curbei (C) în M. Dar, după teorema lui Meusnier, această perpendiculară trece prin centrul de curbură al secțiunii normale conținând pe MT și cum MT este o axă a indicatoarei, această secțiune normală este secțiunea normală principală conținând pe MT. Așa dar, această perpendiculară trece prin centrul de curbură al secțiunii normale principale ce conține pe MT și deci *punctul de contact al normaliei MN cu infășurătoarea sa este centrul de curbură al secțiunii principale ce conține pe MT*. Așa dar, *infășurătoarea normalelor dealungul unei linii de curbură se confundă cu locul centrelor de curbură principale corespunzătoare*.

Pentru că fiecare linie de curbură ( $M_1$ ) admite ca muche de întoarcere ( $C_1$ ) a normalii sale (suprafața desfășurabilă născută de normalele la suprafață dealungul acestei曲) locul centrelor de curbură principală ( $C_1$ ) corespunzătoare, dacă se consideră toate liniile de curbură ale unui aceluiasi sistem cu ( $M_1$ ), muchile de întoarcere ( $C_1$ ) (Fig. 128) nasc o suprafață ( $\Sigma_1$ ) la care toate normalele suprafetei (S) date sunt tangente, pentru că sunt tangente fiecare la o curbă ( $C_1$ ) a suprafetei ( $\Sigma_1$ ). De asemenea, locul curbelor ( $C_2$ ) ale centrelor de curbură principale corespunzătoare sistemului al doilea ( $M_2$ ) de linii de curbură nasc o suprafață ( $\Sigma_2$ ) la care toate normalele suprafetei (S) sunt tangente.

Deci, *toate normalele suprafetei (S) sunt tangente deodată la părțile ( $\Sigma_1$ ) și ( $\Sigma_2$ ), amândouă constituind desfășurata suprafaței (S)*.

5º Să determinăm planul tangent la această desfășurată în fiecare din punctele  $C_1$  și  $C_2$ . Considerând mai întâi punctul  $C_1$  (Fig. 128), se vede că normala MN rămânând tangentă la ( $C_2$ ), ea naște o suprafață desfășurabilă. Cum rămâne tangentă la ( $\Sigma_1$ ), desfășurabila pe care ea o naște este circumscrisă la această suprafață, al cărei plan tangent în  $C_1$  este același ca cel tangent la desfășurabilă dealungul generatoarei  $C_2M$ . Dar, acest plan tangent în M e determinat de generatoarea  $C_2M$  și tangentă  $MT_2$  la curba ( $M_2$ ) pe care o descrie M, adică planul

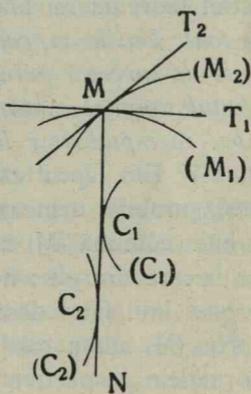


Fig. 128.

principal  $NMT_2$ . De asemenea, planul tangent la  $(\Sigma_2)$  în  $M_2$ , este planul principal  $NMT_1$ . Deci, *planul tangent la desfășurată în fiecare din centrele de curbură principală, situate pe aceeași normală, este planul principal corespunzător la celalt.*

Să observăm că aceste plane tangente sunt perpendiculare și cum planul  $NMT_1$ , tangent la desfășurabila a cărei muchie este  $(C_1)$  este osculator la această muchie în  $C_1$ , unde planul tangent la desfășurată este  $NMT_2$ , urmează că *curbele  $(C_1)$  și  $(C_2)$  sunt astfel că în fiecare din punctele lor planul lor osculator este normal la desfășurata suprafeței.*

6º Dacă punctul  $M$  se mișcă pe o curbă oarecare a suprafeței ce trece prin  $M$ , normala  $MN$  nu mai naște o desfășurabilă, dar pentru că ea rămâne tangentă la  $(\Sigma_1)$  și  $(\Sigma_2)$ , planele tangente la suprafața pe care o nasc sunt aceleași ca cele tangente la  $(\Sigma_1)$  și  $(\Sigma_2)$  în  $C_1$  și  $C_2$ , adică  $MT_2N$  și  $MT_1N$ . Avem astfel teorema lui Mannheim, *toate normalile corespunzătoare la toate liniile suprafeței ce trec prin  $M$  se racordează în centrele de curbură principale  $C_1$  și  $C_2$  situate pe normala în  $M$ , planul tangent comun în fiecare dintre ele fiind planul principal corespunzător la celalt.*

7º Din faptul că dealungul liniei de curbură, normalia este desfășurabilă, urmează importante proprietăți. Să considerăm o linie comună ( $M$ ) la două suprafețe, care este linie de curbură pe fiecare din ele; normalile la cele două suprafețe dealungul acestei linii fiind desfășurabile, cele două familii de normale la curba ( $M$ ) admit căte o desfășurată și deci (No. 80, observarea I) normalele respective în fiecare punct al curbei ( $M$ ) fac un unghi constant. Așa dar, *cele două suprafețe se tăie dealungul liniei ( $M$ ) sub un unghi constant.*

Se vede, de asemenea, că dacă două suprafețe se tăie sub un unghi constant după o linie care este linie de curbură pentru una din ele, este de asemenea și pentru cealaltă.

Acestea sunt proprietățile lui Ioachimsthal.

Ca un caz particular, se vede că dacă o suprafață ( $S'$ ) este circumscrisă unei suprafețe ( $S$ ) dealungul unei linii de curbură ( $M$ ) a suprafeței ( $S$ ), suprafața ( $S'$ ) admite și ea linia ( $M$ ) ca linie de curbură.

8º Orice linie trăsă pe un plan sau pe sferă putând fi privită ca o linie de curbură a planului sau a sferei, se vede că, dacă un plan sau o sferă tăie o suprafață ( $S$ ) dealungul unei curbe ( $M$ ) sub un unghi constant, această curbă ( $M$ ) este o

*linie de curbură a lui (S) și reciproc, dacă o linie de curbură (M) a unei suprafețe (S) este plană sau sferică, planul sau sfera care conține (M) întâlneste suprafața (S) dealungul acștei linii subt un unghi constant.*

**89. Exemple de determinare geometrică a liniilor de curbură.** Am văzut că liniile de curbură a suprafețelor desfășurabile sunt generatoarele și traectoriile lor ortogonale (desfășurătoarele muchii de întoarcere a acestei desfășurabile). Dacă desfășurabila este suprafață de egală pantă în raport cu orizontul, al doilea sistem de liniile de curbură este dat de secțiunile sale orizontale.

Pentru un con, al doilea sistem de liniile de curbură, traectoriile ortogonale ale generatoarelor sunt intersecțiile conului cu sfere având centrul în vârful conului.

*Considerând suprafață infășurătoare de sfere, cercul după care această suprafață este atinsă de fiecare sferă este o linie de curbură a acestei suprafețe și reciproc, orice suprafață posedând un sistem de liniile de curbură circulare este o suprafață infășurătoare de sfere.*

Fie N centrul sferei variabile descriind curba (N). Se vede că toate normalele la suprafață dealungul cercului de contact (M) al sferei și al suprafeței [situat în planul normal la (N) în punctul N] trec prin centrul N care constituie desfășurata ( $\gamma$ ) a liniilor de curbură (M). Centrul N este deci deodată centrul de curbură principală pentru toate secțiunile normale tangente la cercul (M). Deci, în acest caz, pânza ( $\Sigma$ ) a desfășuratei a suprafeței se reduce la curba (N).

Ca exemplu de suprafețe infășurătoare de sfere, putem cita cazul când razele sferelor au o valoare constantă, când suprafață se zice *suprafață canal*, și apoi cazul când locul (N) al centrelor sferelor este o linie dreaptă, când *suprafață* se zice *de rotație*.

Se vede deci că suprafețele de rotație admit ca liniile de curbură: 1) paralelele (cercurile de contact cu sferele infășurate), astfel că pentru toate punctele ale unui același paralel centrul de curbură principal corespunzător este vârful conului normalelor; 2) meridianele, care sunt traectoriile ortogonale, astfel că pentru fiecare din punctele sale, centrul de curbură principal corespunzător este acela al meridianului însuși (al cărui plan este normal la suprafață).

Să considerăm suprafața de rotație, născută din rotația

unei chaînette în jurul bazei sale, numită *catenoidă (aliseidă)*. Fie C centrul de curbură intr'un punct al unei chaînette și N punctul unde normala MN tăe baza, să știe că  $CM = MN$ . Razele de curbură principală pentru catenoidă sunt, MC pentru meridian (chaînette) și MN pentru paralelul descris de M. Cum  $MN = CM$ , C și N fiind simetrice în raport cu M, urmează că pentru catenoidă, razele de curbură principale sunt egale și de semn contrar.

Pentru *tor*, raza de curbură principală corespunzătoare paralelului este lungimea normalei limitată la axă, aceea care corespunde meridianului, este raza cercului meridian.

Torul este de altfel, un caz particular al suprafeței ale cărei linii de curbură sunt circulare în ambele sisteme, numită *ciclida lui Dupin*. Dealungul fiecareia din liniile de curbură care se tăe intr'un punct al ciclidei, sunt sfere, de unul și celalt sistem, care sunt tangente la suprafață; aceste două sfere sunt deci tangente între ele în punctul considerat. Rezultă că, fiecare sferă din unul din cele două sisteme este tangentă la toate sferele celuilalt sistem. Dar, trei, oarecare din sferele sistemului al doilea pot determina ansamblul  $\infty^1$  al tuturor celor din primul sistem. Se poate deci zice că *ciclida este înfășurătoarea tuturor sferelor tangente la trei sfere date*.

Fie  $(C)$  o linie de curbură a suprafeței  $(S)$  și  $(D)$  desfășurabilă circumscrisă la  $(S)$  dealungul lui  $(C)$  [înfășurătoarea planelor tangente la  $(S)$  dealungul lui  $(C)$ ], desfășurabilă ale cărei toate generatoarele rectilinii  $G$ , în virtutea teoremei direcțiunilor conjugate, sunt pretutindeni ortogonale lui  $(C)$  și care, în baza teoremei lui Ioachimsthal, admite de asemenea pe  $(C)$  ca linie de curbură. Prin inversiune, dreptele  $G$  dau pe suprafață  $(D')$  inversă lui  $(D)$ , cercuri  $(G')$  dealungul căroro sunt circumscrise lui  $(D')$  sterele inverse ale planelor tangente la  $(D)$  dealungul generatoarelor  $(G)$ ; aceste cercuri  $(G)$  sunt (în virtutea aceleiași teoreme a lui Ioachimsthal) lini de curbură ale lui  $(D')$  și prin urmare, inversa  $(C')$  a lui  $(C)$ , care le este ortogonală din cauza conservării unghiurilor, este de asemenea o linie de curbură a suprafeței  $(D')$  și cum suprafețele  $(D')$  și  $(S')$  se racordează dealungul lui  $(C')$ , după cum  $(D)$  și  $(S)$  dealungul lui  $(C)$ ,  $(C')$  este de asemenea o linie de curbură a lui  $(S')$ .

Rezultă de aci teorema lui *Fouché*, *inversiunea conservă liniile de curbură*.

În particular, dacă se transformă prin inversiune o supra-

față, ale cărei cele două sisteme de linii de curbură sunt circulare, se obține o suprafață care se bucură de aceeaș proprietate; deci, inversa unei ciclide a lui Dupin este o ciclidă a lui Dupin.

Putem aranja polul de inversiune ca această inversă să fie un tor. În adevăr, fie  $(S_1)$ ,  $(S_2)$ ,  $(S_3)$  cele trei sfere fixe la care rămân tangente sferele  $(\Sigma)$  a căror infășurătoare este ciclida considerată. Planul centrelor acestor trei sfere le tăie după trei cercuri admitând un cerc ortogonal comun  $(\Gamma)$ , care are ca centru centrul lor radical; cercul  $(\Gamma)$  este ortogonal celor trei sfere. Luând ca pol orice punct al acestui cerc, sferele  $(S_1)$ ,  $(S_2)$ ,  $(S_3)$  se transformă în sferele  $(S'_1)$ ,  $(S'_2)$ ,  $(S'_3)$  ortogonale dreptei  $\Delta$ , transformată lui  $(\Gamma)$ , deci având centrele pe această dreaptă  $\Delta$ . Suprafața transformată a ciclidei este deci infășurătoarea sferelor  $(\Sigma')$  tangente la cele trei sfere  $(S'_1)$ ,  $(S'_2)$ ,  $(S'_3)$  și se vede că aceste sfere admit ca infășurătoare un tor de axă  $\Delta$ ; deci, orice ciclidă a lui Dupin poate într-o infinitate de moduri să fie inversa unui tor.

**90. Torsiune geodezică. Teorema lui Dupin asupra sistemelor triple ortogonale.** I. Fie  $M$ ,  $M'$  două puncte infinit vecine ale unei curbe  $(M)$  trasă pe o suprafață  $(S)$ . Josef Bertrand a numit deviație dealungul elementului  $MM'$ , unghiul  $d\psi$  pe care îl face normala  $MZ'$  în  $M'$  la suprafață cu planul determinat în  $M$  de normala  $MZ$  la suprafață și tangenta  $MT$  la curba  $(M)$ .

Însemnând cu  $ds$  elementul de arc al curbei  $(M)$  în  $M$ , limita raportului  $\frac{d\psi}{ds}$  se zice *torsiune geodezică* în  $M$  a curbei  $(M)$  care aparține suprafeței  $(S)$ . Pentru a găsi valoarea acestei torsioni, să observăm că într-o regiune infinit mică, considerată în jurul lui  $M$ , normalele la suprafață se confundă, afară de infiniti nici de ordinul al doilea, cu acelea ale paraboloidului (No. 85).

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2},$$

$R_1$  și  $R_2$  fiind razele de curbură principale în  $M$  la suprafața  $(S)$ .

Deci, din punct de vedere infinitezimal, se poate lua ca cosinusuri directoare ale normalei în  $M'$ , valorile

$$\frac{x}{R_1}, \frac{y}{R_2}, -1.$$

Să însemnăm cu  $\varphi$  unghiul format de tangentă în M cu întâia direcție principală în M pe suprafață. Perpendiculara în M pe MT în planul tangent în M la suprafață, este normală la planul TMZ și are ca cosinusuri directoare

$$-\sin\varphi, \cos\varphi, 0.$$

Sinusul unghiului  $d\psi$  format de normală  $M'Z'$  și planul TMZ este cosinusul unghiului normalei  $M'Z'$  cu normala la planul TMZ și deci

$$\sin\psi = \frac{x}{R_1}(-\sin\varphi) + \frac{y}{R_2}(\cos\varphi) + (-1)(0),$$

și înlocuind  $\sin d\psi$  prin  $d\psi$ , de care diferă cu un infinit mic de ordinul al treilea, avem

$$d\psi = -\frac{x \sin\varphi}{R_1} + \frac{y \cos\varphi}{R_2}.$$

Dar, punctul  $(x, y)$  considerat din planul tangent fiind foarte apropiat de punctul M, luat ca origină,  $x$  și  $y$  sunt proiecțiile arcului MM', deci

$$x \leftarrow ds \cos\alpha, \quad y \leftarrow ds \sin\alpha,$$

și deci formula de mai sus devine la limită

$$d\psi = \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin\varphi \cos\varphi ds,$$

sau

$$\frac{d\psi}{ds} = \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin\varphi \cos\varphi,$$

astfel că avem o expresiune a torsionei geodezice  $\frac{d\psi}{ds} = G$ ,

$$G = \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin\varphi \cos\varphi.$$

Această expresiune arată că în orice punct a unei linii de curbură avem  $\varphi=0$ , sau  $\varphi=90^\circ$ , deci  $G=0$ , și reciproc.

De asemenea, dacă două linii ce trec printr'un punct al suprafeței se tăie sub un unghi drept, avem între curburile lor geodezice,  $\varphi$  fiind unghiul corespunzător primei și  $\varphi'=90+\varphi$  unghiul corespunzător celei de a două,

$$G' = \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin\varphi' \cos\varphi' = \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin(\varphi+90) \cos(\varphi+90) = -G,$$

$$(8) \qquad G + G' = 0.$$

Să căutăm o altă expresiune a torsionei geodezice. Să considerăm un punct M al suprafeței (S) (Fig. 129), normala MZ la suprafață și normala principală MN la curba (M) trasă pe suprafață. Prin punctul M să ducem paralelele  $MZ'_1$ ,  $MN'_1$  la normalele de acelaș fel în punctul infinit vecin  $M'$  și să le proiectăm în  $MZ'_0$ ,  $MN'_0$  pe planul MZN.

Stim că proiecția unui unghi pe un plan care face cu planul unghiului un unghi infinit mic este un infinit mic echivalent. Deci însemnând cu  $\omega$  unghiul NMZ, atunci unghiiurile  $N'_0MZ'_0$ ,  $Z'_0MZ$ ,  $N'_0MN$  sunt respectiv echivalente cu  $\omega + d\omega$ ,  $d\psi$ ,  $d\tau$  [unghiul de torsionă al curbei (M)]. Dar pe figură se vede

$$\omega + d\omega + d\psi = \omega + d\tau,$$

deci

$$d\psi = d\tau - d\omega,$$

și divizând cu  $ds$ , avem

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d\tau}{ds} - \frac{d\omega}{ds},$$

și deci o altă expresie dată de Ossian Bonnet a curburei geodezice,

$$(9) \quad G = \frac{1}{T} - \frac{d\omega}{ds},$$

unde T este raza de torsionă a curbei (M) și  $\omega$  fiind unghiul format de normala la suprafață în M cu normala principală în M la curbă (M).

Pentru a doua suprafață (S') ce trece prin (M), avem de asemenea

$$G' = \frac{1}{T} - \frac{d\omega'}{ds}.$$

De unde

$$G - G' = \frac{d\omega'}{ds} - \frac{d\omega}{ds},$$

$$(10) \quad G - G' = \frac{dV}{ds},$$

V fiind unghiul celor două suprafețe în M.

De aici rezultă că, dacă unghiul V este constant dealungul curbei (M), avem pentru orice punct al liniei (M),  $G = G'$ . Dacă în aceleasi condiții, avem  $G = 0$ , avem de asemenea  $G' = 0$ . Regăsim astfel teorema lui Ioachimsthal că dacă două supra-

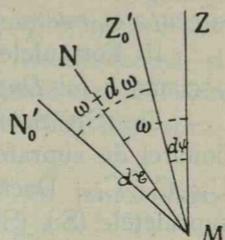


Fig. 129.

fete se tăe dealungul unei linii comune (M) subt un unghi constant, și dacă linia (M) este linie de curbură pentru prima suprafață, este și pentru a doua.

II. Formulele (9) și (10) ne permit a stabili o teoremă importantă a lui Dupin asupra sistemelor triple ortogonale.

Fie  $(S_1), (S_2), (S_3)$  trei familii (formând fiecare o simplă infinitate) de suprafețe, săndu-se două câte două după curbele  $C_{12}, C_{23}, C_{31}$ . Dacă dealungul fiecăreia din aceste curbe  $C_{ij}$ , suprafețele  $(S_i), (S_j)$  la care aparțin, se tăe subt un unghi drept, ansamblul format de aceste trei familii de suprafețe constituie un *sistem triplu ortogonal*. Dacă convenim a reprezenta prin  $G_{ij}$  și  $G_{ji}$  torsunile geodezice într'un punct al curbei  $C_{ij}$ , după cum este considerată pe suprafața  $(S_i)$  sau  $(S_j)$ , avem, în virtutea relației (10),

$$(11) \quad G_{12} - G_{21} = 0, \quad G_{23} - G_{32} = 0, \quad G_{31} - G_{13} = 0.$$

De altă parte, se vede că în fiecare punct M comun suprafețelor  $(S_1), (S_2), (S_3)$ , tangentele la curbele  $C_{12}, C_{23}, C_{31}$  formează un triedru tridreptunghic; de unde, în baza relației (8),

$$(12) \quad G_{12} + G_{13} = 0, \quad G_{23} + G_{21} = 0, \quad G_{31} + G_{32} = 0.$$

Atribuind ecuațiilor (11) respectiv semnele  $++-$ , iar celor din (12) respectiv  $+-+$ , adunându-le, avem  $2G_{12} = 0$ , adică  $G_{12} = 0$ , și deci toate curbele  $C_{ij}$  sunt linii de curbură pentru suprafețele  $(S_i), (S_j)$  la care aparțin. De unde urmează că *intersecțiile a două suprafețe din două familii diferite a unui sistem triplu ortogonal, sunt linii de curbură a acestor suprafețe*.

De aci urmează că se pot deduce imediat liniile de curbură ale cuadricelelor. În adevăr, orice cuadică aparține la un sistem omofocal constituit din trei familii particulare (elipsoizi, iperboloizi cu o pânză, iperboloizi cu două pânze), astfel că, de la o familie la alta, suprafețele se tăe subt un unghi drept dealungul liniilor lor comune de intersecție. Aceste trei familii formează deci un sistem triplu ortogonal, și după teorema lui Dupin, se vede că liniile de curbură ale uneia oarecare din suprafețele sistemului sunt date de intersecțiile sale cu toate suprafețele celorlalte două familii la care această suprafață nu aparține.

**91. Suprafețe minime.** Condiția ca indicatoarea într'un punct oarecare al suprafeței să fie o iperbolă echilateră, se exprimă printr'o condiție unică, de unde urmează că pe orice

suprafață există o linie de puncte iperbolice, astfel că pentru fiecare punct al acestei linii curburile principale să fie egale și de semne contrare (opuse,  $R_1 = -R_2$ ). Se zice *suprafață minimă* o suprafață pentru care această linie este nedeterminată și pentru care *cele două familii de linii asymptotice se tăie pretutindeni sub un unghi drept*. Vom determina două din suprafețele minime.

1º *Suprafață minimă de rotație*. Fie M un punct oarecare al unui meridian situat în planul figurei (Fig. 130), MN normală limitată la axa de rotație. MN este egală, după teorema lui Meusnier, cu raza de curbură normală relativă la paralelul punctului M. A două rază de curbură principală este egală cu raza de curbură MC a meridianului. Deci, dacă suprafață este minimă, vectorii MN și MC sunt egali și de semn contrar și meridianul este o curbă chainette. Deci, *suprafață minimă de rotație este aceea născută de chainette care se învârtește în jurul bazei sale*. Această suprafață se zice *catenoidă sau aliseidă*.

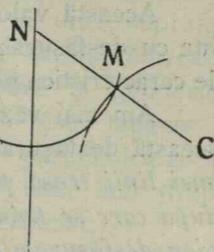


Fig. 130.

2º *Suprafață minimă riglată*. Fie M un punct oarecare

al unei suprafețe riglate (Fig. 131), (G) și (C) generatoarea rectilinie și curba asymptotică ce trece prin acest punct, MT tangentă la (C). Planul TMG tangent la suprafață este osculator la (C).

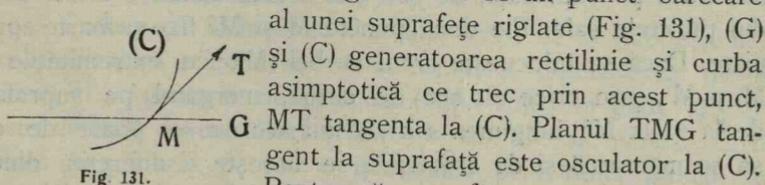


Fig. 131.

Pentru că suprafață este riglată, și al doilea sistem de linii asymptotice este format de generatoare, ca suprafață să fie minimă, trebuie ca asymptoticele să se tăie sub un unghi drept; deci G să fie perpendiculară pe MT, adică normală principală a curbei (C). Dacă această proprietate se extinde pentru toate asymptoticele, dreptele G sunt normale principale ale unei infinități de linii. Aceste linii sunt (No. 79, 3º) elice. Deci, *singura suprafață minimă este elicoidul strâmb cu plan director*.

**92. Linii geodezice.** I. Să considerăm o curbă (M) trăsă pe o suprafață și să o proiectăm pe planul tangent în punctul M al suprafeței. Curbura proiecției se zice *curbura tangențială* și are ca valoare  $\frac{1}{R_1}$  dată de formula (No. 74)

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{\cos^3\varphi}{R_1},$$

R fiind raza de curbură a curbei (M),  $\theta$  unghiul făcut de planul osculator al curbei (M) cu planul tangent la suprafață (planul de proiecție),  $\varphi$  unghiul făcut de planul de proiecție cu tangenta MT la curba (M). Planul de proiecție trecând prin tangenta MT,  $\varphi=0$ , deci curbura tangențială are ca valoare  $\frac{\cos\theta}{R}$ .

Această valoare rămâne aceeaș când se înlocuește suprafață cu desfășurabilă circumscrisă dealungul curbei (M) [născută de caracteristica planului tangent la suprafață dealungul linii (M)].

Am mai văzut (No. 75) că ea se conservă când se aplică această desfășurabilă pe un plan. Deci, *curbura tangențială a unei linii trasă pe o suprafață este egală cu aceea a liniei plane după care se transformă această curbă când se aplică pe un plan desfășurabilă circumscrisă*. De aceea această curbură se zice și *curbura de desfășurare*. Se mai zice și *curbura geodezică*.

Am văzut de asemenea că o linie geodezică pe o desfășurabilă se bucură de proprietatea că are curbura tangențială nulă în toate punctele sale. Această proprietate se extinde ușor pentru o suprafață oarecare. Să considerăm, în adevăr, o linie (M) trasă pe suprafață, de cea mai scurtă distanță între două din punctele sale. Fie două puncte M și M' fixe și foarte apropiate. Dacă se înlocuește arcul curbei (M), cu extremitățile în M și M', prin orice alt arc de curbă, mergând pe suprafață de la M la M', lungimea s a acestui arc nu se poate de căt să se mărească și de asemenea se mărește și diferența dintre arcul s și lungimea c a coardei fixe MM'. Dar, această diferență este de același ordin de mărime ca și  $c^3$  și cum c este infinit mic, va trece într'un minimum în același timp ca partea sa principală  $\frac{c^3}{24R^2}$ , R fiind raza de curbură a liniei modificate.

Dar, dacă numim cu  $R_n$  raza de curbură normală în M, care este aceeaș pentru toate curbele ce trec prin M și M',  $\alpha$  unghiul planului osculator variabil cu planul ce trece prin tangentă MT și normala la suprafață în M, după teorema lui Meusnier, avem (No. 84)  $R=R_n \cos\alpha$ . Diferența  $s-c$  atinge deci minimul său când  $\cos\alpha$  este cel mai mare, adică  $\alpha=0$ , sau că planul osculator să se confundă cu planul ce trece prin normala MN, adică să fie perpendicular pe planul tangent la suprafață (S) în M. Deci, pentru curba (M) geodezică, de cea mai

scurtă distanță dintre două oarecare din punctele sale, planul osculator în orice punct este normal la suprafață (perpendicular pe planul tangent la suprafață). Dar unghiul  $\alpha$  este complementar cu unghiul  $\theta$  ce intră în formula curburei tangențiale,  $\frac{\cos\theta}{R}$ . Cum, pentru geodezică avem  $\alpha=0$ , urmează  $\theta=90^\circ$ , deci, dealungul unei geodezice curbura tangențială este nulă.

Rezultă că un fir întins între două puncte ale suprafeței, de partea convexității suprafeței, se așează după o geodezică și, în particular, orice generatoare rectilinie a unei suprafețe este o geodezică. S-ar părea că este arbitrar faptul că în cazul generatoarelor rectilinii, ele sunt și asymptotice și geodezice, căci, în cazul asymptoticelor, planul osculator este tangent și în cazul geodezicelor, planul osculator este perpendicular pe planul tangent al suprafeței. Dar, în cazul unei linii drepte (generatoarelor) planul osculator este nedeterminat.

II. *Proprietăți.* Faptul că geodezicele constituie drumul cel mai scurt între punctele sale pe o suprafață, aceste curbe joacă, în geometria pe o suprafață, același rol ca linia dreaptă în geometria plană.

În cele ce urmează vom enunța propozițiile fundamentale ale teorii geodezicelor<sup>(1)</sup>, adeverindu-le sumar prin câteva simple considerații geometrice.

Trebue de la început să admite (ceea ce se stabilește ușor în Analiză) că o geodezică este complet determinată de un punct și tangentă în acest punct (după cum, în plan, dreapta este definită de un punct și direcția sa). De asemenea, că nu trece, în general, de căt o geodezică prin două puncte ale suprafeței (mai clar, pentru o lungime inferioară la o limită determinată, purtată pe fiecare geodezică plecând de la punctul M, nu trece prin M și extremitatea acestei lungimi nici o geodezică de o lungime mai mică).

1º Dacă pe toate geodezicele ce trăiesc prin același punct M se iau arce egale, locul extremităților acestor arce este o curbă normală la toate aceste geodezice.

În adevăr, fie PM și PM' două geodezice infinit vecine (Fig. 132), pe care

luăm arcele egale PM și PM'. Dacă arcul infinit mic MM' al locului

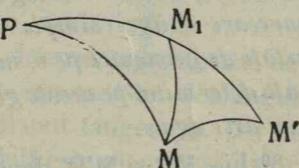


Fig. 132.

<sup>(1)</sup> Pentru studiul complet, a se vedea Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, cap. IV, carteia V.

Iui M n'ar fi normal la PM și PM', unul din unghurile făcute de acest arc cu geodezicele, cel din M, ar fi obtus, celalt în M', ascuțit. Să ducem prin M arcul de geodezică MM<sub>1</sub> ortogonal în M la MM'. În triunghiul infinit mic MM<sub>1</sub>M', care poate fi asimilat, afară de infiniti mici de ordinul al treilea, cu un triunghi plan, avem  $MM_1 < M_1M'$ . Deci, am avea  $PM_1 + M_1M < PM'$ , sau de căt PM, căci  $PM' = PM$ , ceea ce nu se poate fiind că PM fiind arc de geodezică este cel mai scurt drum între P și M. Se conchide deci că MM' este ortogonal în M la PM.

*2º Dacă pe fiecare din geodezicele normale la o curbă oarecare trasă pe o suprafață se iau arce egale, locul extremităților acestor arce este o curbă normală la toate aceste geodezice.*

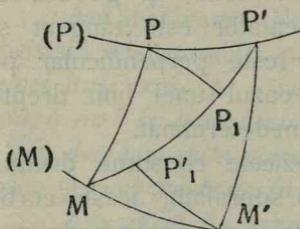


Fig. 133.

Fie PM și P'M' două arce de geodezică infinit vecine, egale între ele, normale la curba (P) în P și P' (Fig. 133). Să ducem geodezica MP' și să luăm pe această curbă arcul MP<sub>1</sub> egal cu MP. După teorema precedentă, arcul

PP<sub>1</sub> de curbă geodezică, ortogonal în P la MP, este tangent la (P). Deci arcul P<sub>1</sub>P' este infinit mic de ordinul al doilea, diferența  $P'M - P'M' = P_1P'$  este ea de ordinul al doilea, aşa că, luând ca și pentru PM, o lungime  $P'P_1 = P'M'$ , urmează că  $MP_1 = P_1P'$  este de ordinul al doilea, deci arcul P'<sub>1</sub>M' normal în M' la P'M' este tangent arcului MM', sau că P'M' este normal în M' la curba (M) descrisă de M. Curba (M) astfel obținută se zice *paralelă* cu (P).

Observând că curbele (P) și (M) sunt traectorii ortogonale ale sistemului de geodezice PM și că printr'un punct M nu trece de căt una din aceste traectorii ortogonale, se deduce că *două traectorii ortogonale oarecare a unei simple infinități de geodezice pe o suprafață determină pe aceste geodezice arce egale.*

*3º Fie MP și M'P' două poziții infinit vecine ale unui arc geodezic (Fig. 134). Să ducem prin M' și P' arcele de traectorie ortogonală M'M<sub>1</sub>, P'P<sub>1</sub>. Din cele de mai sus,  $M'P' = M_1P_1$ .*

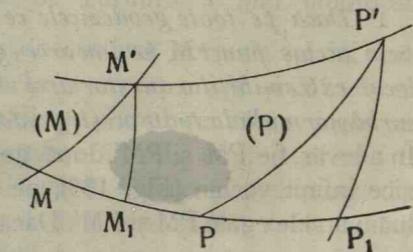


Fig. 134.

Deci

$$d(MP) = M_1 P_1 - MP = PP_1 - MM_1,$$

și cum triunghiurile  $MM'M_1$ ,  $PP'P_1$  pot fi assimilate cu triunghiuri plane, avem

$$d(MP) = d(P) \cos P_1 PP' - d(M) \cos M_1 MM',$$

formulă care dă variația de lungime a unui arc de geodezică pe o suprafață analog ca pentru variația de lungime a unui segment de dreaptă.

4º Dacă suma sau diferența distanțelor geodezice a unui punct  $M$  variabil pe o suprafață la două puncte fixe  $P$  și  $Q$  a acestei suprafețe este constantă, tangenta la curba  $(M)$  pe care o descrie acest punct este bisectoarea exterioară sau interioară a unghiului ce fac între ele arcele geodezice  $PM$  și  $QM$ . În adevăr, în cazul sumei constante, avem (Fig. 135)

$$d(PM) + d(QM) = 0,$$

și după proprietatea precedentă

$$d(M) \cos Q_1 MM' + d(M) \cos P_1 MM' = 0,$$

adică

$$Q_1 MM' + P_1 MM' = \pi,$$

și deci proprietatea este demon-  
strată.

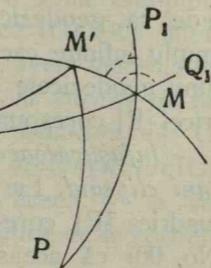


Fig. 135.

Demonstrație analoagă pentru cazul diferenței constante

Curbele  $(M)$ , corespunzătoare la una sau alta din aceste ipoteze, au fost numite de Darboux, elipse sau iperbole geodezice, iar  $P$  și  $Q$  focare geodezice.

III. Determinarea geodezicelor unui elipsoid. Să ne închipuim pe un elipsoid  $[M]$  o linie  $(M)$  astfel ca tangentă în fiecare din punctele sale  $M$  să fie tangentă la o quadrică  $[P]$  omofocală cu  $[M]$ . Această tangentă naște o desfășurabilă circumscrisă lui  $[P]$  dealungul liniei  $(P)$  ce descrie punctul său de contact  $P$  cu această quadrică. Planul său tangent dealungul generatoarei  $MP$  se confundă deci cu planul tangent la  $[P]$  în  $P$ ; dar acest plan tangent la desfășurabilă este planul osculator la muchia de întoarcere  $(M)$  și cum după o teoremă cunoscută planul tangent la  $[P]$  în  $P$  este perpendicular pe planul tangent în  $M$  la  $[M]$  (căci suprafețele sunt omofocale), se poate zice că planul osculator în  $M$  la curba  $(M)$  este normal în acest punct la elipsoidul  $[M]$ .

Această proprietate având loc pentru toate punctele curbei  $(M)$ , rezultă, în baza celor de mai sus, că *curba  $(M)$  este o geodezică a elipsoidului  $[M]$* .

Deci, *toate liniile care formează o simplă infinitate trase pe  $[M]$ , ale căror tangente sunt tangente la cuadrica  $[P]$  omo-focală cu  $[M]$  sunt geodezicele suprafeței  $[M]$* .

Cum cuadricele  $[P]$  formează ele însă-lă o simplă infinitate, se vede că se obțin astfel sistemul dublu infinit al geodezicelor elipsoidului  $[M]$ .

Fiecare cuadrică  $[P]$ , fiind complet determinată de valoarea parametrului  $\lambda$ , care intră în ecuația sa,

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1,$$

când o raportăm la axele principale ale elipsoidului  $[M]$ , se vede că geodezicele lui  $[M]$  pot fi astfel grupate în sisteme simplu infinite caracterizate fiecare cu o valoare a lui  $\lambda$ . Vom numi geodezicele  $g(\lambda)$  acelea care se obțin cu ajutorul cuadricei  $[P]$  corespunzătoare acestei valori ale lui  $\lambda$ .

*Înfăsurătoarea geodezicelor ale unei aceeaș familii ale unui elipsoid.* Fie  $e(\lambda)$  linia de intersecție a elipsoidului  $[M]$  cu cuadrica  $[P]$  corespunzătoare la o valoare dată lui  $\lambda$ . Se știe (No. 90) că această curbă este o linie de curbură a lui  $[M]$ . Dar, fiecare tangentă la această linie  $e(\lambda)$  fiind tangentă deodată la  $[M]$  și  $[P]$ , este tangentă la o geodezică  $g(\lambda)$ .

Reciproc, printre tangentele MP la o geodezică  $g(\lambda)$ , există una pentru care punctele M și P se confundă; aceasta este atunci tangentă la  $e(\lambda)$ . Rezultă că *geodezicele  $g(\lambda)$  au ca infăsurătoare linia de curbură  $e(\lambda)$  intersecția lui  $[M]$  și  $[P]$* .

Dacă vom a ști câte geodezice  $g(\lambda)$  trec printr'un punct M dat pe  $[M]$ , va fi deajuns să observă că tangentele în M la aceste geodezice, fiind în acelaș timp tangente la  $[P]$ , sunt intersecțiile planului tangent în M la  $[M]$  cu conul cu vârful M circumscris la  $[P]$ ; sunt deci două. Dar, cum aceste două geodezice au ca infăsurătoare linia de curbură  $e(\lambda)$ , se poate zice că prin fiecare punct M al elipsoidului  $[M]$  trec două geodezice tangente la o aceeaș linie de curbură  $e(\lambda)$  dată.

### APLICAȚII.

**93. Cuadrică osculatoare.** Să considerăm o suprafață riglată ( $\Sigma$ ) și o generatoare ( $G$ ) a sa. Putem face ca cuadrica

de racordare dealungul lui G (No. 69) să treacă prin a doua generatoare infinit vecină  $G'$  a suprafeței  $(\Sigma)$ . Va fi de ajuns a lăua pentru directoare  $(D_1)$ ,  $(D_2)$ ,  $(D_3)$  dreptele unind punctele  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  ale generatoarei  $(G)$  cu acelea unde planele tangente la  $(\Sigma)$  în aceste puncte sunt întâlnite respectiv de  $(G')$ . În particular, dacă se ia pentru  $(G')$  generatoarea lui  $(\Sigma)$  infinit vecină de  $(G)$  și se trece la limită, se vede că se obține o cuadrică  $(Q)$ , astfel că toate secțiunile sale și acelea ale lui  $(\Sigma)$  prin aceleasi plane au aceeaș curbură în punctul lor comun situat pe  $(G)$ . În adevăr, înainte de a ajunge la limită, aceste două secțiuni au în comun punctul  $M$  cu tangentă în  $M$  (situată în planul tangent comun în  $M$ ) și punctul infinit vecin  $M'$  pe  $(G')$ . Rezultă că cele două suprafețe au aceeaș indicatoare în fiecare punct  $M$  al lui  $(G)$ ; dar asimptotele acestei indicatoare sunt pentru  $(Q)$  generatoarea  $(G)$  și generatoarea de al doilea sistem trecând prin  $M$ ; pentru  $(\Sigma)$ , a două asimptotă este tangentă în  $M$  la curba, care împreună cu  $(G)$  este intersecția suprafeței cu planul său tangent. Deci, avem teorema lui Chasles, *tangentele în punctele situate pe  $(G)$  la curbele de intersecție a suprafeței  $(\Sigma)$  cu planele tangente dealungul lui  $G$ , nasc o cuadrică care se zice osculatoare la  $(\Sigma)$  dealungul lui  $(G)$ .* (Cuadrica osculatoare aici nu este identică cu aceea ce ar rezulta când s'ar extinde la suprafețe aceeaș noțiune de la curbele plane).

*Aplicație la demonstrarea geometrică a proprietății asimptoticelor unei suprafețe riglate.* Orice linie trăsă pe o suprafață este o asimptotică a acestei suprafețe, căci orice secțiune normală dusă prin această dreaptă având raza de curbură infinită, aceasta este, în fiecare din punctele sale, asimptotă la indicatoarea corespunzătoare. Urmează de aici, că, pe o suprafață riglată generatoarele rectilinii formează un prim sistem de linii asimptotice. Se demonstrează prin Analiză că determinarea asimptoticelor de al doilea sistem depinde pe o ecuație a lui Riccati, de unde se deduce că *raportul anarmonic al punctelor de intersecție a patru asimptotice oarecare de al doilea sistem cu fiecare generatoare este constant*.

Iată o demonstrație geometrică a acestei proprietăți<sup>(1)</sup>. Dacă asimptotica  $(M)$  este generatoarea  $(G)$  în  $M$  și generatoarea infinit vecină  $G'$  în  $M'$ , tangentă în  $M$  la asimptotică, generatoare a cuadricei osculatoare care, afară de infiniti mici de ordinul al treilea, conține deasemenea pe  $G'$ , întâlnește această generatoare în punctul  $M'$ .

Dacă  $m'$  este piciorul perpendiculararei coborâte din  $M'$  pe planul tangent în  $M$ , acest plan fiind osculator la  $(M)$ ,  $M'm'$  este un infinit mic

(1) A se vedea M. d'Ocagne, *Cours de Géométrie* (1930), p. 135, demonstrația elevului Scoalei Politehnice din Paris, D.I. Jouguet, din promoția 1926.

de ordinul al treilea. Cum, de altă parte, unghiul  $M'M''m'$  (unghiul lui  $G'$  cu planul tangent în  $M$ ) este infinit mic de ordinul întâi,  $M'M''$  este infinit mic de ordinul al doilea.

Să considerăm acum patru puncte  $M_1, M_2, M_3, M_4$  pe  $G$ . Punctele  $M''_1, M''_2, M''_3, M''_4$ , aparținând la generatoarele corespunzătoare ale cua-dricei osculatoare, avem egalitatea raportelor anarmonice

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = (M''_1 M''_2 M''_3 M''_4).$$

Dar, din cele de mai sus, rezultă că rapoartele anarmonice  $(M'_1 M'_2 M'_3 M'_4)$  și  $(M''_1 M''_2 M''_3 M''_4)$  diferă cu un infinit mic cel puțin de ordinul al doilea, ca și rapoartele anarmonice  $(M_1 M_2 M_3 M_4)$  și  $(M'_1 M'_2 M'_3 M'_4)$ . Cum aceasta are loc dealungul asymptoticelor  $(M_1), (M_2), (M_3), (M_4)$ , rezultă că raportul anarmonic  $(M_1 M_2 M_3 M_4)$  este constant.

**94. Conoidul drept cu nucleu sferic.** Pentru reprezentarea suprafeței, ne servim de metoda dublei proiecții, pe planul orizontal și vertical (pe care il vom rabate peste planul orizontal).

Să luăm ca plan orizontal de proiecție un plan paralel cu planul director și ca plan vertical un plan paralel cu cel ce trece prin directoarea rectilinie și centrul sferei ce formează

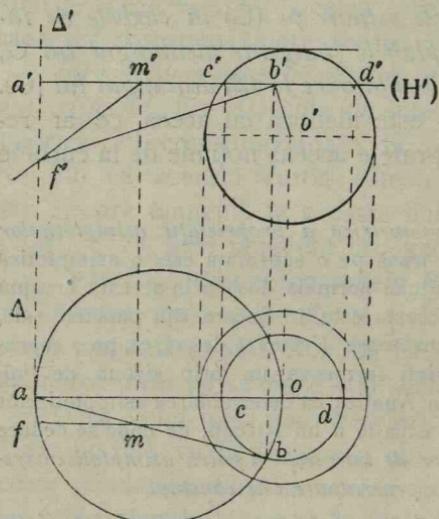


Fig. 136

nucleul. Fie  $(o, o')$  centrul sferei,  $(\Delta, \Delta')$  directoarea rectilinie perpendiculară pe planul orizontal, situată în planul de front  $oa$  al centrului sferei (Fig. 136).

Pentru a avea o genera-toare a conoidului, să-l tăiem cu un plan orizontal  $(H')$ . Acest plan tăie axa în punctul  $(a, a')$  și sferă după cercul  $(cd, c'd')$  a căruia proiecție orizontală este  $cd$ . O genera-toare a conoidului este situată în acest plan orizontal, trece prin  $(a, a')$  și este tangentă sf-

rei, adică cercului  $(cd, c'd')$ . Proiecția sa verticală este  $H'$ , iar cea orizontală tangentă din  $a$  la cercul  $cd$ , adică  $ab$ , aşa că o genera-toare a suprafeței este  $(ab, a'b)$ .

Locul punctului  $b$  este cercul de diametru  $oa$ , iar al punctelor  $(b, b')$  de contact al genera-toarei cu sferă este intersecția sferei cu cilindrul vertical având ca bază cercul  $oa$ , adică o

bicuadratică strâmbă, simetrică în raport cu planul vertical de proiecție; deci aceasta se proiectează vertical după o conică.

Pentru a găsi natura acestei conice, să tăiem cilindrul și sfera cu un plan orizontal oarecare; cele două cercuri de secțiune au comune punctele circulare ale acestui plan; proiecția verticală are deci un punct la infinit în direcția orizontalei punctului  $b'$ , oricare ar fi această orizontală. Locul punctelor  $b'$  este deci o parabolă, având axa orizontală, care este orizontală centrului  $o'$  al sferei.

Să luăm ca directoare  $(C_1)$ ,  $(C_2)$ ,  $(C_3)$  respectiv verticala punctului  $a$ , dreapta de la infinit a planului orizontal și curba de intersecție a nucleului sferic cu cilindrul vertical având ca bază cercul de diametru  $oa$ . Întrebuițând notațiile (No. 66) cunoscute, avem

$$\text{deci } m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 4, \alpha_{23} = 2, \alpha_{31} = 2, \alpha_{12} = 0,$$

$$\Delta = 4, m_2 m_3 - \alpha_{23} = 2, m_3 m_1 - \alpha_{31} = 2, m_1 m_2 - \alpha_{12} = 1,$$

ceea ce arată că acest conoid considerat este o suprafață de ordinul al patrulea, pe care generatoarea rectilinie și dreapta de la infinit a planului director sunt linii duble.

Pentru a construi planele tangente dealungul generatoarei  $(ab, a'b')$ , să considerăm paraboloidul de racordare, având unul din planele directoare orizontal și al doilea plan director de front.

Generatoarea de front a punctului  $(a, a')$  este verticala acestui punct; cea din punctul  $(b, b')$  este linia de front a planului tangent la sferă a cărei proiecție verticală  $b'f'$  este perpendiculară pe  $o'b'$  (căci unghiul format în spațiu este drept și are o latură  $b'f'$  paralelă cu planul vertical de proiecție, deci se proiectează în adevarata mărime). Dar, proiecțiile verticale ale generatoarelor de front trec prin același punct, proiecția generatoarei din celalt sistem care este perpendiculară pe vertical, deci prin punctul  $f'$ . Generatoarea de front într'un punct oarecare  $(m, m')$  al lui  $(ab, a'b')$  este prin urmare  $(mf, m'f')$ . Această generatoare  $(mf, m'f')$ , împreună cu  $(ma, m'a')$ , determină planul tangent în  $(m, m')$  (căci planul tangent este determinat de cele două generatoare de sisteme diferite ce trec prin acel punct).

Se vede, de altfel, că suprafața posedă patru generatoare singulare, adică acelea ce se află în planele tangente orizontale ale sferei și acelea care se găsesc în planele tangente

verticale ce trec prin directoare; acestea din urmă sunt în planul ecuatorului orizontal al sferei.

Pentru a determina punctul  $(m, m')$  al suprafeței unde planul tangent este paralel cu un plan dat, se duce  $ab$ , în proiecție orizontală, paralelă cu orizontalele aceluia plan dat. Aceasta tăe cercul de diametru  $oa$  în punctul  $b$ , proiecția sa verticală  $b'$ , este pe proiecția verticală a cercului de rază  $ob$ . Se duce apoi perpendiculară pe  $ob'$ , care tăe verticala  $aa'$  în  $f'$ . Paralela cu frontalele planului dat dusă prin  $f'$  dă pe  $a'b'$  proiecția verticală  $m'$  a punctului de contact căutat, de unde, cu o linie de ordine, obținem punctul  $m$ .

**95. Conoidul lui Plücker. Cilindroidul<sup>(1)</sup>.** 1º Conoidul lui Plücker sau cilindroidul este conoidul drept având ca directoare: 1) o secțiune plană (elipsă) oarecare a unui cilindru de rotație; 2) o generatoare a cilindrului trecând prin unul din vârfurile axei mari a acestei secțiuni; 3) pentru plan director, un plan de secțiune dreaptă a cilindrului.

Dacă notăm cu 1, 2, 3 respectiv dreapta de la infinit a planului director, directoarea rectilinie și directoarea eliptică, avem cu notările cunoscute,

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 2; \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{23} = 1, \quad \alpha_{31} = 0.$$

Deci, ordinul suprafeței este  $4 - 1 = 3$ , iar generatoarea rectilinie este o linie dublă a suprafeței.

2º Să luăm ca plan orizontal de proiecție planul secțiunei drepte trecând prin punctul comun celor două directoare și ca plan vertical un plan paralel cu acela ce trece prin directoarea rectilinie și axa cilindrului. Să numim cu  $t'q'$  urma verticală a planului directoarei eliptice proiectată orizontal după cercul de centru  $o$  și raza  $oa$  (Fig. 137). O generatoare a suprafeței este  $(am, a'm')$ .

Să considerăm un alt plan perpendicular pe vertical, ce trece prin tangenta la elipsă directoare în punctul ei de intersecție cu directoarea rectilinie verticală  $(t'z', t)$ , cu urma verticală  $t'p'$  și fie  $(l, l')$  punctul unde tăe generatoarea  $(am, a'm')$ . Avem

$$\frac{al}{am} = \frac{a'l'}{a'm'} = \frac{z'p'}{z'q'} = \text{const.};$$

deci locul punctului  $l$  este cercul omotetic al aceluia descris de  $m$ , în raport cu  $a$ . Deci, *toate planele duse prin tangentă la*

<sup>(1)</sup> Studiul facut de D.-I. M. d'Ocagne în *Archiv der Mathematik*, 1901, p. 159.

elipsa directoare în punctul ei de întâlnire cu directoarea rectilinie, tăie suprafața după conice proiectate orizontal după cercuri tangente în a la at. Să însemnăm cu  $(\Gamma_1)$  aceste conice ale suprafeței. Una din ele poate fi substituită ca a doua directoare, în locul primei elipse considerate ca directoare.

3º Planul tangent în  $(m, m')$  este determinat de generatoarea  $(am, a'm')$  și tangenta  $(mt, m't')$  la directoarea elliptică. Urma orizontală a acestui plan este deci paralela  $tk$  la  $am$ . Linia de cea mai mare pantă a sa în  $t$  este perpendiculară din  $t$  pe  $am$  ce trece prin mijlocul  $i$  al lui  $am$  și centrul  $o$  al cercului. Punctul  $i$  are ca proiecție verticală  $i'$  mijlocul lui  $a'm'$ ; deci drepta  $t'i'$  trece prin mijlocul  $o'$  al lui  $z'q'$  și în spațiu, linia de cea mai mare pantă considerată trece prin punctul  $(o, o')$  independent de poziția lui  $m$  pe cerc. Se vede deci că *planul tangent în orice punct al elipsei directoare trece prin punctul  $(o, o')$  unde axa cilindrului tăie planul tangent orizontal  $z'q'$  la suprafață*. Sau, *planele tangente dealungul elipsei directoare au ca infășurătoare un con având vârful pe axa cilindrului de rotație pe care se află elipsa considerată*.

Am văzut, însă, că se poate lua ca directoare una oarecare din elipsele  $(\Gamma_1)$  situate pe cilindrele de rotație tangente la primul dealungul generatoarei rectilinii; deci, proprietatea de mai sus subsistă pentru fiecare din aceste elipse.

Se deduce de aci un mijloc simplu de a construi prin puncte curba de umbră a suprafeței pentru o șursă luminoasă oarecare. Se obțin punctele acestei curbe de umbră situată pe una oarecare din conicele  $(\Gamma_1)$ , întrebunțând conul circumscris suprafeței dealungul acestei conice  $(\Gamma_1)$ .

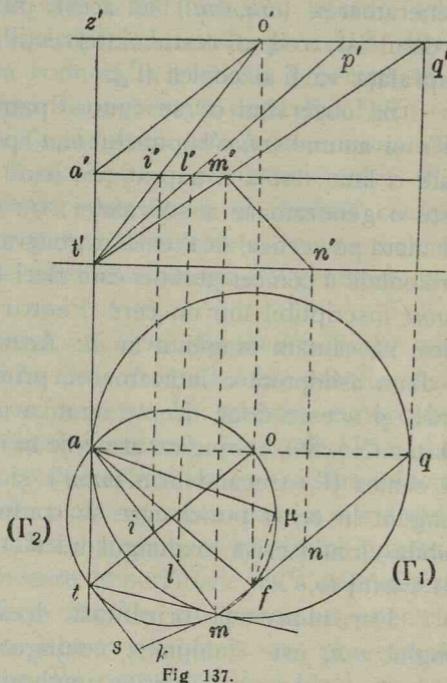


Fig. 137.

4º *Secțiunile suprafetei prin planele sale tangente.* Planul tangent într-un punct oarecare ( $m, m'$ ) al suprafetei conținând generatoarea ( $am, a'm'$ ) în acest punct, și suprafața fiind de ordinul al treilea, restul intersecții acestui plan tangent cu suprafața va fi o conică ( $\Gamma_2$ ).

Să observăm că se cunosc patru puncte ale acestei conice și anume, ( $m, m'$ ); punctul ( $a, a'$ ) pentru că directoarea ( $az, a'z'$ ) este o linie dublă a suprafetei; ( $o, o'$ ) pentru că dreapta ( $zq, z'q'$ ) este o generatoare a suprafetei; ( $t, t'$ ) pentru că dreapta perpendiculară pe verticală în  $t'$  este o generatoare a suprafetei. Proiecția orizontală a conicei căutate este deci circumscrisă patrulaterului  $aomt$  inscriptibil într-un cerc. Pentru a determina această conică, să căutăm tangentă în  $m$ . Această tangentă este (No. 93) a doua asimptotă a indicatoarei, prima fiind generatoare rectilinie, și aceste două drepte sunt, având în vedere teorema lui Dupin (No. 86), conjugate armonică în raport cu tangentă ( $mt, m't'$ ) la conică ( $\Gamma_1$ ) trecând prin ( $m, m'$ ) și cu caracteristica planului tangent în acest punct care se confundă cu ( $mo, m'o'$ ), desfășurabilă circumscrisă dealungul lui ( $\Gamma_1$ ) fiind, cum am văzut, conul cu vârful ( $o, o'$ ).

Dar, în proiecție orizontală, dreapta  $am$  în triunghiul drept-unghic  $omt$  este înălțime; conjugata armonică a acestei înălțimi, în raport cu laturile unghiului drept, este tangentă la cercul circumscris. Deci, *proiecția orizontală a conicei căutate se confundă cu cercul circumscris patrulaterului  $aomt$* , care are în comun cu acest cerc patru puncte  $o, m, t, a$  și tangentă în unul din ele,  $m$ .

Se poate vedea și altfel că proiecția orizontală a conicei ( $\Gamma_2$ ) este cercul de diametru  $ot$ . În adevăr, punctele ( $o, o'$ ) și ( $t, t'$ ) sunt cel mai de sus și cel mai de jos al conicei ( $\Gamma_2$ ); deci tangentele în  $o$  și  $t$  la proiecția orizontală a acestei conice sunt paralele cu orizontalele planului tangent, adică perpendiculare pe  $ot$ , care, prin urmare, este o axă a acestei proiecții. Mai mult, unghiul  $oat$  fiind drept, această conică este cercul de diametru  $ot$ .

Luând ca a doua directoare conica ( $\Gamma_2$ ), definiția cilindro-dului devine, *un conoid având generatoarele perpendiculare la generatoarele unui cilindru de rotație și admisând ca directoare rectilinii, una din generatoare, apoi o secțiune plană oarecare a cilindrului.*

5º Să considerăm acum pe conica ( $\Gamma_2$ ) punctul  $f$  diametral

opus lui  $a$  și să-l unim cu punctul de întâlnire  $\mu$  al conicei ( $\Gamma_2$ ) cu o generatoare oarecare  $af$  a suprafeței. În spațiu, unghiul proiectat după unghiul drept  $af$ , având una din laturile sale  $af$  orizontală, este un unghi drept; orizontală proiectată după  $af$  este deci perpendiculara comună la verticala proiectată în  $a$  și la dreapta planului conicei ( $\Gamma_2$ ) proiectată după  $f\mu$ . Deci, *cilindroidul poate fi privit ca locul perpendicularelor comune la directoarea rectilinie și la toate dreptele planului conicei ( $\Gamma_2$ ) trecând prin punctul diametral opus lui  $a$  în această conică.*

De oarece prin fiecare punct al suprafeței trece o conică ( $\Gamma_2$ ), se obțin o infinitate de moduri analoage de generare ale aceluias cilindroid.

6º Invers, se poate vedea că *locul perpendicularelor comune la o dreaptă dată și la toate dreptele unui plan ce trec prin același punct este un cilindroid*. În adevăr, cunoscând punctele  $a$  și  $f$ , se poate construi cercul  $aof$ , deci se cunoaște conica ( $\Gamma_2$ ) a cărei proiecție este acest cerc și servindu-se de a doua definițione, urmează că suprafața este un cilindroid.

7º Să lăsăm dintr'un punct oarecare al verticalei punctului  $f$  o perpendiculară pe fiecare generatoare  $af$  a suprafeței; piciorul acestei perpendiculari coincide cu punctul  $\mu$ , pentru că unghiul drept care are o latură orizontală se proiectează după un unghi drept. Conica ( $\Gamma_2$ ) reprezintă deci locul proiecțiilor ortogonale ale unui punct oarecare a verticalei lui  $f$  pe generatoarele suprafeței și cum punctul  $f$  poate fi ales arbitrar [conica ( $\Gamma_2$ ) corespunzătoare fiind aceea ce are ca proiecție orizontală cercul de diametru  $af$ ], urmează că *locul proiecțiilor ortogonale ale unui punct oarecare al spațiului pe generatoarele unui cilindroid este o conică ( $\Gamma_2$ ) a acestei suprafețe, această conică rămânând aceeași pentru toate punctele situate pe o aceeași paralelă la directoarea rectilinie a suprafeței*.

De altfel, D.-I. Appell a demonstrat<sup>(1)</sup> că *cilindroidul este singura suprafață riglată având proprietatea cilindrului, că locul proiecțiilor unui punct oarecare al spațiului pe generatoarele sale să fie o curbă plană*, de unde și numele de cilindroid. Cilindrul fiind o suprafață desfășurabilă, cilindroidul este singura suprafață riglată (strâmbă) care se bucură de această proprietate.

<sup>(1)</sup> Appell, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVIII, p. 261; a se vedea și demonstrația geometrică a D-lui Brilard, în *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIX, p. 18, precum și a D-lui Harmignies, elev al Școalei Politehnice Paris, promoția 1919 (Nouvelles Ann. de Math., 1920 p. 178).

8º Linii asimptotice. Am văzut că asimptotele indicatoarei în  $(m, m')$  sunt proiectate orizontal după  $ma$  și  $ms$ , tangentă în  $m$  la cercul  $omta$ . Liniile asimptotice ale suprafetei au ca prim sistem generatoarele rectilinii și al doilea sistem curbele ale căror proiecție orizontală au ca tangentă în fiecare punct  $m$  dreapta  $ms$  definită mai sus. Dar, unghiul  $tms$  având în cercul  $omta$  aceeași măsură ca și unghiul  $tam$ , este deci egal cu  $amt$ ; deci, față de polul  $a$  și axa polară  $at$ , unghiul  $ams$  a tangentei cu raza vectoare este dublul unghiului polar  $tam$ ; aceasta este o proprietate caracteristică a lemniscatei lui Bernoulli, având punctul său dublu în  $a$  și tangentele în acest punct  $at$  și  $aq$ .

Deci, proiecțiile orizontale ale liniilor asimptotice din sistemul al doilea ale cilindroidului sunt lemniscate ale lui Bernoulli, având punctul dublu în  $a$ , unde tangentele sunt  $at$  și  $aq$ .

9º Asimptotele indicatoarei în  $(m, m')$  fiind cunoscute în proiecție orizontală, sunt complet determinate, căci ele sunt în planul  $(amo, a'm'o')$ .

Deci, pentru a cunoaște indicatoarea, va fi destul de a ști raza de curbură a unei secțiuni normale oarecare ce trece prin  $(m, m')$ . Să considerăm secțiunea normală ce trece prin  $(mt, m't')$ . Planul acestei secțiuni normale este determinat de  $(mt, m't')$  și de normala  $(mn, m'n')$  ale căror proiecții sunt respectiv perpendiculară la orizontală  $am$  și frontală  $o'a'$  a planului tangent în  $(m, m')$ . De asemenea, planul normal la cilindrul proiectant al elipsei  $(\Gamma_1)$ , dus prin  $(mt, m't')$ , este definit de această tangentă și normala la acest cilindru în  $(m, m')$ , care este orizontală proiectată după  $mo$ . Se pot construi unghiurile  $\omega$  și  $\omega'$  pe care aceste plane normale le fac cu planul conicei  $(\Gamma_1)$ , plan perpendicular pe vertical, care le tăie pe ambele după  $(mt, m't')$ . Așa fiind, dacă  $\rho$  este raza de curbură a lui  $(\Gamma_1)$  în  $(m, m')$ ,  $\rho_0$  și  $\rho'_0$  razele de curbură ale secțiunilor normale definite mai sus la cilindroid și cilindru proiectant, în același punct, după teorema lui Metusnier, avem

$$\rho = \rho_0 \cos \omega = \rho'_0 \cos \omega'.$$

Dar, dacă  $\varphi$  este unghiul tangentei  $(mt, m't')$  cu generațoarea cilindrului proiectant, adică cu verticala punctului  $(m, m')$ , relația lui Euler, aplicată la cilindrul a cărui secțiune dreaptă este cercul de rază  $Oa = r$  ( $R_1 = r$ , cealaltă rază de curbură  $R_2$  a secțiunii drepte este  $\infty$ , căci curba de secțiune este generațoarea rectilinie), arată că

$$\rho'_0 = \frac{r}{\sin^2 \varphi}.$$

De unde urmează

$$\rho_0 = \frac{r \cos \omega'}{\sin^2 \varphi \cos \omega}.$$

Construind această expresie a razei de curbură a secțiunii normale oarecare, indicatoarea în  $(m, m')$  se poate construi, căci se cunosc asimptotele și un punct.

**95. Mănușchi de normale. Teorema lui Sturm.** Dacă se consideră în jurul unui punct  $M$  al unei suprafețe, o arie infinit mică trasă pe suprafață, ansamblul normalelor duse prin punctele conținute în interiorul acestei arii constituie un mănușchi de normale, a cărui normală în  $M$  este normala mijlocie. Vom arăta că, *afară de infiniti mici de ordinul al doilea, normalele acestui mănușchi întâlnesc axele de curbură ale celor două secțiuni principale trecând prin  $MN$ .*

Pentru a demonstra această proprietate a lui Sturm, vom stabili următoarele. 1º *Dacă se proiectează pe unul din planele principale,  $Mxz$ , de ex., normalele în două puncte corespunzătoare ale suprafeței și paraboloidului osculator în  $M$ ,*

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}$$

*unghiul acestor proiecțiuni este infinit mic de ordinul al doilea.* În adevăr, aceste proiecțiuni sunt normalele la secțiunile suprafețelor, paralele cu  $Mxz$ , obținute dând lui  $y$  în ecuațiile suprafețelor o aceeaș valoare constantă. Unghiul lor este egal cu acela al tangentelor la aceste secțiuni ale căror (pante) coeficienți unghiulari,  $\frac{dz}{dx}$ , diferă cu un infinit mic de ordinul al doilea, căci diferența valorilor lui  $z$  corespunzătoare este de ordinul al treilea. Acest unghi este deci de ordinul al doilea.

2º *Dacă se proiectează ortogonal un punct oarecare  $M'$  al unui paraboloid în  $m'$  pe planul tangent în vîrful  $M$ , paralela la normala în  $M'$  dusă prin  $m'$  întâlneste axele de curbură  $A_1$  și  $A_2$  (perpendicularele pe secțiunile principale în centrele de curbură principale) corespunzătoare punctului  $M$ .* În adevăr, să observăm că proiecțiunile pe unul din planele principale, ale secțiunilor plane ale paraboloidului, paralele cu acest plan, se obțin cu o translație paralelă cu  $Mz$  din secțiunea principală,

Deci, în toate punctele proiecțiunii, situate pe o paralelă

la  $Mz$ , normalele la proiecțiile acestor secțiuni plane sunt paralele între ele și paralele cu dreapta care unește proiecția comună a piciorului lor pe  $Mx$  (sau  $My$ ) cu punctul  $z=R_1$  (sau  $z=R_2$ ) a lui  $Mz$ , căci subnormala secțiunii principale este constantă și egală cu parametrul  $R_1$  (sau  $R_2$ ).

Dar, normalele la suprafață se proiectează pe planul principal  $Mxz$  (sau  $Myz$ ) după normalele la aceste secțiuni plane paralele cu acest plan principal. Deci, paralelele la normalele în punctul  $M'$  oarecare al paraboloidului, duse prin proiecția lor  $m'$  pe planul tangent în vârful  $M$ , întâlnesc toate axa de curbură în punctul  $z=R_1$  (sau  $z=R_2$ ).

3º Acestea fiind stabilite, prin punctul  $M'$  (Fig. 138) al suprafeței, infinit vecin de  $M$ , să ducem normala la suprafață

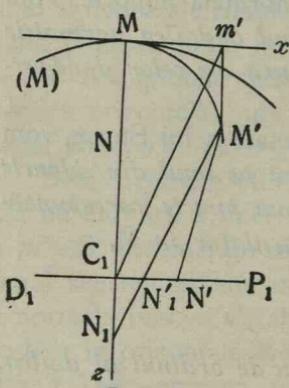


Fig. 138.

și paralela la normala corespunzătoare a paraboloidului osculator și fie  $M'N'$ ,  $M'N'_1$ , proiecțiile lor pe  $Mxz$ . În baza primei proprietăți de mai sus, unghiul  $N'M'N'_1$  este de ordinul al doilea, segmentul  $N'N'_1$  este de asemenea infinit mic de ordinul al doilea. Însemnând cu  $C_1$  centrul de curbură principal corespunzător secțiunii principale  $Mxz$ , și cu  $C_1D_1$  perpendiculara în  $C_1$  în planul principal  $Mxz$  pe  $MC_1$ , adică axa de curbură a celei de a doua secțiuni principale, în virtutea proprietății a două, se vede că  $M'N_1$  este paralelă cu  $m'C_1$ , apoi  $C_1N_1 = m'M'$ , care este de ordinul al doilea, și cum unghiul în  $N_1$  este infinit mic, urmează că  $C_1N'_1$  este de ordinul al treilea, deci  $C_1N'$  este de ordinul al doilea, adică, afară de infiniți mici de ordinul al doilea, normala în  $M'$  întâlnesc axele de curbură,  $C_1D_1$ , ale celor două secțiuni principale ce trec prin  $MN$ .

Regăsim o proprietate stabilită de Mannheim (No. 88, 6º) că, dacă  $M'$  tinde către  $M$ , dealungul unei curbe oarecare situată pe suprafață dată, suprafață născută de normală este tăiată de planul principal după o curbă, care admite axa de curbură  $A_1$  ca tangentă în  $C_1$ . Deci, toate elementele de suprafață răglată, născute de normalele în jurul lui  $MN$ , se racordează în  $C_1$  și de asemenea în  $C_2$ .

**96. Raze refractate sau reflectate. Teorema lui Malus și Dupin.** Să considerăm o suprafață (A) pe care se refractă

razele AM normale la o suprafață (M)<sup>(1)</sup> (Fig. 139). Din punctul A ca centru să descriem sferă (S) cu raza AM, tangentă în M la suprafața (M). Punctul M fiind pe suprafața (M), poziția sa depinde de doi parametrii, deci sfera variabilă (S) depinde de doi parametrii. Așadar, astăzi sfere își ating infășurătoarea în două puncte caracteristice, punctul M și simetricul său  $M_1$  în raport cu planul tangent în A la suprafața (A). Pentru a vedea aceasta, e destul a considera sferele corespunzătoare la trei puncte infinit vecin A, A', A'', care se tăie în două puncte simetrice în raport cu planul AA'A'' al centrelor și apoi a făcut ca punctele A' și A'' să tindă către A.

Să luăm ca plan al figurei acela determinat de raza AM și normala AN în A la suprafața (A).

Să observăm că raza  $AM_1$  se confundă cu raza reflectată a lui AM pe suprafața (A) și că această rază normală în  $M_1$  la sferă (S) este de asemenea normală la suprafața ( $S_1$ ) care constituie două părți a suprafeței infășurătoare a sferei (S). Deci, *razele normale la o suprafață (M) se reflectă pe o suprafață oarecare (A), astfel că razele reflectate sunt normale la altă suprafață.*

Să considerăm acum sferă ( $\Sigma$ ) de centru A cu raza egală cu  $\frac{AM}{n}$ ,  $n$  fiind indicele de refracție. Această sferă depinde de doi parametrii și are două puncte caracteristice, de contact cu infășurătoarea sa,  $\mu$  și  $\mu_1$ . Pentru a determina aceste puncte, să considerăm sferă ( $S'$ ) corespunzătoare la alt punct A', infinit vecin de A, care tăie sferă (S) după un cerc a cărui limită (C) trece prin M și  $M_1$ . De asemenea, limita ( $\Gamma$ ) a cercului după care sferă ( $\Sigma'$ ) [dedusă din (S) ca ( $\Sigma$ ) din (S)] tăie ( $\Sigma$ ), trece prin punctele  $\mu$  și  $\mu_1$ . Dar ansamblul sferelor ( $S'$ ) și ( $\Sigma'$ ) este omo-

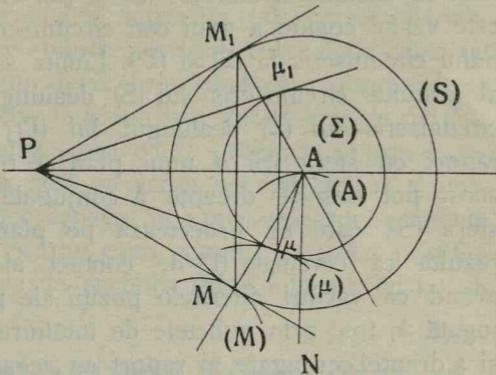


Fig. 139.

<sup>(1)</sup> A se vedea M. d'Ocagne, *Cours de Géométrie de l'Ecole Polytechnique* (1930), altă soluție dată de D.-J. Babinet, elev al promoției speciale 1919.

tetic cu ansamblul sferelor ( $S$ ) și ( $\Sigma$ ). Centrul lor de omotetie este vârful comun a unui con circumscris la ( $S$ ) și ( $S'$ ), și a conului circumscris la ( $\Sigma$ ) și ( $\Sigma'$ ). Limita sa este deci vârful comun al conului circumscris lui ( $S$ ) dealungul lui ( $C$ ) și al conului circumscris lui ( $\Sigma$ ) dealungul lui ( $\Gamma$ ); este, aşa dar, polul în raport cu sfera ( $S$ ) a unui plan ce trece prin  $M$  și  $M_1$ . Dar acest pol descrie dreapta  $\Delta$  conjugată cu  $MM_1$  în raport cu sfera ( $S$ ), care se proiectează pe planul figurei în  $P$ . De aci rezultă că cercurile ( $\Gamma$ ) de contact ale sferei ( $\Sigma$ ) cu conurile având ca vârfuri diferențele poziții ale polului pe dreapta conjugată  $\Delta$ , trec prin punctele de întâlnire  $\mu$  și  $\mu_1$  ale sferei ( $\Sigma$ ) și a dreptei conjugate, în raport cu această sferă, a dreptei ce se proiectează în  $P$ ; aceste puncte se obțin pe planul figurei ducând din  $P$  tangente la conturul aparent al sferei ( $\Sigma$ ).

Așa fiind, dreapta  $A\mu$  este normală în  $\mu$  la suprafața ( $\mu$ ), infășurătoarea sferei ( $\Sigma$ ), ea având în acest punct același plan tangent ca și sfera.

Dar, dreapta  $A\mu$  este în planul  $MAN$  al figurei, al razei incidente  $MA$  și normalei  $MN$  la suprafața refractantă. Apoi, unghiurile  $MAN$  și  $\mu AN$  fiind respectiv egale cu  $MPA$  și  $\mu PA$ , urmează

$$\frac{\sin MAN}{\sin \mu AN} = \frac{AM}{A\mu} = n.$$

Deci,  $A\mu$  este raza refractată corespunzătoare lui  $AM$  și deci razele normale la suprafață se refractă pe o altă suprafață, astfel că razele refractate sunt normale la o altă suprafață.

Rezultă de aci că razele luminoase, ce pleacă dela o sursă redusă la un punct, care, înainte de orice reflexie sau refracție, pot fi privite ca normale la o sferă având acest punct ca centru, sunt, după un număr oarecare de reflexiuni sau refracții, normale la aceeași suprafață ( $\mu$ ).

Rezultatul găsit de *Malus* pentru razele ce pornesc dintr-un punct, a fost generalizat de *Dupin*, pentru razele normale la o suprafață oarecare.

Să considerăm acum razele luminoase pornite de la o sursă, interioare la un con a cărui deschidere foarte mică înconjură una din ele,  $\rho$ ; ansamblul acestor raze vor forma după un număr oarecare de reflexiuni sau refracții, ceea ce se zice *mănușchi luminos* împrejurul razei ce provine din  $\rho$ , care se notează de obicei cu aceeași literă.

Aplicând teorema lui Sturm, se vede că dacă  $\mu$  este punctul unde raza  $\rho$  este normală la suprafața ( $\mu$ ), razele mănușchiului luminos întâlnesc foarte sensibil cele două axe de curbură principale ale suprafetei corespunzătoare punctului ( $\mu$ ), cărora, pentru acest motiv, fizicienii i-au dat numele de *focalele lui Sturm*. Se poate vedea (ceea ce se probează și prin experiență) că, dacă se deplasează un ecran normal la raza  $\rho$ , imaginea luminoasă se reduce sensibil la o mică trăsătură rectilinie (fragment din focala lui Sturm) când ecranul va trece prin fiecare din cele două centre de curbură principale ale lui ( $\mu$ ) situate pe  $\rho$ .

## NOTIUNI SUMARE ASUPRA COMPLEXELOR ȘI CONGRUENȚELOR DE DREpte<sup>(1)</sup>.

**97. Coordonatele omogene ale linii drepte.** Să considerăm o dreaptă  $D$  paralelă cu direcția

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}.$$

Ecuatiile proiecțiilor dreptei  $D$  pe cele trei plane de coordonate sunt

$$(1) \quad nx - mz = p, \quad lz - nx = q, \quad mx - ly = r.$$

De unde

$$(2) \quad lp + mq + nr = 0.$$

Se vede că dreapta ( $D$ ) ale cărei ecuații sunt (1), este conținută în planul

$$(3) \quad px + qy + rz = 0$$

ce trece prin originea.

Parametrii  $l, m, n, p, q, r$ , în număr de 6, legăți cu relația (2), determină, afară de un factor constant, ecuațiile (1) și deci dreapta ( $D$ ). Acestea se zic *coordonatele omogene ale linii drepte* ( $D$ ). Aceste coordonate fiind cunoscute prin valori proporționale, și apoi verificând o relație omogenă (2), ele se reduc, în realitate, la patru distințe, cea ce de altfel trebuia, căci o dreaptă în spațiu este determinată de patru condiții.

<sup>(1)</sup> M. d'Ocagne, *Cours de Géométrie ac l'Ecole Polytechnique* (1930), p. 153. A se vedea și expunerea geometrică asupra Complexelor și congruențelor de Fouret, în apendicele cărții, *La géométrie du mouvement*, de Schöenflies, tradusă de Speckel; Gauthier Vil-lars, 1893.

Însemnarea geometrică a acestor coordonate este următoarea:  $l, m, n$  sunt proiecțiile pe axe,  $p, q, r$ , momentele, în raport cu axele, ale unui vector oarecare luat pe dreapta considerată.

Condiția ca dreptele  $D(l, m, n, p, q, r)$  și  $D'(l', m', n', p', q', r)$  să se întâlnescă, se obține eliminând pe  $x, y, z$  între ecuațiile (1) și analoagele sale pentru celalătă dreaptă, ceea ce se poate ușor avea înmulțind ecuațiile (1) respectiv cu  $l', m', n'$  și ecuațiile analoage pentru  $(D')$  respectiv cu  $l, m, n$ . Adunând, găsim

$$(4) \quad l'p + m'q + n'r + lp' + mq' + nr' = 0,$$

condiția necesară și suficientă ca dreptele  $(D)$  și  $(D')$  să se întâlnescă.

**98. Diferite sisteme infinite de drepte în spațiu.** Poziția unei drepte depinzând de patru parametrii în spațiu, se poate, în ansamblul cuadruplu infinit al dreptelor din spațiu, să imaginăm sistemele de drepte triplu, dublu și simplu infinite, care satisfac respectiv, la o condiție, două, sau trei condiții simple, care se exprimă cu relații omogene între coordonatele  $l, m, n, p, q, r$  ale acestor drepte.

Astfel, o singură ecuație omogenă între coordonate definiște un sistem triplu infinit, sau un *complex de drepte*; două ecuații omogene definesc un sistem dublu infinit, sau o *congruență*, în fine, trei ecuații omogene definesc un sistem simplu infinit, sau o *serie de drepte*.

Exemplu de *complexe*, sunt dreptele tangente la o suprafață dată, sau care întâlnesc o linie dată, care poate fi la infinit pe un con sau pe un plan dat.

*Congruențe* formează dreptele tangente la două suprafețe date, normalele la o suprafață, dreptele care întâlnesc două linii date.

*Serie de drepte* formează generatoarele de același sistem ale unei cuadrice riglate (semicuadrică), tangentele la o curbă strâmbă, etc.

**99. Clasificarea complexelor și congruențelor.** Am văzut că un complex este definit de o ecuație omogenă,

$$(5) \quad F(l, m, n, p, q, r) = 0,$$

între coordonatele fiecărei drepte a complexului. Dacă această ecuație este algebrică și de gradul  $\mu$ , complexul se zice algebric și de gradul  $\mu$ .

Să considerăm dreptele complexului ce trec prin același punct din spațiu. Exprimând că coordonatele punctului verifică

ecuațiile (1), care de fapt sunt două, se obțin două condiții, care împreună cu cea exprimată prin (5), se vede că aceste drepte satisfac la trei condiții simple, adică formează o serie. Dreptele acestei serii trecând prin acelaș punct, nasc un con, a cărui ecuație se obține astfel. Fie  $(x_0, y_0, z_0)$  punctul fix și  $(x, y, z)$  un punct oarecare al unei drepte a serii. Proiecțiile vectorului format de aceste puncte pe axe de coordonate sunt  $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ ; momentele în raport cu aceleasi axe sunt  $zy_0 - yz_0, xz_0 - zx_0, yx_0 - xy_0$ . Cum aceste șase cantități sunt proporționale cu  $l, m, n, p, q, r$ , și verificând ecuația omogenă (5), avem

$$F(x - x_0, y - y_0, z - z_0, zy_0 - yz_0, xz_0 - zx_0, yx_0 - xy_0) = 0,$$

care este ecuația conului căutat și care se zice *conul complexului* corespunzător punctului considerat. *Ordinalul acestui con este  $\mu$ , egal cu acela al complexului.*

Să considerăm acum toate dreptele complexului situate în acelaș plan, unde ele au o infășurătoare oarecare. Tangentele duse dintr'un punct oarecare al planului la această curbă sunt intersecțiile acestui plan ca conul complexului având ca vârf acest punct. Numărul acestor tangente este  $\mu$  și deci infășurătoarea dreptelor complexului situate într'un plan considerat, numită *curba complexului*, pentru acest plan, este de o clasă egală cu ordinul  $\mu$  al complexului.

Se zice *complex linear* acela pentru care ecuația (5) este lineară. Conurile și curbele complexului linear sunt respectiv de ordinul întâi și clasa întâia, deci se reduc respectiv la plane și puncte. Ecuația lineară (5) conținând 5 parametrii, un complex linear C este complet determinat prin cinci condiții simple, adică prin cunoașterea a cinci drepte, proiectiv independente, care-i aparțin.

Două ecuații omogene,  $F(l, m, n, p, q, r) = 0, G(l, m, n, p, q, r) = 0$ , algebrice și întregi, de gradele  $\mu$  și  $\nu$ , definesc o *congruență algebrică*, al cărei ordin este numărul de drepte care-i aparțin și care trec printr'un punct al spațiului și a cărei clasă este numărul de drepte conținute în orice plan al spațiului.

În general, ordinul unei congruențe este egal cu numărul de generatoare rectilinii, comune conurilor complexelor F și G, având acelaș vârf; clasa, numărul de tangente comune la curbele complexelor conținute în acelaș plan. Aceste numere sunt egale, în general, cu  $\mu\nu$ . Sunt, însă, cazuri când aceste numere nu mai sunt egale. De ex., coardele unei cubice strâmbe formează

o congruență de ordinul întâi și clasa treia. În adevăr, nu pot trece două coarde ale unei cubice strâmbe printr'un punct al spațiului, căci cele patru puncte ale acestor coarde ar forma un plan, care ar tăia cubică în patru puncte, ceea ce este absurd. De altfel, în fiecare plan sunt trei coarde obținute unind două câte două cele trei puncte unde acest plan tăie cubică.

Dacă ecuațiile  $F=0$  și  $G=0$  sunt lineare, congruența (c) corespunzătoare este lineară.

### 100. Proprietățile speciale ale complexelor lineare.

1º *Pol și plan polar.* În orice complex linear [C], toate dreptele ce trec printr'un punct, sunt situate în același plan, numit *plan polar* (plan focal) al acestui punct. Toate dreptele situate în același plan trec prin același punct numit *polul* (focarul) acestui plan. Deci, toate punctele și planele spațiului sunt în raport cu complexul [C], asociate două câte două, fiecare punct fiind situat în planul corespunzător.

2º *Dacă polul P al planului II este în planul II', reciproc, polul P' al planului II' este în planul II.* În adevăr, să considerăm un complex linear [C] și fie  $P$  polul planului  $\Pi$ . Dacă polul  $P$  este în planul  $\Pi'$ , cum este și în planul  $\Pi$ , se află pe dreapta  $D$  de intersecție a planelor  $\Pi$  și  $\Pi'$ . Această dreaptă trecând prin polul  $P$  al planului  $\Pi$ , aparține complexului. Aparținând complexului și găsindu-se în planul  $\Pi'$ , trece prin polul  $P'$  al acestui plan. Acest pol fiind pe dreapta  $D$ , este deci în planul  $\Pi$ .

3º *Drepte conjugate.* Fie  $P$  polul unui plan  $\Pi$  care se învârtește în jurul unei drepte  $D$  nefăcând parte din complex. Pentru a găsi locul polului  $P$ , să luăm pe dreapta  $D$  două puncte oarecare  $A$  și  $B$ , ale căror plane polare  $\alpha$  și  $\beta$  se tăie după dreapta  $\Delta$ .

Pentru o poziție oarecare a planului  $\Pi$  trecând prin  $D$ , planele  $\alpha$  și  $\beta$  având polurile  $A$  și  $B$  în acest plan  $\Pi$  (căci sunt situate pe  $D$  conținută în plan), planul  $\Pi$  are polul său  $P$  în planele  $\alpha$  și  $\beta$  și deci pe dreapta  $\Delta$  de intersecție a acestor plane  $\alpha$  și  $\beta$ .

Așa dar, când planul  $\Pi$  se învârtește în jurul lui  $D$ , polul său descrie dreapta  $\Delta$ . Cum punctele  $A$  și  $B$  au fost alese arbitrar pe  $D$ , și cum polul  $P$  al planului  $\Pi$  este independent de alegerea acestor puncte, rezultă că planul polar al oricărui alt punct al dreptei  $D$  trece de asemenea prin  $\Delta$ . Dreapta  $D$  este

*locul polurilor planelor ce trec prin  $\Delta$ .* Există, deci, reciprocitate între dreptele  $D$  și  $\Delta$ , care sunt numite pentru acest motiv, *conjugate* în raport cu complexul.

Dacă dreapta  $D$  ar apartine complexului, ea ar coincide cu conjugata sa  $\Delta$ , căci orice plan trecând prin  $D$  ar avea polul său pe însăși această dreaptă.

4º *Orice dreaptă a complexului care întâlnește o dreaptă  $D$  întâlnește și conjugata sa  $\Delta$ .* În adevăr, dacă dreapta  $\gamma$  întâlnește pe  $D$  și aparține complexului [C], polul planului  $(D, \gamma)$  se găsește pe dreapta  $\gamma$ ; dar acest pol se află și pe conjugata  $\Delta$  a lui  $D$ , ceea ce arată că dreptele  $\gamma$  și  $\Delta$  se întâlnesc.

5º *Orice dreaptă care întâlnește două drepte  $D$  și  $\Delta$  conjugate aparțin complexului.* În adevăr, planul format de această dreaptă  $\gamma$  și de una din dreptele conjugate,  $\Delta$ , are polul său pe celalătă dreaptă conjugată  $D$ ; dar acest pol este în planul  $(\Delta, \gamma)$  și deci se găsește la intersecția dreptei  $D$  cu acest plan care este punctul comun dreptelor  $D$  și  $\gamma$ . Dar  $\gamma$  trecând prin polul planului  $(\Delta, \gamma)$  care o conține, aparține complexului.

6º *Două perechi oarecare de drepte conjugate în raport cu un complex linear [C] aparțin la aceeași semicuadrnică.* În adevăr, fie perechile  $(D, \Delta)$ ,  $(D', \Delta')$ . Toate dreptele  $\gamma$  care întâlnesc trei din aceste drepte  $D$ ,  $\Delta$ ,  $D'$ , de ex., nasc o semicuadrnică, pentru care  $D$ ,  $\Delta$ ,  $D'$ , generatoarele din celalt sistem, determină semicuadrnică complimentară. Dar, orice dreaptă  $\gamma$  ce întâlnește pe  $D$  și  $\Delta$  aparține complexului: aparținând complexului și întâlnind pe  $D'$ , întâlnește și pe  $\Delta'$ . Toate generatoarele  $\gamma$  ale primei semicuadrnice întâlnind pe  $\Delta'$ , însemnează că această dreaptă aparține la semicuadrnică complimentară definită de dreptele  $D$ ,  $\Delta$ ,  $D'$ .

7º *Diametrii și axe.* Dacă se consideră toate planele paralele cu un plan dat, ele pot fi privite ca trecând prin dreapta de la infinit a acestui plan dat. Polurile lor sunt deci pe dreapta conjugată a acestei drepte de la infinit. O astfel de dreaptă se zice un *diametru* al complexului *conjugat* direcției planului considerat.

Dar, prin fiecare dreaptă de la infinit, trece, în particular, planul de la infinit. Toate diametrele conțin deci polul acestui plan de la infinit, cu alte cuvinte, un punct determinat al acestui plan de la infinit, adică, *toți diametrii sunt paraleli între ei*.

La fiecare dintre ei corespunde o direcție determinată de plane paralele. Una dintre aceste direcții de plane este per-

pendiculară la direcția comună a diametrelor. Diametrul corespunzător se xice *axa complexului*.

8º Să însemnăm cu  $X$  și  $\delta$  axa complexului și dreapta de la infinit a planelor care îi sunt perpendiculare, adică dreapta sa conjugată și fie  $D$  și  $\Delta$  două drepte conjugate oarecare. Am văzut că dreptele  $X$ ,  $\delta$ ,  $D$  și  $\Delta$  aparțin la o aceeaș semicuadrăcă, care este în acest caz un paraboloid iperbolic, căci una din generatoarele sale este aruncată la infinit. Acest paraboloid are ca direcție a primului plan director aceea a planelor trecând prin dreapta de la infinit  $\delta$ , adică planele perpendiculare pe  $X$ , direcție care se zice *ortografică* pentru complexul [C]. Direcția celui de al doilea plan director este dată de două din generatoarele semicuadricei considerate,  $D$  și  $\Delta$ , de ex. Această direcție de plan fiind de asemenea paralelă cu generatoarea  $X$  a aceleaș semicuadrice, este perpendiculară pe direcția planului ortografic. Planele duse paralel cu acest plan prin  $D$  și  $\Delta$  sunt perpendiculare pe planul ortografic, deci proiecțiile dreptelor  $D$  și  $\Delta$  pe planul ortografic sunt paralele. Paraboloidul este echilater și  $X$  este perpendiculară pe toate generatoarele sistemului al doilea (paralele cu planul ortografic); cu alte cuvinte, generatoarea  $X$  este în sistemul  $D$  și  $\Delta$ , linia de strictiune a paraboloidului.

9º Toate generatoarele paraboloidului definit de  $D$  și  $\Delta$ , care sunt paralele cu planul ortografic, sunt dreptele complexului, căci întâlnesc pe  $D$  și  $\Delta$ . Ele întâlnesc de asemenea axa  $X$  care e de acelaș sistem cu  $D$  și  $\Delta$ . Deci, proiecțiile lor pe planul ortografic, trec toate prin piciorul axei  $X$  pe planul ortografic. Printre aceste proiecții este una care este perpendiculară pe proiecțiile paralele ale lui  $D$  și  $\Delta$ . În spațiu, generatoarea corespunzătoare este perpendiculară comună lui  $D$  și  $\Delta$ , căci ea este paralelă cu planul de proiecție (perpendiculară pe axa  $X$ ).

Deci, perpendiculara comună la două drepte conjugate  $D$  și  $\Delta$  în raport cu complexul [C], face parte din complex și întâlneste sub un unghi drept axa  $X$  a complexului.

10º *Generarea unui complex linear.* Să însemnăm cu  $X$  proiecția redusă la un punct (Fig. 140) pe planul ortografic, a axei complexului [C] și fie  $a_0 b_0$  proiecția unei drepte oarecare a complexului, a cărei urmă pe planul ortografic este  $b$ . Perpendiculara comună la această dreptă și la axă apartine complexului [C], căci întâlneste axa  $X$  și conjugata sa, dreapta de la infinit a planului ortografic. Proiecția pe planul ortografic a

acestei perpendiculare comune este  $Xa_0$ , coborâtă din  $X$  pe  $a_0b_0$ . Această perpendiculară comună, împreună cu  $a_0b_0$  determină planul polar al punctului  $a_0$  și urma acestui plan pe planul ortografic va fi dreapta  $b_0b$  paralelă cu  $Xa_0$ .

Orice altă dreaptă  $a_0b$  a complexului, trecând prin  $a_0$  și fiind în acest plan polar, va avea urma sa ortografică  $b$  pe urma  $b_0b'_0$  a planului polar. Să însemnăm cu  $\rho$  cea mai scurtă distanță, proiectată după  $Xa$ , a axei și dreptei  $a_0b$ , cu  $\alpha$  unghiul acestei drepte cu axa,  $\rho_0$  și  $\alpha_0$  aceleiasi cantități pentru dreapta  $a_0b_0$ . Din triunghiurile asemenea  $Xaa_0$ ,  $a_0b_0b$ , avem

$$Xa \cdot a_0b = Xa_0 \cdot a_0b_0.$$

Să însemnăm cu  $z$  cota lui  $a_0$  în raport cu planul ortografic de proiecție; avem

$$(6) \quad \rho \cdot a_0b = \rho_0 \cdot z \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Pentru a găsi adevarata mărime a unghiului dreptei  $(a_0b, a'_0b')$  cu axa, să rotim această dreaptă în jurul axei până ajunge să devie frontală în poziția  $(a_0b_1, a'_0b'_1)$ . Unghiul  $\alpha$  este egal cu  $b'_1a'_0X$  și deci

$$a_0b = a_0b_1 = z \operatorname{tg} \alpha.$$

Înlocuind în (6), obținem

$$\rho z \operatorname{tg} \alpha = \rho_0 z \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Deci, însemnând cu  $h$  constanta  $\rho_0 \operatorname{tg} \alpha_0 = h$ , avem

$$\operatorname{tg} \alpha = h.$$

Așa dar, pentru toate dreptele complexului [C], ce trec prin  $a_0$ , produsul  $\operatorname{tg} \alpha$  are o valoare constantă  $h$ .

Se poate ușor arăta, că această constantă  $h$  este aceeași pentru toate dreptele complexului. Pentru aceasta, va fi de ajuns să arăta că rămâne aceeași pentru două drepte oarecare  $\gamma$  și  $\gamma'$  ale complexului și care nu se întâlnesc. Dar, se poate totdeauna găsi o dreaptă  $\gamma''$  a complexului care să le întâlnească pe  $\gamma$  și  $\gamma'$ , care se poate obține considerând planul polar II a unui punct oarecare P al dreptei  $\gamma$  și luând punctul de întâlnire P'.

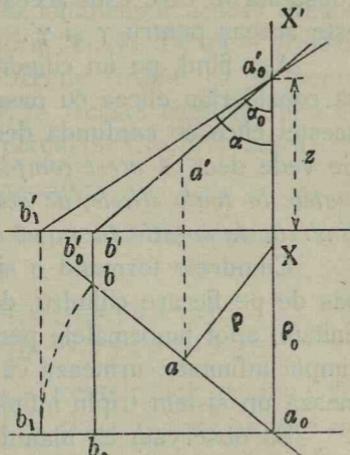


Fig. 140.

al acestui plan II cu dreapta  $\gamma'$ , astfel că dreapta  $PP'$  este una din dreptele  $\gamma''$  căutate. Dar  $\gamma$  și  $\gamma''$  întâlnindu-se, au aceeași constantă  $h$ , care este aceeași și pentru  $\gamma''$  și  $\gamma'$ ; deci constanta este aceeași pentru  $\gamma$  și  $\gamma'$ .

Așa fiind, pe un cilindru de rotație cu axa  $X$  și raza  $\rho$ , să considerăm elicea cu pasul redus  $h$ . Fiecare binormală a acestei elice se confundă deci cu o dreaptă a complexului [C]. Se vede deci că *acest complex [C] se compune din toate binormalele la toate elicele, de același pas redus h, trase pe toate cilindrelle de rotație în jurul axei X a complexului.*

Cilindrelle formând o simplă infinitate, elicele de același pas de pe fiecare cilindru, deasemenea formează o simplă infinitate, apoi binormalele pentru fiecare elice formând iarăși o simplă infinitate, urmează că binormalele la aceste elice formează un sistem triplu infinit.

Să observăm că planul polar în fiecare punct cum a fost  $a_0$ , este determinat de binormala  $a_0b_0$  la elicea ce trece prin  $a_0$  și  $Xa_0$  raza cilindrului în acest punct. Acest plan *polar este planul normal la elicea trecând prin acest punct*. Toate dreptele acestui plan trecând prin  $a_0$ , deci toate normalele la elice, aparțin complexului. Trebuie observat că, când se zice că toate normalele la toate elicele de axă  $X$  și pas redus  $h$ , aparțin complexului, fiecare din aceste drepte este numărată în realitate de o infinitate de ori. Pentru a fi numai o singură dată numărată trebuie a fi considerată ca binormală la elicea trecând prin piciorul perpendiculararei comune la această dreaptă și la axa complexului.

Să considerăm cazul particular  $h=0$ . Trebuie exclusă ipoteza  $\alpha=0$ , căci ar corespunde drepte paralele cu axa  $X$ , și căror ansamblu ar forma o congruență și nu un complex. În cazul acesta avem  $\rho=0$  pentru toate dreptele complexului; cu alte cuvinte, se obține complexul tuturor dreptelor care întâlnesc axa  $X$ . Un astfel de *complex* se zice *special*.

Când  $h=\infty$ , trebuie exclusă ipoteza  $\rho=\infty$ , căci ar corespunde dreptele în întregime aruncate la infinit. În acest caz, avem  $\alpha=\frac{\pi}{2}$ , ceea ce dă toate dreptele perpendiculare pe axa  $X$ , adică formând complexul special a cărui axă este dreapta de la infinit a planelor normale la  $X$ , adică conjugata  $\delta$  a axei  $X$ .

**101. Congruențe lineare. Fascicole de complexe lineare.**  
1º Să scriem ecuația generală a unui complex linear sub forma

$$(7) \quad [C] \equiv \alpha l + \beta m + \gamma n + \delta p + \varepsilon q + \varphi r = 0.$$

Condiția ca acest complex să fie special, adică pentru ca toate dreptele  $(l, m, n, \dots)$  ale sale să întâlnească aceeaș dreaptă D, este de forma (4), de aceeaș formă cu (7). De unde urmează că coordonatele lui D, luate în aceeaș ordine ca și pentru dreapta  $(l, m, n, \dots)$ , sunt  $\delta, \varepsilon, \varphi, \alpha, \beta, \gamma$ . Aceste cantități fiind coordonatele unei drepte, verifică relația (2) (No. 97), adică

$$(8) \quad \alpha\delta + \beta\varepsilon + \gamma\varphi = 0,$$

care este relația cerută ca acest complex să fie special.

2º Așa fiind, fie

$$\begin{aligned} C_0 &\equiv \alpha_0 l + \beta_0 m + \gamma_0 n + \delta_0 p + \varepsilon_0 q + \varphi_0 r = 0, \\ C_1 &\equiv \alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n + \delta_1 p + \varepsilon_1 q + \varphi_1 r = 0 \end{aligned}$$

ecuațiile a două complexe lineare. Dreptele lor comune formează o congruență de ordinul 1 și clasa 1, care se zice *congruență lineară*. Se mai zice că o congruență lineară c este intersecția a două complexe  $C_0$  și  $C_1$ .

Dacă observăm că coordonatele oricărei drepte a congruenței c verifică relația

$$(9) \quad C_0 + \lambda C_1 = 0,$$

se vede că această congruență este un element comun la toate complexele, în număr simplu infinit, făcând să varieze  $\lambda$  în ecuația (9), și al căror ansamblu formează un *fascicol de complexe*. Se zice că congruența c este baza acestui fascicol.

Printre complexele acestui fascicol, se găsesc două speciale, S și S'. Scriind între coeficienții  $\alpha_0 + \lambda\alpha_1, \beta_0 + \lambda\beta_1, \dots, \varphi_0 + \lambda\varphi_1$ , din (9), condiția (8) ca să fie special, obținem o ecuație de gradul al doilea în  $\lambda$ , ale cărei rădăcini reale, imaginare sau confundate, determină pe S și S'. Congruența c poate fi privită ca intersecția complexelor S și S'. Deci, *toate dreptele congruenței întâlnesc două drepte numite directoare, care sunt axele complexelor S și S'*.

Reciproc, congruența ale cărei toate dreptele întâlnesc două drepte date, este de ordinul 1 și clasa 1, deci o congruență lineară.

3º Dreptele D și Δ pe care le întâlnesc toate dreptele congruenței c sunt conjugate în raport cu unul oarecare din complexele fascicoului (9). În adevăr, toate dreptele ce trec prin acelaș punct M al lui D și rezemându-se pe Δ, aparțin congruenței și deci, complexului considerat. Ele sunt deci situate

în planul polar al acestui punct, care este planul format de  $M$  și  $\Delta$ . Deci planele polare ale tuturor punctelor de pe  $D$  conțin pe  $\Delta$ , ceea ce arată că dreptele  $D$  și  $\Delta$  sunt conjugate în raport cu complexul.

4º Dacă ecuația de gradul al doilea în  $\lambda$ , ce determină complexele speciale  $S$  și  $S'$ , are o rădăcină dublă, ar părea că  $D$  și  $\Delta$ , care sunt axele complexelor  $S$  și  $S'$ , fiind confundate, congruența  $c$  nu se distinge de complexul special având ca axă această directoare unică. Pentru a vedea că nu este așa, să considerăm întai directoarele  $D$  și  $\Delta$  infinit vecine și apoi să trecem la limită. Se vede atunci că *în acest caz limită, dreptele congruenței c sunt toate tangente la aceeași cuadică dealungul generatoarei sale D.*

5º De oarece nu există, în general, de cât două drepte care să întâlnescă patru drepte date, urmează că *o congruență c este complet definită când se dau patru din dreptele sale*, cu condiție ca aceste patru drepte să nu ațină la aceeași semi-cuadică.

6º Dacă cele două complexe speciale ce definesc fascicoul au axe concurente, congruența, intersecția complexelor, care se compune din toate dreptele ce întâlnesc aceste axe, conține, deci, dreptele situate în planul acestor axe și toate cele ce trec prin intersecția lor. *Fasciculul este atunci special* și se compune numai din complexe speciale.

**102. Rețele și sisteme de complexe lineare.** 1º Considerând trei complexe lineare,

$$C_0=0, \quad C_1=0, \quad C_2=0,$$

dreptele care le sunt comune, formează o simplă infinitate, o serie adică ele sunt generatoarele unei suprafețe riglate  $\Sigma$ . Pe de altă parte, ele aparțin la fiecare din complexele reprezentate de ecuația

$$(10) \qquad C_0 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0,$$

care se zice că formează o *rețea de complexe*, iar suprafața riglată  $\Sigma$  comună, se zice *baza rețelii*.

2º Scriind pentru complexele (10) condiția (8) între coeficienții

$$\alpha_0 + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 \dots \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2,$$

ai complexului (10), ca să fie special, se obține o ecuație de gradul al doilea în  $\lambda_1, \lambda_2$ , cu o simplă infinitate de soluții. Axele acestor complexe speciale formează deci o serie, a cărei fiecare

dreaptă este întâlnită de fiecare din dreptele suprafeței care e baza rețelii. De unde urmează că seria formată din dreptele bazei și seria formată de axele complexelor speciale să fie fiecare o semicuadrică, aceste două semicuadrice fiind complementare (ambele să formeze o cuadrică).

3º În cazul a patru complexe, avem un număr finit de drepte comune la toate complexele în număr triplu infinit, definit de ecuația

$$(11) \quad C_0 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = 0.$$

Condiția (8), formată cu coeficienții acestei ecuații, fiind de gradul al doilea în  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , urmează că sunt o dublă infinitate de complexe speciale, ale căror axe formează o congruență. Aceste axe întâlnind dreptele în număr finit comune la toate complexele sistemului (11), aceste drepte nu pot fi de căt în număr de două (căci în caz contrar axele întâlnindu-le ar forma o semicuadrică și nu o congruență) și deci, axele complexelor speciale ale sistemului formează o congruență lineară având ca directoare cele două drepte comune la toate complexele sistemului.

4º Considerând sistemul cuadruplu infinit ( $\infty^4$ ) de complexe, reprezentat de ecuația

$$(12) \quad C_0 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 + \lambda_4 C_4 = 0,$$

complexele ce-l compun nu mai au nici o dreaptă comună, și nu mai putem face raționament analog ca în cazul precedent. Dar, dacă unul din complexe este special, axa sa are coordinatele

$$\begin{aligned} l &= \delta_0 + \lambda_1 \delta_1 + \dots + \lambda_4 \delta_4, \quad m = \varepsilon_0 + \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_4 \varepsilon_4, \\ n &= \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_4 \varphi_4, \quad p = \alpha_0 + \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_4 \alpha_4, \\ q &= \beta_0 + \lambda_1 \beta_1 + \dots + \lambda_4 \beta_4, \quad r = \gamma_0 + \lambda_1 \gamma_1 + \dots + \lambda_4 \gamma_4. \end{aligned}$$

Deci, între aceste 6 cantități, ce depind de patru parametrii  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ , există o relație lineară și omogenă. Formând expresia

$$H = Ll + Mm + Nn + Pp + Qq + Rr$$

și ordonând-o sub forma

$$H = H_0 + H_1 \lambda_1 + H_2 \lambda_2 + H_3 \lambda_3 + H_4 \lambda_4,$$

se vede că anulând cele cinci expresii  $H_0, H_1, \dots, H_4$ , se obțin cinci ecuații lineare și omogene în  $L, M, \dots, R$ , care permit a determina un sistem de valori ai acestor coeficienți pentru care  $H = 0$ . Această relație lineară și omogenă  $H = 0$  în  $l, m, \dots, r$ , arată că axele complexelor speciale ale sistemului formează ele însi-le un complex.

**NOTIUNI SUMARE  
DE GEOMETRIE CINEMATICĂ ÎN SPAȚIU.  
GENERALITĂȚI.**

103. Pentru studiul mișcării unei figuri în spațiu, vom raporta mișcarea la un triedru tridreptunghic fix  $Oxyz$ . Figura variabilă o presupunem invariabil legată de un triedru  $O_1x_1y_1z_1$ , care variază odată cu figura, astfel că dacă poziția triedrului  $O_1x_1y_1z_1$  este știută și poziția figurei față de acest triedru este cunoscută. În aceste condiții, un punct  $M$  al figurei mobile descrie o traectorie în raport cu triedrul fix și o altă traectorie față de triedrul mobil.

Cum poziția unui triedru  $O_1x_1y_1z_1$  depinde de 6 parametrii, urmează că poziția unui solid în spațiu depinde de 6 parametrii. Deci, putem să ne închipuim mișcări ale unui solid cu diferite grade de libertate. În cazul unei mișcări cu două grade de libertate, punctele figurei descriu suprafete traectorii. În mișcarea cu un grad de libertate, care este mișcarea propriu zisă în Mecanică, punctele figurei descriu curbe în spațiu.

Însemnând cu  $M^n$  o mișcare cu  $n$  grade de libertate, să înpunem la o astfel de mișcare o condiție suplimentară; se obțin, în număr infinit, mișcări  $M^{n-1}$ , cu  $(n-1)$  grade de libertate, toate compatibile cu condițiile ce au definit mișcarea  $M^n$  considerată. Se vede că mișcările  $M^{n-1}$  sunt conținute în mișcarea  $M^n$ .

În particular, orice mișcare  $M^1$  poate fi determinată prin condiția ca cinci din punctele sale să descrie respectiv cinci suprafete date în sistemul fix. Trebuie însă observat că fiecare din aceste puncte nu va putea să ocupe pe suprafață corespunzătoare o poziție oarecare, și că va descrie, din contră, o traectorie determinată de natura celorlalte patru suprafete care determină mișcarea.

Dacă voim ca un punct al sistemului mobil să descrie o traectorie definită în raport cu sistemul fix, aceasta însemnează că punctul trebuie să se miște pe două suprafete trecând prin acea traectorie; aceasta este deci o condiție dublă. Așa fiind, o mișcare  $M^1$  este perfect determinată, dacă se dau traectoriile a două din punctele sale și o suprafață pe care trebuie să rămâne un al treilea punct al sistemului.

Pentru o mișcare  $M^2$ , se pot da suprafetele traectoriei a patru din punctele sistemului mobil. În acest caz, fiecare din

ele va putea ocupa o poziție oarecare pe suprafața traectorie corespunzătoare, negreșit în interiorul a anumite regiuni definite prin condiția ca distanța mutuală dintre diversele puncte să conserve o mărime constantă.

Pentru a preciza sensul care se cuvine noțiunei geometrice a unei mișcări  $M^2$ , trebuie a observa că dacă, în mod fizic, am voi să aducem fiecare din punctele figurei mobile în toate pozițiile pe care condițiile impuse îi permit să le ocupe, aceasta nu se va putea face de către cu o mișcare  $M^1$ , pe o traectorie, ale cărei circonvoluții, în număr infinit, ar acoperi regiunea întreagă a suprafetei traectoriei unde se poate deplasa punctul considerat din mișcarea  $M^2$ .

### MIȘCAREA UNEI FIGURI CARE ARE UN PUNCT FIX.

**104. Deplasare finită.** Să considerăm o figură  $F$  care are un punct fix  $O$ . Fie  $Ox_1y_1z_1$  triedrul mobil, invariabil legat de figura  $F$  (Fig. 141), astfel că poziția  $F_1$  a figurei  $F$  este cunoscută, dacă se știe poziția triedrului  $Ox_1y_1z_1$  față de triedrul  $Oxyz$ .

Fie  $F$  și  $F_1$  două poziții ale figurei care are punctul fix  $O$ . Vom putea trece de la figura  $F$  la figura  $F_1$ , dacă vom ști să aducem triedrul  $Oxyz$  peste  $Ox_1y_1z_1$ .

Dar, fiind date unghiurile drepte  $xOy$ ,  $x_1Oy_1$ , în spațiu, putem aduce unghiul  $xOy$  peste  $x_1Oy_1$ , cu o rotație, în jurul unei axe  $O\Delta$ , la intersecția planelor perpendiculare pe planele  $x_1Ox$ ,  $y_1Oy$ , duse respectiv prin bisectoarele unghiurilor  $x_1Ox$ ,  $y_1Oy$ .

Așa dar, triedrul  $Oxyz$  se poate aduce peste triedrul  $Ox_1y_1z_1$  și deci figura  $F$  peste figura  $F_1$  cu o rotație în jurul unei axe  $O\Delta$  ce trece prin punctul  $O$ .

Așa fiind, să considerăm un punct  $M$  al figurei  $F$  și fie  $M_1$  poziția lui  $M$ , corespunzătoare în figura  $F_1$ . Putem aduce punctul  $M$  peste punctul  $M_1$ , adică  $OM$  peste  $OM_1$ , cu o rotație în jurul axei  $O\Delta$  ce trece prin punctul  $O$  și care este situată în planul perpendicular pe planul  $MOM_1$  și dus prin bisectoarea unghiului  $MOM_1$ . Deci, planele duse prin bisectoarele unghiurilor  $MOM_1$ , perpendicular pe planele  $MOM_1$ , trec prin aceeași dreaptă  $O\Delta$ .

**105. Deplasare infinitezimală.** Când figura  $F'$  este infinit vecină de  $F$ , punctul  $M'$ , omologul lui  $M$ , este infinit vecin

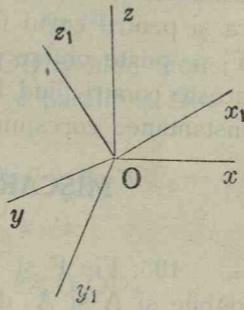


Fig. 141.

de M. Dreapta MM' devine tangentă la traectoria punctului M (curbe sferice trase pe sferă cu centru O și raza OM), planul dus prin bisectoarea unghiului MOM', perpendicular pe planul MOM', devine planul normal în M la traectoria (M) a lui M, așa că, *la un moment dat, planele normale la traectoriile descrise de punctele figurei mobile trec prin aceeași dreaptă OΔ*, numită *axa instantanee de rotație*.

Fiind date tangentele în două puncte M și N la traectoriile descrise de aceste puncte ale figurei mobile, axa instantanee de rotație este la intersecția planelor normale în M și N la curbele (M) și (N).

Considerând axele instantanee la diferite momente succeseive, axa instantanee OΔ descrie în raport cu sistemul fix Oxyz un con ( $\Gamma$ ), iar în raport cu sistemul mobil conul ( $\gamma$ ). Aceste conuri sunt tangente dealungul axei instantanee OΔ, așa că, tăind conurile ( $\Gamma$ ) și ( $\gamma$ ) cu o sferă cu centru O și raționând ca și pentru cazul figurilor plane, mișcarea continuă a figurei F' se poate obține prin rostogolirea conului ( $\gamma$ ) pe conul ( $\Gamma$ ), aceste conuri fiind la orice moment tangente dealungul axei instantanee corespunzătoare momentului considerat.

### MIȘCAREA UNEI FIGURI ÎN SPAȚIU. DEPLASARE FINITĂ.

106. Fie F și F' două poziții oarecare ale unei figuri variabile și A și A' două puncte corespunzătoare în aceste figuri. Pentru a aduce figura F peste figura F', să facem mai întâi o rotație  $R_1$  în jurul unei axe  $X_1$ , luată arbitrar într'un plan perpendicular pe mijlocul lui AA'; după această rotație, punctul A a ajuns în A', iar figura F a luat poziția F''. Figurile F' și F'' având acum comun punctul A', se poate, după cum am văzut mai sus, să aducem figura F'' peste F' cu o rotație  $R_2$  în jurul unei axe  $X_2$ , trecând prin A' și care nu întâlnește pe  $X_1$ , căci punctul lor de intersecție ar constitui pentru F un punct fix, ceea ce ar fi contra ipotezei. Deci, *se poate trece de la figura F la figura F' cu două rotații*.

Această trecere se poate face într'o infinitate de moduri, căci punctele alese A și A' au fost arbitrale; apoi, axa  $X_1$  o dreaptă în planul echidistant de A și A'. Dacă se ia ca axă  $X_1$  dreapta de la infinit a acestui plan, rotația  $R_1$  se reduce la o translație egală cu AA'. Se poate găsi însă o deplasare unică cu care se poate trece de la figura F la figura F'.

Pentru aceasta, să însemnăm cu  $R_1$  și  $R_2$  rotațiile în jurul axelor  $X_1$  și  $X_2$  de unghurile  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$ , cu care am văzut că se poate aduce figura F peste figura F'. Pentru a găsi această deplasare unică, să facem următoarea observație. Fie  $OD_1$  și  $OD_2$  (Fig. 142) două drepte perpendiculare pe axa  $O\hat{z}$  și care fac între ele unghiul  $D_1OD_2 = \frac{1}{2}\alpha$ . M fiind un punct oarecare din spațiu, fie  $M''$  simetricul său în raport cu  $OD_1$  și  $M'$  simetricul lui  $M''$  în raport cu  $OD_2$ . Să proiectăm pe planul  $OD_1D_2$  punctele  $M$ ,  $M''$ ,  $M'$  în punctele  $m$ ,  $m''$ ,  $m'$ . Avem  $Mm = m''M'' = M'm'$ . Luând pe  $O\hat{z}$  segmentul  $OO' = Mm$ , atunci  $O'M$  este egal și paralel cu  $Om$ ,  $O'M'$  egal și paralel cu  $Om'$ , deci unghiul  $MO'M' = mOm'$ . Dar unghiul

$$\begin{aligned} mOm' &= mOm'' + m''Om' = 2P_1Om'' + 2m''OP_2 = \\ &= 2(P_1Om'' + m''OP_2) = 2\frac{1}{2}\alpha = \alpha. \end{aligned}$$

Deci  $MO'M' = \alpha$ ,  $MO'M' = 2\angle D_1OD_2$ .

Cum  $O'M = O'M'$ , și cum aceste drepte sunt perpendiculare pe  $O\hat{z}$ , urmează că punctul  $M'$  se obține din  $M$  cu o rotație în jurul axei  $O\hat{z}$  de unghiul  $\alpha$ . Dar punctul  $M'$  se poate obține din  $M$  luând simetricul  $M''$  al lui  $M$  în raport cu  $OD_1$  și apoi simetricul  $M'$  al lui  $M''$  în raport cu  $OD_2$ ,  $D_1$  și  $D_2$  fiind perpendiculare pe  $O\hat{z}$  și făcând între ele unghiul  $\frac{1}{2}\alpha$ .

Deci, o rotație în jurul axei  $O\hat{z}$ , de unghiul  $\alpha$ , se poate înlocui cu două simetrii succesive în jurul axelor  $OD_1$  și  $OD_2$  perpendiculare pe  $O\hat{z}$  și care fac între ele unghiul  $\frac{1}{2}\alpha$ .

Acestea fiind stabilite, să considerăm rotațiile cu care trecem de la punctul  $M$  la poziția corespunzătoare  $M'$ . Însemnând cu  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  unghurile acestor rotații, în jurul axelor  $X_1$  și  $X_2$  fie  $O_1O_2$  perpendiculara comună la aceste axe (Fig. 143). Să,

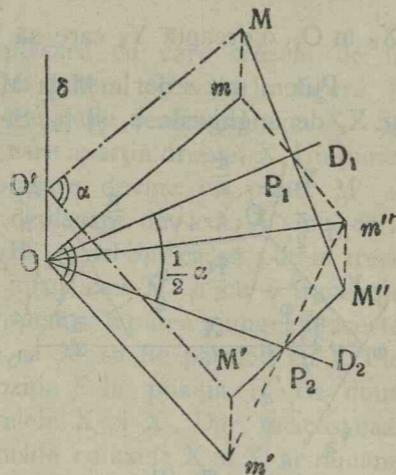


Fig. 142.

luăm în planul perpendicular pe  $X_1$  în  $O_1$  o dreaptă  $Y_1$  care să facă cu axa  $O_1O_2 \equiv Y$  unghiul  $\frac{\varphi_1}{2}$ ; în planul perpendicular pe  $X_2$  în  $O_2$ , o dreaptă  $Y_2$  care să facă cu  $Y$  unghiul  $\frac{\varphi_2}{2}$ .

Putem trece de la  $M$  la  $M'$  cu rotațiile în jurul axelor  $X_1$  și  $X_2$  de unghiurile  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$ . Servindu-ne de observarea de mai

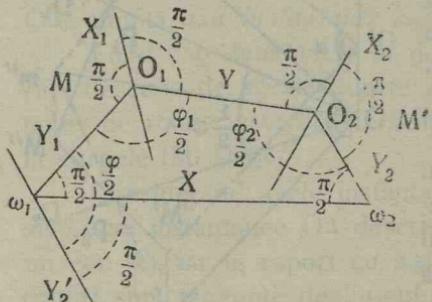


Fig. 143.

sus, această trecere o putem face astfel. Se ia simetricul  $M''$  al lui  $M$  în raport cu  $Y_1$ ; apoi simetricul  $M'''$  al lui  $M''$  în raport cu  $Y$ ; aceste două simetrii înlocuiesc rotația de unghiul  $\varphi_1$ .

Să efectuăm acum rotația de unghiul  $\varphi_2$  în jurul axei  $X_2$ . Pentru aceasta, se ia simetricul lui  $M'''$  în ra-

port cu  $Y$ , adică  $M''$  și apoi simetricul  $M'$  al lui  $M''$  în raport cu  $Y_2$ . Cu alte cuvinte, putem trece de la  $M$  la  $M'$ , luând simetricul  $M''$  al lui  $M$  în raport cu  $Y_1$  (simetria în raport cu  $Y_1$ ) și apoi simetricul  $M'$  al lui  $M''$  în raport cu  $Y_2$  (simetria în raport cu  $Y_2$ ).

Fie  $\omega_1\omega_2 \equiv X$  perpendiculara comună a axelor  $Y_1$  și  $Y_2$  și fie  $Y'_2$  o paralelă cu  $Y_2$  dusă prin  $\omega_1$  și să însemnăm cu  $\frac{\varphi}{2}$  unghiul axelor  $Y_1$  și  $Y'_2$ . Putem trece dela  $M$  la  $M'$  în modul următor. Se ia simetricul  $M''$  al lui  $M$  în raport cu  $Y_1$ , apoi simetricul  $M_1$  al lui  $M''$  în raport cu  $Y'_2$ ; apoi simetricul  $M''$  al lui  $M_1$  în raport cu  $Y_2$  și în fine simetricul  $M'$  al lui  $M''$  în raport cu  $Y_2$ . Primele două simetrii în jurul axelor  $Y_1$  și  $Y'_2$  ce fac unghiul  $\frac{\varphi}{2}$ , fac cât o rotație de unghiul  $\varphi$  în jurul axei  $X$ ; apoi, simetriile, de la  $M_1$  la  $M''$  în jurul lui  $Y'_2$  și cea de la  $M''$  la  $M'$  în jurul axei  $Y_2$  paralelă cu  $Y'_2$ , ambele perpendiculare pe  $X$ , fac cât o translatăie dealungul axei  $X$ .

Deci, se poate trece de la  $M$  la  $M'$ , sau de la figura F la figura  $F'$ , cu o rotație în jurul axei  $X$  și cu o translatăie dealungul axei  $X$ .

Punctele  $M$  ale figurei, care se găsesc pe axa  $X$ , au ca puncte corespunzătoare tot puncte ale axei  $X$ ; deci dreapta  $D$

a figurei care coincide cu  $X$ , după această deplasare este însăși dreapta  $D$  (însă punctele transformate nu rămân aceleași, nu coincid cu omoloagele lor).

Să arătăm că această deplasare cu care trecem de la figura  $F$  la  $F'$  este unică. Fie că putem trece de la figura  $F$  la figura  $F'$  cu o rotație și o translație dealungul axei  $X$ . Să considerăm punctele figurei  $F$  care aparțin dreptei  $X$ . Un punct  $M$  al acestei drepte, după deplasare devine un punct  $M'$  al acestei drepte. Dacă ar fi altă deplasare de axă  $X'$ , cu care putem trece de la figura  $F$  la  $F'$ , ar trebui ca să putem trece de la  $M$  la  $M'$  cu o rotație în jurul axei  $X'$  și cu o translație dealungul aceleiași axe  $X'$ . Dar, pentru a putea ajunge, în aceste condiții, de la  $M$  la  $M'$ , trebuie ca  $X'$  să fie paralelă cu  $X$ . Fie atunci că putem trece de la poziția  $F$  la poziția  $F'$  cu două deplasări analoage, de axe paralele  $X$  și  $X'$ . Dar, în acest caz, dreptele figurei  $F$ , care ar coincide cu axele  $X$  și  $X'$  ar rămâne neschimbate, ceea ce nu poate avea loc de către în cazul unei translații paralele cu axele  $X$  și  $X'$  ele paralele, ceea ce este în contra ipotezei.

Deci, este o singură deplasare, de axă  $X$ , astfel că putem trece cu o singură rotație în jurul axei  $X$  și cu o singură translație dealungul axei  $X$ .

### MIȘCARE CONTINUĂ CU UN GRAD DE LIBERTATE.

**107- Deplasare infinitezimală. Mișcarea cea mai generală cu un grad de libertate.** Eile  $F$  și  $F'$  două poziții infinite vecine ale figurei variabile. Se poate trece dela o poziție la alta cu o rotație în jurul unei axe  $X$  și cu o translație dealungul acestei axe.

Succesiunea a acestor două deplasări infinitezimale, presupuse efectuate simultan, este ceea ce se numește *mișcare eliptoidală*. Limita axei  $X$  când  $F'$  tinde către  $F$  este *axa instantane de rotație și translație*, sau *axa de virație* a figurei  $F$  la momentul considerat.

Pentru a ne da seama de mișcarea continuă a figurei  $F$ , să considerăm suprafețele riglate ( $S$ ) și ( $S_1$ ), care reprezintă locul pozițiilor axei instantanee  $X$  în raport cu sistemul fix și în raport cu sistemul mobil din care face parte figura  $F$ . Aceste două suprafețe au la fiecare moment în comun o generatoare confundată cu poziția actuală a axei  $X$ .

Numind cu  $t$  parametrul arbitrar (timpul dacă vom) de

care depinde poziția figurei F, să considerăm pe (S) și ( $S_1$ ) cele două generatoare  $X'$  și  $X'_1$  care vor veni să coincidă pentru valoarea  $t + \Delta t$  a parametrului. Fie (C) o curbă pe suprafața (S) și fie pe ( $S_1$ ) curba ( $C_1$ ) locul punctelor care vor veni să coincidă cu aceleia ale curbei (C), (C) și ( $C_1$ ) tăindu-se neapărat în punctul I al axei X (Fig. 144).

Însemnând cu  $I'$  și  $I'_1$  punctele unde axele  $X'$  și  $X'_1$  tăie curbele (C) și ( $C_1$ ), aceste puncte sunt corespunzătoare. Notând cu  $Y'$  axa mișcării elicoidale aducând, în poziția actuală,  $X'_1$  peste  $X'$ ,  $Y'$  se confundă de asemenea la limită cu X.

Deplasarea elementară care permite de a aduce  $I'_1$  în  $I'$  se compune dintr-o translatăie  $I'_1 I''$  paralelă cu  $Y'$  și dintr-o rotație în jurul acestei axe, în care  $I''$  descrie un arc de

cerc având centrul  $J'$  în piciorul perpendicularei coborâte din  $I'$  pe  $Y'$ . Însemnând cu  $\Delta\varphi$  unghiul acestei rotații, avem

$$\frac{I''I'}{\Delta t} = \frac{I''I' \Delta\varphi}{\Delta\varphi \Delta t} = \frac{2 I' J' \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = I' J' \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

De aici deducem

$$\lim \frac{I''I'}{\Delta t} \rightarrow 0,$$

căci  $I'J' \rightarrow 0$ .

Întrebuițând notația vectorială, avem

$$\vec{I}_1 I' = \vec{I}_1 I'' + \vec{I}'' I'$$

și ținând seamă de egalitatea precedentă, găsim

$$\lim \frac{\vec{I}_1 I'}{\Delta t} = \lim \frac{\vec{I}_1 I''}{\Delta t}.$$

Dar,  $\frac{\vec{I}_1 I''}{\Delta t}$  are o limită finită, reprezentată cu un vector  $v$ , viteza

de translatăie paralelă cu X, în caz când  $t$  reprezintă timpul.

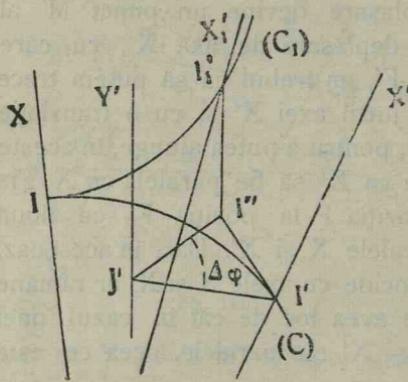


Fig. 144.

De oarece  $\lim \frac{\vec{I''}\vec{I'}}{\Delta t} \rightarrow 0$ , rezultă că la limită, planele  $X II'$  și  $X I I'_1$  sunt confundate, cu alte cuvinte, suprafețele  $(S)$  și  $(S_1)$  au acelaș plan tangent în  $I$ ; cum punctul  $I$  este oarecare pe  $X$ , se vede că suprafețele  $(S)$  și  $(S_1)$  se racordează dealungul axei instantanee.

Deoarece n'avem  $\lim \frac{\vec{I_1}\vec{I'}}{\Delta t} \rightarrow 0$ , curbele  $(C)$  și  $(C_1)$  nu sunt tangente în  $I$  și arcele corespunzătoare ale acestor curbe nu mai au aceeași lungime.

Mișcarea elementară se reduce deci la rostogolirea suprafeței  $(S_1)$  în jurul generatoarei sale de racordare  $X$  cu  $(S)$ , urmată de o alunecare dealungul acestei generatoare, de unde și numele de *viratie* dată axei  $X$ .

*Observări.* 1º Suprafețele  $(S)$  și  $(S_1)$  se racordează dealungul generatoarelor corespunzătoare și de aceea au acelaș parametru de distribuție dealungul generatoarelor; punctele și planele centrale corespunzătoare vin în coincidență, de unde urmează că liniile de stricțiune formează o pereche de curbe ca cele de mai sus,  $(C)$  și  $(C_1)$ .

Parametrii de distribuție fiind egali, urmează că dacă suprafața  $(S)$  este desfășurabilă, și suprafața  $(S_1)$  este desfășurabilă.

2º Dacă axa instantanee este fixă în raport cu figura mobilă,  $X'_1$  coincide cu  $X$  și punctul  $I'_1$  se găsește pe  $X$  (fără a coincide cu  $I$ ); cu alte cuvinte,  $\lim \frac{\vec{II'_1}}{\Delta t}$  este un vector dirijat după  $X$ . Dar, din egalitatea vectorilor

$$\vec{II'} = \vec{II'_1} + \vec{II'_1},$$

ținând seamă de  $\lim \frac{\vec{II'_1}}{\Delta t} = 0$ , urmează că

$$\lim \frac{\vec{II'}}{\Delta t} = \lim \frac{\vec{II'_1}}{\Delta t} + \lim \frac{\vec{II''}}{\Delta t}.$$

adică vectorul lui  $\frac{\vec{II'}}{\Delta t}$  este dirijat de asemenea după  $X$ . Dar acest rezultat este independent de alegerea punctului  $I$  pe  $X$ , de unde urmează că mișcarea elementară a acestei axe este o alunecare pe ea însăși. Deci, dacă axa instantanee este fixă în raport cu figura mobilă, este fixă și în spațiu.

3º Dacă, pentru fiecare poziție, translația elementară se anulează, adică  $v=0$ , avem

$$\lim \frac{\overset{\rightarrow}{II'}}{\Delta t} = \lim \frac{\overset{\rightarrow}{II'_1}}{\Delta t}.$$

În acest caz, curbele  $(C)$  și  $(C_1)$  sunt tangente în  $I$  și se rostogolesc una pe celalătă, și cum formează pe  $(S)$  și  $(S_1)$  o pereche de curbe corespunzătoare, se poate zice că *mișcarea relativă a acestor suprafețe este ea însăși o rostogolire*.

**108. Complexul normalelor.** În fiecare punct al unui sistem mobil există o simplă infinitate de normale la traectoria acestui punct. Aceste puncte fiind ele însăși în număr  $\infty^3$  (formând o triplă infinitate), s'ar părea că toate normalele la toate traectoriile punctelor sistemului mobil să formeze la fiecare moment o cuadruplă infinită (în număr  $\infty^4$ ) ca și ansamblul dreptelor oarecare din spațiu. Dar aceasta nu se poate, din cauza proprietății stabilită (No. 46) că orice dreaptă, intim legată de sistemul mobil (care rămâne constantă ca mărime) care e normală la traectoria unuia din punctele sale este deodată normală la toate traectoriile tuturor punctelor sale. Orice normală la traectoria unui punct al figurei, fiind în același timp normală la traectoriile tuturor punctelor figurei pe care normala le conține, intră de o simplă infinitate de ori ( $\infty^1$ ) în numărul general al normalelor. Normalele sunt în număr de  $\infty^3$ , deci formează un complex.

Mai mult, toate normalele trecând prin același punct, fiind, din cele ce am văzut, normale la traectoria acestui punct, sunt toate în același plan, în planul normal la această traectorie, și deci, *toate normalele la traectoriile punctelor figurei mobile în spațiu aparțin, la fiecare moment, la un complex linear*  $[C_n]$ .

De aici urmează că normalele la toate traectoriile, la fiecare moment, se confundă cu acelea ale unui ansamblu de elice toate de același pas și de aceeași axă, ca acelea pe care le descrie diversele puncte considerate, dacă ar fi antrenate într-o mișcare elicoidală comună în jurul lui  $X$ . Regăsim astfel mișcarea de virărie infinit mică împrejurul axei instantanee  $X$  care face ca toate punctele să descrie arce infinit mici tangente la traectoriile lor adevărate și care, pentru acest motiv, se numește, uneori, *mișcarea elicoidală tangentă la mișcarea reală pentru poziția considerată*.

Se vede, de altfel, că axa instantanee este axa complexului

$[C_n]$ , că planul normal în fiecare punct este planul polar al acestui punct în raport cu complexul  $[C_n]$ ; că, dacă numim *focar* al unui plan antrenat în mișcare, punctul acestui plan la traectoria căruia acest plan este normal, un astfel de focar se confundă cu polul planului în raport cu  $[C_n]$ .

Se vede, deci, din cele de mai sus, că proprietățile obținute pentru complexele lineare  $[C]$ , sunt proprietățile mișcării cea mai generală cu un grad de libertate. Astfel (No. 100), *planele normale la traectoriile punctelor unui plan legat de figura mobilă, trec prin focarul acestui plan*; apoi (No. 101), *planele normale la traectoriile punctelor unei drepte D trec prin aceeași dreaptă  $\Delta$*  (conjugata sa în raport cu  $[C_n]$ ) și reciproc, *planele normale la traectoriile punctelor dreptei  $\Delta$  trec prin dreapta D*.

De aici rezultă că normalele la suprafața riglată  $[D]$ , născută de  $D$ , dealungul lui  $D$ , întâlnesc  $\Delta$ . Cu alte cuvinte, *paraboloidul normalelor la suprafața  $[D]$ , dealungul lui D, conține pe  $\Delta$ . Aceste normale, fiind toate perpendiculare la direcția planului perpendicular pe  $D$ , întâlnesc diametrul conjugat directii planului, care aparține prin urmare deasemenea paraboloidului.*

Să considerăm *punctul central* al lui  $[D]$  pe  $D$ , adică punctul către care tinde piciorul perpendicularării comune pe  $D$  și a generatoarei infinit vecine. Acest punct se confundă cu vârful paraboloidului normalelor, adică cu punctul unde normala la acest paraboloid este paralelă cu intersecția planelor directoare la suprafață (unul normal lui  $D$ , celalt paralel de odată cu  $D$  și  $\Delta$ ).

Pentru a vedea poziția acestui punct față de  $D$  și  $\Delta$ , să raportăm figura la planul orizontal de proiecție perpendicular pe  $D$ , iar ca plan vertical să luăm planul paralel deodată cu  $D$  și  $\Delta$  (Fig. 145). Intersecția planelor directoare este paralelă cu linia de pământ  $xy$ . Într'un punct oarecare  $(m, m')$  al lui  $(D, D')$ , generatoarea paraboloidului normalelor este orizontală  $(mn, m'n')$  ce întâlnesc pe  $(\Delta, \Delta')$ . Normala la paraboloid este orizontală  $(mp, m'p')$ ,

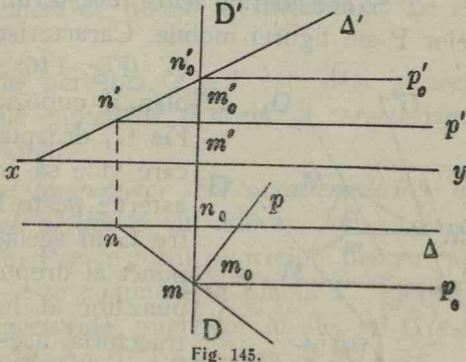


Fig. 145.

a cărei proiecție orizontală  $mp$  este perpendiculară pe  $mn$ . Ea devine paralelă cu  $xy$  în  $(m_0p_0, m'_0p'_0)$ , când generatoarea paraboloidului normalelor se confundă cu perpendiculara comună  $(m_0n_0, m'_0n'_0)$  la  $(D, D')$  și  $(\Delta, \Delta')$ .

Deci punctul central (vârful paraboloidului) este piciorul pe  $(D, D')$  a perpendiculararei comune la această dreaptă și dreapta  $(\Delta, \Delta')$ .

Dar, se știe (No. 100, 9<sup>o</sup>) că această perpendiculară comună dreptelor conjugate  $D$  și  $\Delta$ , este de asemenea la axa X a complexului  $[C_n]$ . Deci, *punctul central pe D este piciorul perpendiculararei comune la această dreaptă și axa instantaneă*.

### 109. Complexul tangentelor și al caracteristicilor.

<sup>10</sup> La fiecare din punctele sistemului mobil, în număr de  $\infty^3$ , corespunde, în fiecare poziție, tangenta la traectoria acestui punct; la fiecare din planele intim legate de sistem, de asemenea în număr de  $\infty^3$ , corespunde caracteristica sa. Atât tangentele cât și caracteristicile nasc deci câte un complex. Vom arăta că *aceste două complexe sunt identice*.

Să considerăm mai întâi o tangentă  $G$  la traectoria unui punct  $M$  al figurei mobile. Planul normal în  $M$  la această traectorie fiind planul polar al acestui punct în raport cu complexul  $[C_n]$ , trece prin conjugata  $\Gamma$  al lui  $G$ . Cum este perpendicular pe  $G$ , urmează că  $G$  este perpendiculară pe  $\Gamma$ . Se vede, de asemenea, că, dacă  $G$  și  $\Gamma$  sunt conjugate în raport cu  $[C_n]$ , și perpendicularare, planul dus prin fiecare din ele perpendicular pe cealaltă, este normal la traectoria punctului unde acest plan întâlneste pe cealaltă.

Deci, *complexul  $[C_1]$  al tangentelor la traectorii se confundă cu acela al dreptelor  $G$  astfel că conjugatele lor  $\Gamma$  în raport cu  $[C_n]$  să le fie perpendicularare*.

<sup>20</sup> Să considerăm acum *complexul caracteristicilor G* a planeelor  $P$  ale figurei mobile. Caracteristica  $G$  este limita dreptei

$G'$  (Fig. 146) de intersecție a acestui plan  $P$  cu poziția sa infinit vecină  $P'$ . Fie  $G_1$  dreapta însemnată pe planul  $P'$  care vine să coincidă cu  $G$  când  $P'$  se aştere peste  $P$ . Dreapta  $G_1$  tinde către  $G$  în același timp cu  $G'$ . Fie  $M$  un punct al dreptei  $G$ ,  $M_1$  punctul corespunzător al lui  $G_1$ ; tangenta în  $M$  la traectoria acestui punct este limita lui

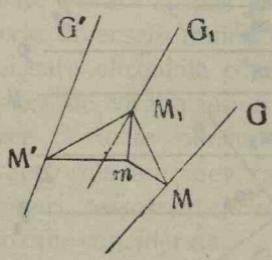


Fig. 146.

$MM_1$ . Dar, dacă se coboară din  $M_1$  o perpendiculară  $M_1m$  pe

planul  $P$  și din  $m$  pe  $G'$  perpendiculara  $mm'$ , se vede că unghiul  $mM'M_1$ , care este unghiul plan corespunzător diedrului format de planele  $P$  și  $P'$ , este infinit mic de primul ordin. Cum distanța  $M_1M'$  de la  $M_1$  la  $G'$  este de ordinul întâi, se vede că  $mM_1$  este infinit mic de ordinul al doilea. Însă, în triunghiul  $M_1Mm$ ,  $MM_1$  este infinit mic de ordinul întâi, ceea ce rezultă din faptul că limita raportului  $\frac{MM_1}{\Delta t}$ , adică viteza lui  $M$ , nu este în general nulă, afară de cazul excepțional, când punctul  $M$  trece printr-un punct de întoarcere al traectoriei sale; deci, unghiul din  $M$ , care este egal cu unghiul pe care  $MM_1$  îl face cu planul  $P$ , este infinit mic și deci tangenta la traectoria punctului  $M$ , limita lui  $MM_1$ , se află în acest plan. Punctul  $M$  fiind de altfel oarecare pe  $G$ , se vede că *caracteristica planului  $P$  este locul punctelor al acestui plan a cărui traectorie este tangentă la planul considerat.*

Deci, planele normale la traectoriile punctelor caracteristicei  $G$  sunt perpendiculare pe planul  $P$ . Pe de altă parte, din cele ce am văzut, ele trec prin focalul  $p$  al planului. Deci, ele trec prin perpendiculara  $\Gamma$  a planului  $P$ , dusă prin  $p$ , de unde urmează că *caracteristica planului  $P$  este conjugată, în raport cu complexul  $[C_n]$ , a perpendicularei pe planul  $P$  în focalul  $p$ ,* adică, după chiar definiția focalului, *a tangentei la tractoria punctului  $p$ .*

Deci, este identitate între complexul tangentelor și acela al caracteristicilor planelor.

3º Din cele ce am văzut, rezultă, că: dacă  $G$  și  $\Gamma$  sunt o pereche de drepte conjugate în raport cu  $[C_n]$ , și perpendiculare, fiecare dintre ele este caracteristica planului dus prin ea perpendicular pe cealaltă și mai este tangentă la tractoria punctului unde ea este tăiată de planul perpendicular pe ea, dus prin cealaltă.

Complexul născut de perechia  $G$  și  $\Gamma$  este deci și acela al tangentelor la tractoriile punctelor și acela al caracteristicilor planelor sistemului mobil.

4º *Complexul  $[C_1]$  al tangentelor și al caracteristicilor nu este linear, ci de ordinul al doilea.* În adevară, am văzut că caracteristica  $G$  a planului  $P$  este locul punctelor pentru care tangentă la traectoria sa este conținută în planul  $P$ . Înfășurătoarea tangentelor la tractoriile punctelor  $M$  ale lui  $G$  este deci (No. 99) curba complexului  $[C_n]$  conținută în  $P$ .

Dar fiecare din aceste tangente este, în planul  $P$ , perpendiculară dusă prin punctul de contact  $M$  corespunzător luat pe  $G$ , la dreapta care unește acest punct  $M$  cu focalul  $p$  al planului (piciorul conjugatei  $\Gamma$ ) (Fig. 147): ele au deci ca infășurătoare parabola cu focalul  $p$ ,  $G$  fiind tangentă la vârf. Deci, curba complexului fiind o parabolă, complexul este de ordinul

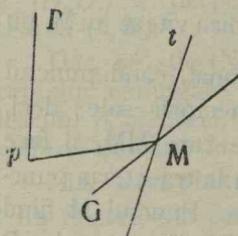


Fig. 147

al doilea. Acest complex este unul din cele mai simple din complexele de ordinul al doilea, numite *complexe tetraedrale*, care se bucură de proprietatea că raportul armonic al planelor duse prin fiecare dreaptă a complexului și vîrfurile unui tetraedru oarecare este constant.

**5º** Pentru că tangentele la traectoriile punctelor  $M$  ale caracteristicei  $G$  a planului  $P$  sunt în acest plan, perpendicularele la acest plan duse prin aceste puncte sunt normale la traectoriile lor, ele aparțin deci complexului  $[C_n]$ . Cum aceste drepte sunt paralele cu orice plan perpendicular pe  $P$ , ele întâlnesc diametrii conjugati ai direcțiilor acestor plane. Urmează că *caracteristica planului P poate fi obținută ca proiecția ortogonală pe acest plan a diametrului conjugat directii unui plan oarecare perpendicular pe planul P*.

**110. Aplicație.** Să considerăm un plan  $P$ , care se rostogolește fără să alunece pe o desfășurabilă cu care este la fiecare moment în contact cu o generatoare  $G$ . Orice curbă  $C$  invariabil însemnată pe acest plan, naște ceeace se zice o *suprafață moulure* (ciubuc, ornament în relief pe zidării).

Deplasarea elementară reducându-se în acest caz la o rotație în jurul lui  $G$ , normalele la traectoriile tuturor punctelor invariabil legate de  $P$  întâlnesc pe  $G$ ; ele formează în acest caz un complex special de axă  $G$ . Traectoria oricărui punct  $M$  al lui  $C$  este deci ortogonală planului  $P$  și planul tangent în  $M$  la suprafața  $[C]$  născută de  $C$ , conținând tangentă la această traectorie, este perpendicular pe  $P$ . Acest plan tăind ortogonal suprafața  $[C]$  dealungul lui  $C$ , rezultă că este o geodezică a suprafaței  $[C]$  și după teoremele lui Ioachimsthal (No. 88,7º), urmează următoarele proprietăți stabilite de Monge, anume că *curba C este o linie de curbură a suprafeței ciubuc pe care ea o naște*. Cum traectoriile punctelor  $M$  ale acestei curbe sunt ortogonale la toate pozițiile curbei  $C$ , ele constituie *al doilea sistem de liniile de curbură a acestei suprafețe*.

## MIŞCAREA CONTINUĂ CU DOUĂ GRADE DE LIBERTATE.

**111. Relațiunea dintre normelele la suprafețele traectorii.** În această mișcare  $M^2$  fiecare din punctele  $M$  ale sistemului mobil descriu o suprafață traectorie  $[M]$ , locul tuturor traectoriilor ( $M$ ) pe care le poate descrie punctul  $M$  în toate mișările  $M^1$  conținute în mișcarea  $M^2$ . Toate traectoriile ( $M$ ) trecând printr-o poziție determinată a punctului  $M$ , admit plane normale care trec prin normala  $MN$  în  $M$  la suprafața traectorie  $[M]$ . Această normală  $MN$  este deci comună la planele normale la traectoriile ( $M$ ) corespunzătoare la două mișcări  $M^1$  particulare conținute în  $M^2$ , pe care să le notăm ca  $M_1^1$  și  $M_2^1$ . Ansamblul tuturor normalelor  $MN$  formează deci congruență lineară  $C_n$  comună complexelor lineare  $[C_n^1]$  și  $[C_n^2]$  ale normalelor corespunzătoare mișcărilor  $M_1^1$  și  $M_2^1$ . Dar, congruența  $C_n$  admite două directoare  $D$  și  $\Delta$ , conjugate în raport cu unul oarecare din complexele  $[C_n]$  ale fascicolului admitând această congruență ca bază. De unde urmează că *normelele la suprafețele tractorii ale tuturor punctelor figurei mobile cu două grade de libertate ( $M^2$ ) întâlnesc toate, pentru fiecare poziție a figurei, două aceleasi drepte  $D$  și  $\Delta$  care depind de altfel de această poziție.*

De aci urmează că dacă se consideră o dreaptă  $G$  a figurei mobile cu o mișcare  $M^2$ , normele la suprafețele traectorii ale diferitelor puncte ale lui  $G$  aparțin, pentru fiecare poziție a acestei drepte, la o semicuadrnică ale cărei directoare sunt  $G$ ,  $D$  și  $\Delta$ .

**112. Axe instantanee conjugate de rotație.** Din faptul că pentru a obține congruența  $C_n$ , am luat două mișcări  $M^1$  oarecare conținute în mișcarea  $M^2$ , urmează că complexul  $[C_n]$  corespunzător la una din aceste mișcări, conține congruența  $C_n$ ; cu alte cuvinte, complexele  $[C_n]$  corespunzătoare, pentru o poziție dată, la toate mișcările infinit mici, conținute în mișcarea  $M^2$  considerată, formează un fascicol linear a cărui bază este congruența  $C_n$ .

Dar, printre toate aceste complexe se află două complexe speciale, având ca axe respectiv directoarele  $D$  și  $\Delta$  ale congruenței  $C_n$ . Mișcările  $M^1$  corespunzătoare sunt deci astfel că normelele la toate traectoriile corespunzătoare întâlnesc, fie pe  $D$ , fie pe  $\Delta$ ; sunt deci rotații, ale căror axe sunt respectiv

D și Δ. Astfel, printre toate mișcările  $M^1$ , infinit mici, conținute în mișcarea  $M^2$  dată, plecând de la poziția considerată, sunt două rotații infinit mici de axe respectiv D și Δ.

Dar, se poate arăta, că orice mișcare  $M^1$  infinit mică, conținută în mișcarea  $M^2$  dată, poate fi obținută prin compunerea a două oarecare mișcări  $M^1$ . În adevăr, coordonatele  $(x, y, z)$  ale unui punct oarecare M al sistemului mobil se pot exprima în funcțiune de doi parametrii  $u$  și  $v$ ; deci, pentru creșteri infinit mici ale lui  $u$  și  $v$ , avem

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Să însemnăm cu U și V vectorii ale căror proiecții pe axe sunt respectiv

$$\left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

Acești doi vectori variază de la un punct la altul, dar sunt independenți de mișcarea elementară  $M^1$  definită de  $(du, dv)$ , plecând de la poziția considerată. Numind cu  $ds$ , deplasarea elementară a punctului M în această mișcare  $M^1$ , avem, cu notația vectorială,

$$\vec{ds} = \vec{U} du + \vec{V} dv.$$

Dar, dacă  $(du_1, dv_1)$  și  $(du_2, dv_2)$  sunt creșterile infinit mici corespunzătoare la două mișcări elementare particulare  $M'_1$ ,  $M'_2$ , pentru care deplasările lui M sunt  $ds_1$  și  $ds_2$ , se pot totdeauna găsi doi factori  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$ , astfel că

$$du = \lambda_1 du_1 + \lambda_2 du_2, \quad dv = \lambda_1 dv_1 + \lambda_2 dv_2,$$

și prin urmare să avem

$$\vec{ds} = \lambda_1 \vec{ds}_1 + \lambda_2 \vec{ds}_2.$$

Astfel, deplasarea unui punct oarecare al sistemului în mișcarea elementară  $M^1$  se obține prin sumarea geometrică a deplasărilor acestui punct în două mișcări elementare particulare  $M'_1$ ,  $M'_2$ , conținute în mișcarea  $M^2$ , aceste deplasări fiind multiplicăte respectiv prin doi factori numerici  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  independenți de poziția punctului M.

Sau, mai simplu, orice mișcare elementară  $M^1$  conținută

în  $M^2$  poate fi descompusă în două mișcări particulare  $M_1^1$ ,  $M_2^1$ , de asemenea conținute în  $M^2$ .

Dacă luăm pentru aceste mișcări particulare rotații de axe D și  $\Delta$ , se vede că orice mișcare elementară  $M^1$  a sistemului supus la mișcarea  $M^2$ , plecând de la poziția considerată, poate fi descompusă în două rotații infinit mici respectiv în jurul axelor D și  $\Delta$ , care, pentru acest motiv, se numesc axe instantanee de rotație conjugate.

2º Să găsim acum locul axelor instantanee X corespunzătoare la fiecare din aceste mișcări elementare  $M^1$ . Pentru dreptele D și  $\Delta$  sunt conjugate în raport cu complexul  $[C_n]$  corespunzător, axa X (No. 100,9º) tăie sub un unghi drept perpendiculara comună Y a dreptelor D și  $\Delta$ . Să considerăm de altă parte, într-un punct A al lui D, generatoarele de al doilea sistem pentru diferenți parabolizi echilateri trecând prin D și  $\Delta$  (No. 100,8º). Fiecare dintre ele întâlnesc dreapta  $\Delta$ , adică este conținută în planul (A,  $\Delta$ ) și este perpendiculară la linia de stricțiune X a aceluias sistem ca D și  $\Delta$ . În definitiv, axele X sunt perpendicularare comune la Y și la dreptele planului (A,  $\Delta$ ), trecând prin A. Deci, locul acestor axe X este un cilindroid (No. 94) având ca generatoare dublă perpendiculara comună Y la dreptele D și  $\Delta$ .

**113. Suprafețele focale ale unei congruențe.** 1º Fie G o dreaptă care aparține unei congruențe și să privim această dreaptă ca suportul unei punctuale (P). Congruența poate fi născută cu o mișcare  $M^2$  a dreptei G, în care fiecare punct P al punctualei descrie o suprafață traectorie [P].

Din cele ce am văzut (No. 111), locul normalelor la suprafețele [P] dealungul lui G este o semicuadrică S. În două puncte particulare,  $P_1$  și  $P_2$ , ale lui G, generatoarele acestei semicuadrice sunt perpendicularare pe G. În adevăr, conul asimptotic al lui S este tăiat de planul dus prin vârful său perpendicular pe G după două generatoare. Generatoarele  $N_1$  și  $N_2$  ale lui S, paralele cu acestea, tăie pe G în punctele  $P_1$  și  $P_2$  căutate, unde normalele la suprafețele traectoriei  $[P_1]$  și  $[P_2]$  sunt  $N_1$  și  $N_2$ .

Când dreapta G variază ocupând succesiv toate pozițiile dreptelor congruenței, punctele  $P_1$  și  $P_2$  nasc suprafețele  $(\Sigma_1)$  și  $(\Sigma_2)$ . Vom arăta că aceste suprafețe sunt tangente în  $P_1$  și  $P_2$  la suprafețele traectoriei  $[P_1]$  și  $[P_2]$ , cu alte cuvinte, că admit ca normale în aceste puncte,  $N_1$  și  $N_2$ . Dreapta G, per-

pendiculară pe  $N_1$  și  $N_2$ , va fi deci tangentă suprafeteelor ( $\Sigma_1$ ) și ( $\Sigma_2$ ) în  $P_1$  și  $P_2$ . Aceste suprafete ( $\Sigma_1$ ) și ( $\Sigma_2$ ) sunt deci înșurătoarele dreptelor congruenței și se numesc *suprafețele focale ale congruenței*.

Să demonstrăm, de ex., să suprafața ( $\Sigma_1$ ) este normală în  $P_1$  la  $N_1$ . Fie, pe o dreaptă  $G'$  a congruenței, infinit vecină de  $G$ , punctul analog lui  $P_1$  (Fig. 148). Va fi deajuns să arăta

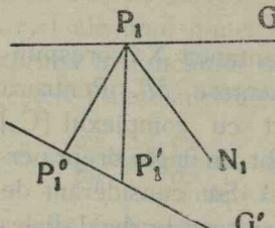


Fig. 148.

$G$  că limita dreptei  $P_1P_1'$  este perpendiculară pe  $N_1$ . Să luăm pe punctuala  $G'$ , punctul  $P_1'$  corespunzător lui  $P_1$ , adică punctul însemnat pe  $G'$  care vine în  $P_1$  când  $G'$  vine să coincidă cu  $G$  în mișcarea  $M^2$  considerată. La limită, dreapta  $P_1P_1'$  vine în planul tangent în  $P_1$  la suprafața traectorie [P<sub>1</sub>], devine deci normală la  $N_1$ . Pe de altă parte, dreapta

$P_1^oP_1'$ , confundată cu  $G'$ , coincide la limită cu  $G$ , deasemenea normală la  $N_1$ . Planul  $P_1P_1^oP_1'$  al dreptelor precedente, este deci la limită normal la  $N_1$  și deci la limită  $P_1P_1'$  conținută în acest plan este normală la  $N_1$ .

2º În particular, normalele la o suprafață depind de doi parametrii, formează deci o congruență, pentru care suprafețele focale sunt cele două părți ale desfășurării suprafeței considerate.

Dar, din cauză că în acest ultim caz, planele tangente la suprafețele focale, în punctele lor de contact cu dreapta congruenței, sunt perpendiculare între ele, urmează că *dreptele unei congruențe nu sunt în general normale la aceeași suprafață și că, pentru a fi, trebuie ca planele tangente la suprafețele focale, în cele două puncte unde ele ating aceeași dreaptă a congruenței, să fie perpendiculare între ele*.

**114. Cazul singular al mișcării cu două grade de libertate.** Să considerăm cazul în care, pentru fiecare poziție a figurei supusă la mișcarea  $M^2$ , complexele  $[C_n]$  corespunzătoare la diferențele mișcării  $M^1$  infinit mici conținute în  $M^2$ , să formeze un fascicol special. În acest caz dreptele  $D$  și  $\Delta$  fiind concorrente, orice deplasare infinit mică a figurei echivalează cu două rotații în jurul acestor axe și deci se vor putea reduce la o singură rotație unică în jurul unei axe trecând prin punctul de întâlnire al dreptelor  $D$  și  $\Delta$ .

Fie  $M$  un punct al figurei mobile în poziția considerată.

Normala la suprafața traectorie [M] a acestui punct trece prin punctul de întâlnire I al dreptelor D și  $\Delta$ , afară de cazul când M se află în planul (II) al dreptelor D și  $\Delta$ , când orice dreaptă dusă prin M în acest plan, întâlnind pe D și  $\Delta$ , este o normală pentru acest punct care descrie, oricare ar fi deplasarea infinitesimală considerată, un element de linie normal planului (II).

Pentru fiecare poziție a figurei, axele complexelor  $[C_n]$ , toate speciale, trec toate prin același punct I, și când figura ocupă toate pozițiile, în număr  $\infty^2$ , compatibile cu mișcarea  $M^2$  considerată, punctul I descrie o suprafață  $(\Sigma)$  în raport cu spațiul fix și o altă suprafață  $(\Sigma_1)$  în raport cu sistemul mobil, aceste două suprafete corespunzându-se punct cu punct, și punctele lor corespunzătoare venind succesiv să coincidă pentru a forma vârful I al fascicolului axelor complexelor  $[C_n]$  speciale relative la o poziție dată a figurei.

Dacă  $(\Sigma_1)$  și  $(\Sigma')$  sunt două poziții oarecare ale lui  $(\Sigma_1)$ , având respectiv în comun punctele I și  $I'$  cu  $(\Sigma)$ , se poate trece de la o poziție la alta prin intermediarul pozițiilor ocupate continuu de punctul I dealungul unui arc de curbă dată C pe  $(\Sigma)$ . Punctele lui  $(\Sigma_1)$  care vin succesiv să coincidă cu acelea ale acestui arc, sunt și ele aşezate pe un arc de curbă  $C_1$  pe  $(\Sigma_1)$ . Dar, toate mișările  $M^1$  infinit mici conținute în  $M^2$  se reduc în cazul de față numai la rotații. Mișcarea relativă a suprafetelor riglate, care naște mișcarea  $M^1$  dela poziția  $(\Sigma_1)$  la poziția  $(\Sigma')$  se reduc la o rostogolire (No. 107, 3<sup>o</sup>). În particular, curba  $C_1$  se rostogolește pe curba C, și cum C este o curbă oarecare trasă pe suprafața  $(\Sigma)$ , rezultă, întâi, că suprafetele  $(\Sigma)$  și  $(\Sigma_1)$  sunt tangente în I; apoi, că două arce corespunzătoare oarecare ale suprafetelor  $(\Sigma)$  și  $(\Sigma_1)$  au aceeași lungime, adică aceste suprafete sunt aplicabile una pe alta.

Rezultă deci că această mișcare  $M^2$  imaginată de Ribaucour, poate fi născută prin rostogolirea, în toate modurile posibile, a suprafetei  $(\Sigma_1)$  pe suprafața  $(\Sigma)$ , care îi este aplicabilă.

## APLICAȚII.

### ELICOIZII RIGLAȚI.

**115. Definiții.** Să considerăm un sistem mobil supus la o mișcare elicoidală, adică simultan o translatăție  $z$  dealungul unei axe fixe Z și a unei rotații de unghiul  $\omega$  în jurul acestei axe, între mărimile  $z$  și  $\omega$  fiind un raport constant

(1)

$$z = h \omega.$$

În acest caz, fiecare punct al sistemului mobil descrie pe cilindrul de rotație, având ca rază distanța sa la axa Z, o elice de pasul redus  $h$  sau de pasul  $H = 2\pi h$ . H este translația pentru rotația complectă egală cu  $2\pi$  și se zice *pasul mișcării*.

Am văzut că  $r$  fiind distanța punctului M la axa Z, unghiul  $\alpha$  al elicei descrisă de acest punct ( $\alpha$  este unghiul tangentei la elice cu planul perpendicular pe Z) este dată de

$$h = r \operatorname{tg} \alpha.$$

Orice suprafață născută de o linie oarecare legată de sistemul mobil se zice *elicoid*. Prin orice punct al suprafeței trece o elice cu axa Z și pasul redus  $h$ . Se zice că Z și  $h$  sunt axa și pasul redus al elicoidului.

Dacă linia considerată este o dreaptă D, *elicoidul* se zice *riglat*.

Dreapta D poate fi definită în raport cu axa Z prin cea mai scurtă distanță  $r$  la această axă și prin unghiul  $\varphi$  ce-l face cu un plan perpendicular pe Z. Piciorul P pe D al perpendiculari comune la această dreaptă și axa Z descrie pe cilindrul de rotație de axa Z și raza  $r$  o elice al cărei unghi e dat de formula  $h = r \operatorname{tg} \alpha$ .

Dacă  $\alpha = \varphi$ , dreapta D se confundă cu tangentă la elicea (P); *elicoidul* născut de această dreaptă este *deșăsurabil* (No. 81).

Dacă  $\varphi = 0$ , adică dacă dreapta D este perpendiculară la axa Z, se obține *elicoidul riglat cu plan director*.

Când  $r = 0$ , adică când dreapta D antrenată în mișcarea elicoidului întâlneste axa acestei mișcări, dacă  $\varphi$  este diferit de

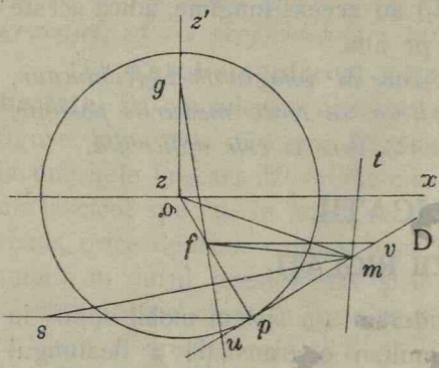


Fig. 149.

zero, *elicoidul* se zice *șurup triunghiular*; dacă  $\varphi = 0$ , *elicoidul* este *șurup patrat*.

**116. Elicoidul riglat cu con director.** Să luăm axa  $zz'$  ca direcție verticală și fie  $(D, D')$  o generatoare oarecare a elicoidului (Fig. 149). Elicoidul este o suprafață riglată cu con director de rotație cu axa verticală. Fiecare punct  $m$  însemnat pe dreapta D descrie o elice

cu axa  $ozz'$  și cu pasul redus  $h$ . Să facem o proiecție pe un plan perpendicular pe  $zz'$ , plan pe care îl vom lua ca plan orizontal.

Piciorul  $\rho$  al perpendiculararei comune la axa  $zz'$  și la generatoarea D descrie o elice pe un cilindru circular cu raza  $op$ . Generatoarea rămâne tangentă la acest cilindru, în diferitele puncte ale elicei descrisă de  $\rho$ , dar făcând cu planul orizontal un unghi  $\varphi$  diferit de unghiul  $\alpha$  al acestei elice, căci dacă  $\varphi = \alpha$  am avea elicoidul desfășurabil (No. 81).

*Planul tangent în m* se obține căutând tangenta  $mt$  la secțiunea orizontală în acest punct. În proiecție orizontală, normala  $mf$  la această secțiune tăind în  $f$  normala  $po$  la infășurătoarea lui  $mp$ , aplicând formula 14, No. 18, avem

$$d(pm) = of \cdot d\omega.$$

Dar,  $z$  fiind cota relativă a punctului  $\rho$  în raport cu planul secțiunii orizontale considerate, avem

$$pm = z \cotg \varphi,$$

de unde, ținând seamă de (1), obținem

$$d(pm) = h \cotg \varphi \, dw.$$

Deci

$$(2) \quad of = h \cotg \varphi,$$

adică *punctul f este fix pe op, oricare ar fi punctul m considerat pe D*. Se zice că  $\rho$  este *polul normalelor* dealungul lui D.

Segmentul  $of$  are sau nu același sens cu  $op$ , după cum unghiiurile  $\alpha$  și  $\varphi$ , sunt sau nu amândouă ascuțite ori obtuse.

Punctul  $f$  fiind determinat,  $mf$  reprezentă *proiecția orizontală a normalei la elicoid în  $(m, m')$* . Se vede deci că paraboloidul normalelor la elicoid dealungul lui D admite ca generatoare verticală polului  $f$ .

Așa fiind, planul tangent în  $\rho$  se confundă cu planul care proiectează orizontal pe D. Dar, în acest caz, conul director fiind de rotație cu axa verticală, planul său normal corespunzător este paralel cu acest plan proiectant, care este (No. 67) prin urmare planul central pentru generatoarea D. Deci  $\rho$  este punctul central al acestei generatoare.

Orizontală  $(mt, m't')$  a planului tangent la acest elicoid în  $(m, m')$  se obține ducând  $mt$  perpendiculară pe  $fm$ . Deci, pentru a avea *punctul lui  $(D, D')$  unde planul tangent dus prin această generatoare, are o direcție dată pentru orizontalele sale*, va fi destul de a cobori din  $f$  pe această direcție o perpendiculară care tăie pe D în punctul  $m$  căutat.

În particular, punctul  $(v, v')$  unde  $(D, D')$  atinge *conturul aparent vertical*, unde planul tangent dus prin  $(D, D')$  este perpendicular pe planul vertical, și unde urma sa orizontală este perpendiculară pe linia de pământ, se obține ducând din  $f$  o paralelă  $fv$  la linia de pământ.

Punctul  $(\rho, \rho')$  corespunzând planului tangent dus prin  $(D, D')$ , perpendicular pe orizontal (a cărui urmă orizontală se confundă cu  $D$ ) este punctul unde  $(D, D')$  atinge *conturul aparent orizontal*. Elicoidul considerat fiind cu con director de rotație, curba de contur aparent orizontal coincide cu linia de strictiune a suprafeței. Această *linie de strictiune este deci o elice de același pas redus, trasă pe cilindrul de rază op.*

Se poate de asemenea găsi *punctele u ale curbei de umbră* pe generatoarele  $D$ , produsă pe elicoid de raze paralele cu o direcție dată. Fără a micșora generalitatea, se poate presupune că razele sunt de front, făcând cu orizontul unghiul  $\psi$ . Astfel, raza dusă prin  $\rho$  (Fig. 149) are ca urmă, pe planul orizontal al lui  $m$ , punctul  $s$  astfel că

$$\rho s = z \cotg \psi.$$

Deci  $ms$  dă direcția orizontalelor planului de umbră dus prin  $D$ . Perpendiculara dusă din  $f$  pe  $ms$  dă punctul de umbră  $u$  căutat. Însemnând cu  $g$  intersecția dreptei  $fu$  cu perpendiculara  $oz'$  din  $o$  pe proiecția orizontală  $\rho s$  a razelor luminoase, se vede că triunghiurile  $ogf$  și  $pms$  sunt asemenea ca având laturile perpendiculare. Deci

$$\frac{og}{of} = \frac{\rho s}{\rho m} = \frac{z \cotg \psi}{z \cotg \varphi},$$

și observând (2), avem

$$(3) \quad og = h \cotg \psi.$$

Rezultă că punctul  $g$  este fix, oricare ar fi generatoarea  $D$  considerată.

Punctul  $g$  depinde numai de direcția razelor luminoase, și se zice *polul de umbră*; punctul  $f$  descrie cercul  $(f)$  cu centru  $o$ , deci curba de umbră ( $u$ ) se poate construi.

**117. Elicoidul surup triunghiular** este un caz particular al elicoidului ordinat, când cilindrul la care generatoarele sunt tangente, se reduce la o dreaptă, axa  $(z, z')$ . Această suprafață poate fi definită prin mișcarea elicoidală a unei drepte ce întâlnescă axa mișcării, fără să fie perpendiculară pe axă. Sau, altfel, o suprafață cu două directoare, o dreaptă directoare,

axa, o elice directoare având ca axă dreapta și cu con director de rotație în jurul unei drepte paralelă cu axa. În acest caz, elicea de stricțiune se reduce la axa mișcării.

*Construcția unei generatoare.* Fie  $a'c'$  generatoarea paralelă cu planul vertical de proiecție. Această dreaptă, axa  $(z,z')$  a mișcării și perpendiculara din  $a'$  pe această axă (Fig. 150) formează un triunghi de mărime invariabilă. Când vârful  $a'$  al acestui triunghi vine în  $b'$ , vârful  $c'$  se ridică pe axă până în  $d'$ , astfel că  $c'd' = b'p'$ ; generatoarea  $a'c'$  vine în poziția  $b'd'$ , proiecțiile unei generatoare sunt  $(bd, b'd')$ .

Când vârful  $a'$  vine în  $g'$ , generatoarea trece prin  $g'$  și întâlnescă axa  $(z,z')$  sub un unghi care este egal cu unghiul constant pe care îl fac generatoarele cu axa  $z'$ . În această poziție, generatoarea este întâlnită de  $a'c'$ ; acest punct de întâlnire  $n'$ , în timpul deplasării generatoarei pe suprafață, descrie o elice care este o linie dublă a suprafetei.

Ceea ce am spus de generatoarea care trece prin  $g'$ , se poate zice despre toate generatoarele care pornesc din puncte situate pe linia de contur apparent a cilindrului care conține punctul  $g'$ . Sunt deci pe  $a'c'$  o infinitate de puncte care descriu elice duble ale suprafetei și astfel, pe elicoidul surup triunghiular sunt o infinitate de elice duble.

*Urma pe un plan orizontal.* Proiecția orizontală a generatoarei  $b'd'$  este  $ob$ ; urma orizontală a acestei drepe (Fig. 150) este punctul  $l$ .

Avem

$$ol = ob + bl.$$

Însemnând cu  $R$  raza cilindrului, cu  $\varphi$  unghiul generatoarelor elicoidului cu planul orizontal, avem

$$ol = R + b'p' \cot \varphi.$$

Însemnând cu  $\omega$  unghiul  $aob$ ,  $b'p'$  este egal cu  $h\omega$  și deci

$$ol = R + h\omega \cot \varphi, \quad \rho = R + (h \cot \varphi) \omega,$$

care este ecuația unei spirale lui Arhimede în coordonate polare. Deci, urma pe planul orizontal a elicoidului surup pătrat

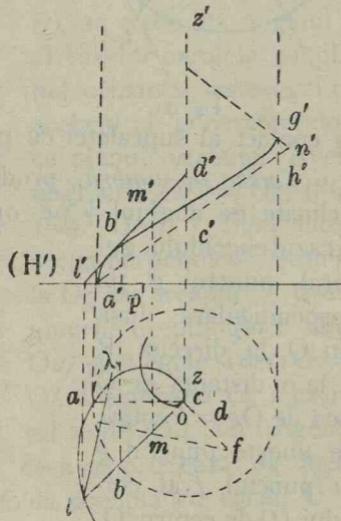


Fig. 150.

este o spirală a lui Arhimede. Această spirală trece prin  $o$ , prin  $a$ , prin punctul  $l$ , și dacă se consideră suprafața în toată întinderea sa, adică luând nu numai partea care este deasupra planului ( $H'$ ), avem o spirală complectă. Punctele duble ale acestei curbe sunt urmele elicelor duble de care am vorbit.

*Planul tangent.* Determinarea planului tangent se face de asemenea cu ajutorul punctului  $f$  situat pe perpendiculara din  $o$  la  $D$  (care trece aici prin acest punct) (Fig. 151) și la distanța

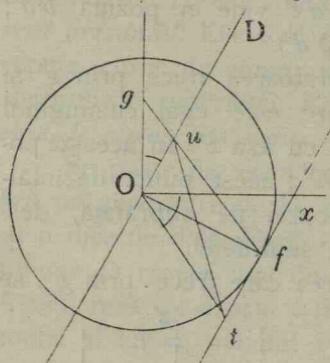


Fig. 151.

$of = h \cotg\psi$ , vectorul  $of$  fiind dus în astfel de sens ca tangenta la tractoria lui  $(f, f')$ , antrenată în mișcarea elicoidală, să fie paralelă cu  $(D, D')$ . Dacă planul tangent dus prin generatoarea  $(bd, b'd')$  are urma orizontală  $l\lambda$  (Fig. 150), pentru a găsi punctul de contact, luăm pe perpendiculara pe  $ob$  o lungime  $of = h \cotg\psi$ ; din  $f$  lăsăm o perpendiculară pe  $l\lambda$  care tăie pe  $ob$  în  $m$ . Acest punct  $m$  este punctul

de contact al suprafeței cu planul tangent.

*Curba de umbră*, produsă de razele  $(R, R')$  (Fig. 151) inclinate de unghiul  $\psi$  pe orizont, se află determinând, ca și în cazul elicoidului general, punctul  $g$  pe perpendiculara dusă din  $O$  la direcția  $R$  și la o distanță de  $O$  dată de  $Og = h \cotg\psi$ . Se unește punctul  $g$  cu punctul  $f$  al cercului  $(f)$  de centru  $O$ , iar punctul de intersecție  $u$  cu  $D$  este punctul de umbră pe generatoarea  $D$  perpendiculară pe  $of$ .

Pentru a determina tangenta  $ut$  la curba de umbră (Fig. 151), să observăm<sup>(1)</sup> că

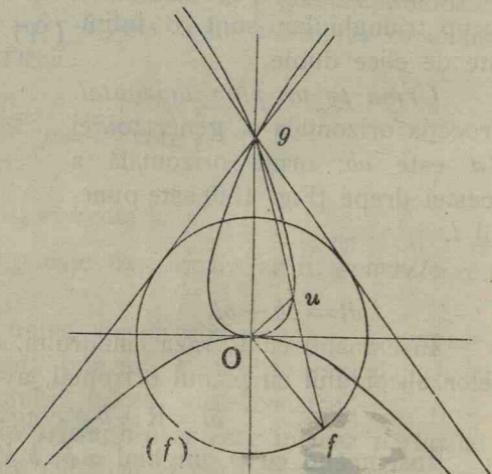


Fig. 152.

<sup>(1)</sup> A se vedea, M. d'Ocagne, *Conos de Géométrie de l'Ecole Polytechnique* (1930), p. 148.

segmentul  $uf$  fiind ortoptic pentru punctul  $o$ , și învărtindu-se în jurul punctului  $g$ , aplicând proprietatea de la No. 25, 2<sup>0</sup>, se vede că, dacă tangenta în  $f$  la cercul de centru  $O$  pe care îl descrie acest punct, tăie în  $t$  tangentă căutată, unghiul  $fOt$  este egal cu unghiul  $gOu$ , și prin urmare cu unghiul  $xOf$  cu laturile perpendiculare pe ale unghiului  $gOu$ . Deci punctele  $t$  și  $x$  sunt simetrice în raport cu  $f$ .

Pentru a construi curbă de umbră, se unește punctul fix  $g$  cu un punct variabil pe cercul  $(f)$ ; perpendiculara în  $O$  pe  $Of$  tăie pe  $fg$  în  $u$  punctul curbei de umbră. Avem mai multe cazuri de figură, după cum  $g$  este exterior cercului  $(f)$  (Fig. 152), punctul  $g$  pe cercul  $(f)$  (Fig. 154), punctul  $g$  interior cercului  $(f)$  (Fig. 153).

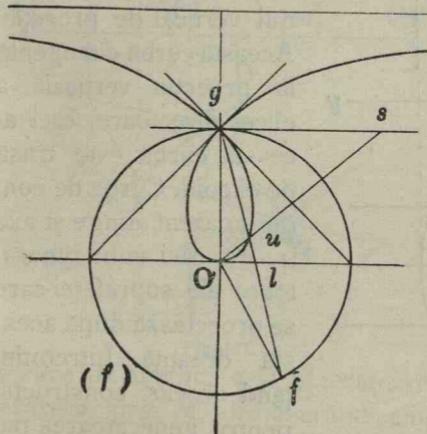


Fig. 154.

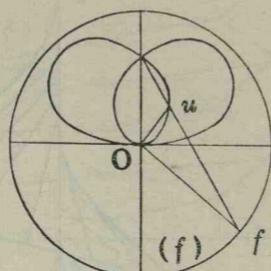


Fig. 153.

Când  $g$  este pe cercul  $(f)$ , se vede că unghiul  $\psi$  al razelor paralele, cu planul orizontal, este egal cu acela  $\varphi$  al generatoarelor, cu planul orizontal. Avem unghiurile  $Ogf = Ofg$  (Fig. 154). Deci,  $l$  fiind intersecția perpendicularării în  $O$  la  $Og$  cu dreapta  $fg$ , triunghiurile dreptunghice  $Olg$ ,  $Ouf$  sunt egale și deci  $Ou = Ol$ . Însemnând cu  $s$  punctul unde  $Ou$  tăie tangenta

în  $g$  la cercul  $(f)$ , avem  $gs = su$ , ceea ce probează că locul lui  $u$ , curba de umbră, este o srofoidă dreaptă cu vârful  $O$  și punctul dublu  $g$ , după însăși definiția strofoidei.

*Conturul aparent vertical* este înfășurătoarea proiecțiilor verticale ale generatoarelor. Punctul unde o generatoare ca  $b'd'$  (Fig. 155) atinge înfășurătoarea, este proiecția verticală a punctului unde planul care proiectează  $b'd'$  pe planul vertical de proiecție atinge elicoidul. Pentru a găsi punctul de contact al acestui plan cu suprafața, să luăm planul orizontal ( $H'$ ), să ridicăm în punctul  $O$  în acest plan o perpendiculară pe  $Ob$ , proiecția

generatoarei  $b'd'$ , pe care să luăm, în sensul convenabil,  $O_1 = h \cot \varphi$ . Cum urma planului tangent considerat este perpendiculară pe vertical, urma orizontală este perpendiculară pe linia de pământ. Deci, ducem din  $f$  o perpendiculară pe această urmă, sau o paralelă la linia de pământ, care tăie pe  $ob$  în  $v$ . Punctul de contur aparent vertical pe generatoarea  $(bd, b'd')$  este  $(v, v')$ .

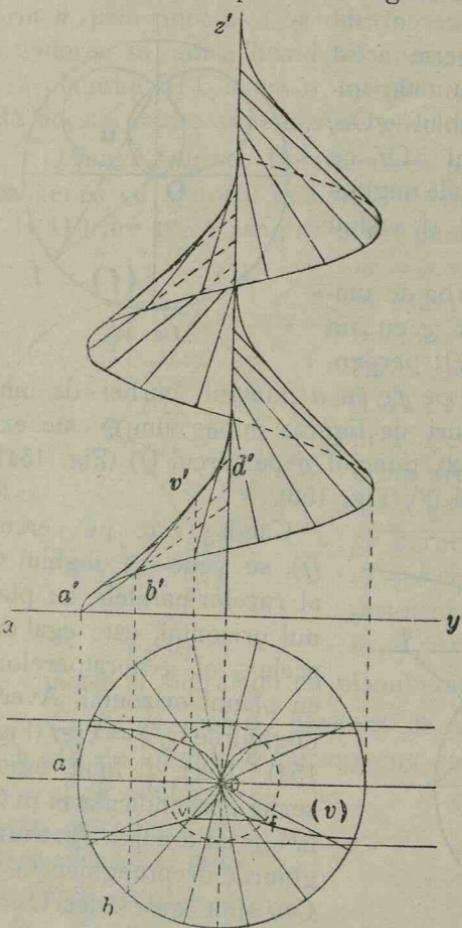


Fig. 155.

Paralelă cu planul vertical de proiecție ce trece prin  $a'$ , se găsește pe această dreaptă un punct la infinit. Această dreaptă este o asymptotă a curbei de contur aparent vertical. Curba de contur aparent este compusă dintr'o infinitate de ramuri, care se proiectează orizontal după curba  $(v)$ .

*Aplicație la desenul unui șurup triunghiular.* Un astfel de șurup e născut de un triunghi iscocel (Fig. 156)  $ABB'$ , al cărui plan este normal la un cilindru pe care este aplicată latura  $BB'$ , punctele  $B$  și  $B'$  descriind pe cilindru o aceeaș elice cu pasul egal cu  $BB'$ . Fiecare din dreptele  $AB$  și  $AB'$  descriu câte o suprafață la fel cu elicoidul descris, de unde și numele de elicoid șurup triunghiular.

Operând la fel pentru celelalte generatoare, avem punctele curbei de contur aparent pe planul vertical de proiecție. Această curbă e tangentă la proiecția verticală a elicei directoare, căci această curbă este trasă pe elicoid. Curba de contur aparent atinge și axa  $(z, z')$ , căci sunt generatoare ale suprafeței care se proiectează după această dreaptă. Întrebuințând aceeaș construcție pentru generatoarea paralelă cu planul vertical de proiecție ce trece prin  $a'$ , se găsește pe această dreaptă un punct la infinit. Această dreaptă este o asymptotă a curbei de contur aparent vertical. Curba de contur aparent este compusă dintr'o infinitate de ramuri, care se proiectează orizontal după curba  $(v)$ .

**118. Elicoizii riglați cu plan director. Plan tangent.**

Construcția planelor tangente dealungul unei generatoare  $(D,D')$  cu ajutorul focalului  $(f,f')$  nu se mai poate aplica, din cauză că  $\varphi=0$ , iar din formula  $of=h \cotg \varphi$ , ar urma  $of \rightarrow \infty$ . Punctul  $f$  este la infinit pe perpendiculara  $op$  coborâtă din  $o$  pe  $D$  (Fig. 157), de unde urmează că orizontală planului tangent în fiecare punct al lui  $(D,D')$  se confundă cu această dreaptă, ceea ce de altfel știam.

Vom intrebuința metoda următoare. Să considerăm elicea descrisă de un punct  $(m,m')$  al dreptei  $(D,D')$ . Pentru a construi

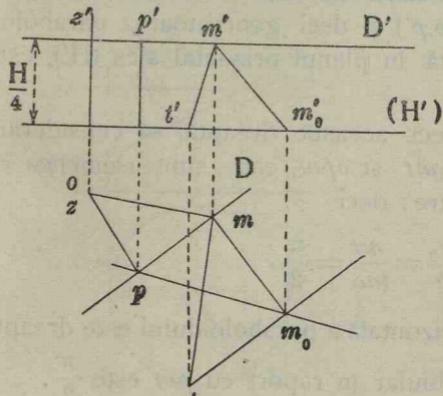


Fig. 157.

tangenta la această elice în  $(m,m')$ , să luăm un plan auxiliar orizontal, așezat sub  $(m,m')$ , a cărui cotă să fie, de ex.,  $\frac{H}{4}$ , unde  $H$  este pasul mișcării elicoidale și deci și al elicei considerate (Fig. 157).

Se știe că, dacă însemnăm cu  $M_0$ ,  $T$  și  $m$  (Fig. 158) punctele unde un plan al unei secțiuni drepte tăie elicea în  $M_0$ , tangenta în  $M$

la elice de unghiul  $\alpha$  și generatoarea cilindrului ce trece prin  $M$ , desfășurând cilindrul, avem

$$Mm = \text{arc } M_0 m \operatorname{tg} \alpha, \quad Mm = Tm \operatorname{tg} \alpha, \quad mT = \text{arc } M_0 M.$$

Deci, în cazul figurei 157, însemnând cu  $t$  punctul unde tangenta la elice în  $m$  tăie planul secțiunei drepte (care e planul auxiliar la cota  $\frac{H}{4}$ ), avem  $mt = \text{arc } M_0 m$ .

Dar, unghiul la centru între razele punctelor  $M_0$  și  $m$  (Fig. 158) corespunde la un sfert din pasul  $H$  al elicei, la  $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ , astfel că  $\text{arc } M_0 m = \text{raza} \cdot \frac{\pi}{2} = om \cdot \frac{\pi}{2}$ . Deci, în figura 157, avem  $mt = \frac{\pi}{2} \cdot om$ , astfel, că punctul  $t$  poate fi construit pe perpendiculara pe  $om$ , luând lungimea  $\frac{\pi}{2} \cdot om$ .

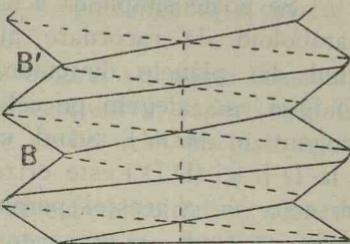


Fig. 156.

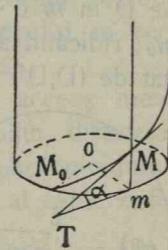


Fig. 158.

Planul tangent în  $(m, m')$  este deci determinat de dreptele  $(D, D')$  și  $(mt, m't')$ .

Se poate simplifica această construcție. Să considerăm un paraboloid de racordare al elicoidului, dealungul lui  $(D, D')$ ; unul din planele directoare este orizontal ca acela al elicoidului; să alegem pe celalt perpendicular pe  $(D, D')$ . Planul tangent în  $(m, m')$  având ca urmă orizontală paralela prin  $t$  la  $D$  [căci  $(D, D')$  este orizontală în acest plan], vom lua intersecția  $m_0$  a acestei paralele cu perpendiculara în  $m$  pe  $D$ , astfel că  $(mm_0, m'm'_0)$  este a doua generatoare a acestui paraboloid de racordare ce trece prin punctul  $(m, m')$ .

În punctul central  $(\rho, \rho')$  obținut ducând din  $o$  perpendiculara pe  $D$ , planul tangent este perpendicular pe planul director; tangenta perpendiculară la  $(D, D')$  în acest punct, se confundă cu verticala lui  $(\rho, \rho')$  și deci generatoarea paraboloidului de racordare, situată în planul orizontal ales  $(H')$ , este dreapta  $\rho m_0$ .

Pentru a obține direct această dreaptă, să considerăm (Fig. 157) triunghiurile  $m_0mt$  și  $opm$ , care sunt asemenea ca având laturile perpendiculare; deci

$$\frac{mm_0}{mp} = \frac{mt}{mo} = \frac{\pi}{2},$$

de unde urmează că urma orizontală a paraboloidului este dreapta  $\rho m_0$ , al cărei coeficient unghiular în raport cu  $\rho m$  este  $\frac{\pi}{2}$ .

Așadar, pentru a avea planul tangent în  $(m, m')$ , se ridică pe  $D$  în  $m$  o perpendiculară care întâlnește această urmă în  $m_0$ ; ridicând acest punct în  $m'_0$ , planul tangent în  $(m, m')$  este dat de  $(D, D')$  și  $(mm_0, m'm'_0)$ .

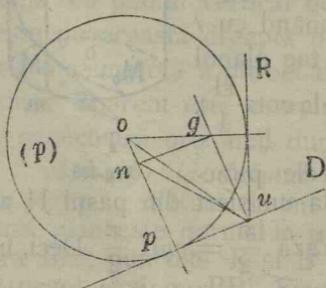


Fig 159.

adică să ducem din  $g$  perpendiculara pe  $D$ .

*Curba de umbră.* Întrebuițând aceeași metodă ca la elicoizii cu con director, să însemnăm pe perpendiculara din  $o$  pe direcția proiecției  $R$  (Fig. 159) a razelor luminoase, punctul  $g$ , astfel că  $og = h \cot \psi$ ,  $\psi$  fiind inclinarea razelor luminoase pe orizont. Să unim pe  $g$  cu punctul  $f$  situat la infinit pe perpendiculara dusă din  $o$  la  $D$ ,

Punctul  $p$  descrie cercul ( $\rho$ ) de centru  $o$ , aşa că proiecția orizontală a curbei de umbră, locul punctelor  $u$ , se obține lăsând din punctul fix  $g$  perpendiculara  $gu$  pe tangenta la cercul ( $\rho$ ), adică este un mele al lui Pascal.

Tangenta în  $u$  la curba de umbră, se poate construi observând că este aceea a podarei cercului în raport cu  $g$ . Dacă perpendiculara în  $g$  pe  $gu$  tăie pe  $op$  în  $n$ ,  $un$  este normală la podară.

119. **Elicoidul surup pătrat** este elicoidul cu plan director, unde generatoarea ( $D, D'$ ) întâlnește axa ( $z, z'$ ) și deci, în proiecție orizontală, trece prin punctul  $o$ . Linia de strictiune este axa ( $z, z'$ ).

Pentru a construi o generatoare, luăm planul director ca orizontal și să considerăm elicea directoare trasă pe cilindrul

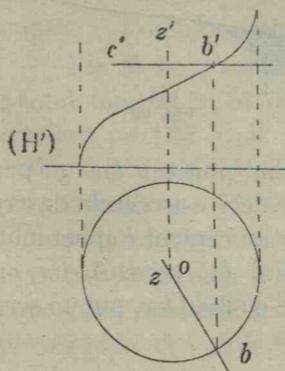


Fig. 160.

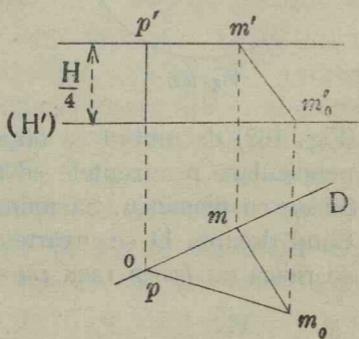


Fig. 161.

cu axa  $(z, z')$  (Fig. 160). O generatoare, în proiecție orizontală, fiind  $ob$ ,  $b$  fiind pe proiecția orizontală a cilindrului, în vertical trece prin  $b'$  și e paralelă cu linia de pământ.

Pentru planul tangent se întrebunează aceeaș metoadă ca și pentru cazul elicoidului în general cu plan director. Se construеște (Fig. 161) prin  $\rho$  urma  $\rho m_0$  a paraboloidului de racordare cu plan director normal la  $(D, D')$ , al cărei coeficient unghiular este  $\frac{\pi}{2}$ . Se ridică în  $m$  o perpendiculară pe  $\rho m$ , care tăie această urmă în  $m_0$ ; luând planul orizontal la cota  $\frac{H}{4}$  sub generatoare, și ridicând punctele în proiecție verticală, planul tangent în  $(m, m')$  este determinat de  $(D, D')$  și  $(mm_0, m'm')$ .

În cazul de față, om fiind confundată cu D, perpendiculara  $mt$  la  $om$ , ca și  $mf$ , se confundă cu  $mm_0$ ; deci și  $mu$  se

confundă cu  $m_n$ ). Cuadrica osculatoare se confundă cu paraboloidul echilater de racordare întrebuințat mai sus. Urmează de aci (No. 86, 9<sup>o</sup>) că indicatoarea în fiecare punct al elicoidului șurup pătrat este o iperbolă echilateră.

Pentru curba de umbră, să observăm că toate dreptele D trec prin punctul  $o$ , deci proiecția orizontală ( $m$ ) a acestei curbe

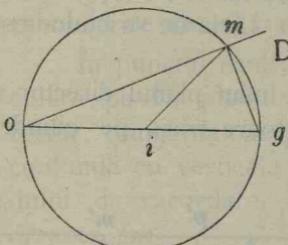


Fig. 162.

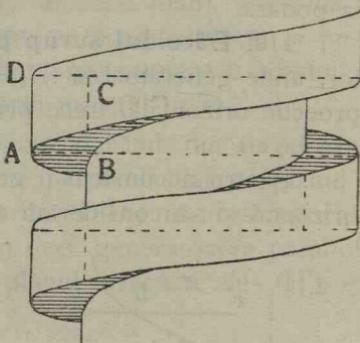


Fig. 163.

(Fig. 162) de umbră se obține lăsând din punctul fix  $g$  perpendiculare pe dreptele ce trec prin  $o$ , deci este cercul descris pe  $og$  ca diametru. Să unim punctul  $m$  cu centrul  $i$  al cercului. Când dreapta D se învârtește de unghiul  $\omega$ , punctul  $(m, m')$  se ridică cu  $h\omega$  și raza  $im$  se învârtește cu  $2\omega$ . Dar, putem scrie

$$z = \frac{h}{2} 2\omega,$$

și deci se vede că, pe cilindrul cu baza cercul ( $m$ ), punctul  $(m, m')$  se ridică cu o cantitate proporțională cu unghiul cu care s'a învărtit proiecția sa orizontală, descrie deci pe acest cilindru o elice cu pas redus  $\frac{h}{2}$ . Așa dar, curba de umbră, a unei suprafețe elicoid șurup pătrat, produsă de raze paralele luminoase este o elice circulară cu pasul egal cu jumătatea acelui al suprafeței.

Ca aplicație, să desenăm un șurup pătrat, care poate fi născut de un pătrat ABCD (Fig. 163), cu planul trecând prin axa cilindrului, care se mișcă elicoidal (se ia de obicei pasul egal cu latura păratului). Laturile AB și CD nasc câte un elicoid de felul celui studiat, de unde și numele de elicoid șurup pătrat.

## SUPRAFAȚA UNDEI.

120. I. *Proprietăți generale ale suprafețelor apsidale.* Se numesc apsizii unei curbe plane, în raport cu un punct O din planul său, punctele acestei curbe a căror distanță la punctul O să fie maximă sau minimă, cu alte cuvinte, picioarele normalelor duse din punctul O la curbă. Se zic *raze apsidale* ale acestei curbe față de punctul O, distanțele punctului O la apsizi. De exemplu, razele apsidale ale unei elipse pentru centrul său sunt jumătățile axelor acestei elipse.

Să ducem prin punctul O un plan oarecare ce tăie o suprafață ( $S$ ) și să luăm pe normala în O la acest plan vectorii  $OM_1$  egali cu razele apsidale OM ale secțiunii făcute în suprafață ( $S$ ) de acest plan. Locul punctelor  $M_1$  este o suprafață ( $S_1$ ), numită *suprafață apsidală* a suprafeței ( $S$ ) pentru punctul O.

Fie M un punct oarecare al suprafeței ( $S$ ); să ducem, în planul tangent în M la această suprafață, dreapta MT perpendiculară pe OM și să tăiem suprafață cu planul OMT. Secțiunea obținută are pe OM ca rază apsidală a punctului O. Luând pe perpendiculara în O pe planul OMT, lungimea  $OM_1$  egală cu OM, obținem punctul  $M_1$  corespunzător al suprafeței apsidale.

Ne propunem a găsi normala în  $M_1$  la suprafața ( $S_1$ ), cunoscând normala în M la suprafața ( $S$ ). Să proiectăm figura pe un plan dus prin OM perpendicular pe planul secțiunii considerate (Fig. 164). Tangenta MT în M la această secțiune fiind perpendiculară pe OM, este o dreaptă perpendiculară pe planul de proiecție. Planul tangent la suprafața ( $S$ ) ce trece prin această tangentă, este deci un plan perpendicular pe planul secțiunii, cu urma MP perpendiculară pe normala MN situată în planul de proiecție. Tot în planul de proiecție este și vectorul  $OM_1$  dus prin O perpendicular pe planul secțiunii considerate. Dreapta MN este în planul  $OMM_1$  care este luat ca plan al figurei și tăie pe  $OM_1$  în F.

Acestea fiind stabilite, să considerăm figura de formă invariabilă, în spațiu, formată de unghiul  $OMM_1$  egal cu  $45^\circ$ .

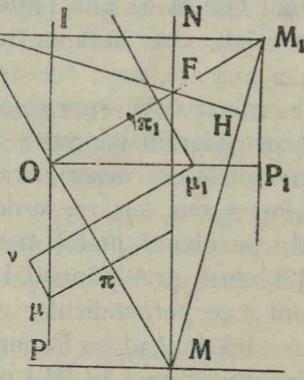


Fig. 164.

Dacă punctul M descrie o traectorie (M) oarecare pe suprafața (S), latura OM a unghiului trece necontenit prin punctul O și latura MM<sub>1</sub> naște o suprafață riglată (R). Planul unghiului mobil are o mișcare cu un grad de libertate. Planul normal în M la la curba (M) trece prin normala MN a suprafeței (S), care este prin urmare urma acestui plan normal pe planul mobil. Planul normal în O la traectoria punctului însemnat pe MO care coincide cu O în poziția inițială, este planul perpendicular pe planul figurei dus prin OM<sub>1</sub>, care este, prin urmare, urma acestui plan normal pe planul mobil. Rezultă (No. 108) că focalul planului unghiului mobil în această mișcare M<sup>1</sup>, este punctul de întâlnire F al lui MN cu OM<sub>1</sub>.

Să ducem perpendiculara FH pe MM<sub>1</sub>. Elementul de linie descris pe suprafața (R), de punctul însemnat pe latura MM<sub>1</sub> a unghiului OMM<sub>1</sub>, care coincide acum ca H, este normal la FH. Planul tangent în H la (R) care conține acest element și generatoarea MM<sub>1</sub> de asemenea normală la FH, este deci perpendicular pe planul figurei.

Să considerăm acum figura invariabilă formată de unghiul OM<sub>1</sub>M egal cu 45°. Mișcarea planului acestui unghi este deosebită de aceea a planului OMM<sub>1</sub>, cu toate că aceste plane sunt aplicate unul peste altul. Dacă, în adevăr, se consideră figurile trase pe aceste plane (unghiul OMM<sub>1</sub> de o parte, unghiul OM<sub>1</sub>M de altă parte), ele sunt în mișcare unul în raport cu celalt, dar dreapta indefinită MM<sub>1</sub>, antrenată în una și cealaltă mișcare, nasc aceeași suprafață (R). Să numim cu (M<sub>1</sub>) intersecția acestei suprafețe (R) cu suprafața (S<sub>1</sub>) locul lui M<sub>1</sub> și să considerăm mișcarea M<sup>1</sup> a unghiului OM<sub>1</sub>M, care face ca punctul M<sub>1</sub> să descrie traectoria (M<sub>1</sub>). Repetând același raționament ca mai sus, se vede că urma planului normal în M<sub>1</sub> la (M<sub>1</sub>) pe planul mobil tăie dreapta OM pe perpendiculara la MM<sub>1</sub> dusă prin punctul H al acestei drepte unde planul tangent este perpendicular pe planul OMM<sub>1</sub>, adică pe dreapta FH.

Insemnând cu F<sub>1</sub> intersecția dreptelor FH și OM, urma planului normal la (M<sub>1</sub>) pe planul mobil este M<sub>1</sub>F<sub>1</sub>. Dar, această dreaptă care depinde numai de MN, este independentă de curba (M<sub>1</sub>) descrisă de M<sub>1</sub> pe (S<sub>1</sub>), cu alte cuvinte, toate planele normale la curbele (M<sub>1</sub>) trec prin M<sub>1</sub>F<sub>1</sub>. Fiind ca și MN în planul triunghiului OMM<sub>1</sub>, ea întâlnește pe MN în N. Mai mult, dreptele F<sub>1</sub>H și OM<sub>1</sub> fiind înălțimile triunghiului MM<sub>1</sub>F<sub>1</sub>, rezultă că dreapta MN, care trece prin punctul de in-

tâlnire al lor, este a treia înălțime a acestui triunghi. În rezumat, *normala*  $M_1N$  la suprafața apsidală ( $S_1$ ) este perpendiculara din  $M_1$  pe normala  $MN$  la suprafața ( $S$ ).

Planul tangent la ( $S_1$ ) este deci perpendicular pe planul figurei, de unde urmează că *suprafața apsidală a suprafeței* ( $S_1$ ) *în raport cu punctul O este suprafața* ( $S$ ).

Să luăm acum suprafețele polare reciproce ( $\Sigma$ ) și ( $\Sigma_1$ ) ale lui ( $S$ ) și ( $S_1$ ) în raport cu sfera de centru  $O$  și raza  $r$ . Planele polare ale punctelor  $M$  și  $M_1$  sunt perpendiculare pe  $OM$  și  $OM_1$ , deci perpendiculare pe planul figurei. Ele trec prin punctele  $\pi$  și  $\pi_1$ , astfel că

$$\text{OM} \cdot O\pi = OM_1 \cdot O\pi_1 = r^2,$$

deci

$$O\pi = O\pi_1.$$

Acste plane ating suprafețele ( $\Sigma$ ) și ( $\Sigma_1$ ) respectiv în punctele  $\mu$  și  $\mu_1$  obținute cu ajutorul perpendicularelor  $OP$  și  $OP_1$  coborâte din  $O$  pe planele tangente în  $M$  și  $M_1$ ; avem

$$O\mu \cdot OP = O\pi \cdot OM = r^2, \quad O\mu_1 \cdot OP_1 = O\pi_1 \cdot OM_1 = r^2.$$

Dar triunghiurile  $OPM$  și  $OP_1M_1$  sunt egale; deci  $O\mu = O\mu_1$ .

Normalele  $\mu\nu$  și  $\mu_1\nu_1$  în  $\mu$  și  $\mu_1$  sunt perpendiculare la planul figurei cu urmărele  $\pi\mu$  și  $\pi_1\mu_1$ ; deci sunt conținute în planul figurei. Așa dar, între  $\mu$  și  $\mu_1$  există aceeaș relație ca și între  $M$  și  $M_1$  și deci suprafețele ( $\Sigma$ ) și ( $\Sigma_1$ ) sunt apsidale una față de celaltă. Deci, *suprafețele polare reciproce, în raport cu o sferă de centrul O, a două suprafețe apsidale una față de celaltă, sunt de asemenea apsidale una față de celaltă în raport cu acelaș punct*.

**II. Suprafața undei.** 1º Să presupunem că punctul  $O$  este centrul unei excitații luminoase, în interiorul unei mase cristaline omogenă, pentru care se cunoaște elipsoidul de elasticitate ( $E$ ) al centrului  $O$ . Fresnel a arătat că *suprafața undei luminoase* ( $O$ ), după un timp oarecare, este *omotetica* în raport cu  $O$  a suprafeței opsidale a elipsoidului ( $E$ ) relativ la punctul  $O$ .

Presupunând că suprafața ( $S$ ) de mai sus este elipsoidul ( $E$ ), se pot obține proprietățile corespunzătoare ale suprafeței undei ( $O$ ).

În particular, pentru că polara reciprocă a elipsoidului ( $E$ ) în raport cu o sferă concentrică este un alt elipsoid, se vede că polara reciprocă a unei suprafețe a undei ( $O$ ), în raport cu o sferă de același centru, este o altă suprafață a undei.

Observând figura 164, se vede că planul polar al lui  $M_1$  este planul dus prin punctul  $\pi_1$ , perpendicular pe  $OM_1$ , astfel că  $O\pi_1 \cdot OM_1 = r^2$ ,  $r$  fiind raza sferei în raport cu care se iau polarele. De unde urmează următoarea definiție (în Fizică) pentru suprafața undei. *Pe perpendiculara ridicată în O la o secțiune plană oarecare a elipsoidului (E), se iau segmente invers proporționale cu jumătățile axelor acestei secțiuni; planele paralele cu planul secțiunii, duse prin extremitățile acestor segmente, au ca înfășurătoare o suprafață a undei.*

2º Pentru a găsi ecuația suprafeței undei, să însemnăm cu  $a, b, c$  jumătățile acelor elipsoidului (E). Se știe că jumătățile axelor secțiunii diametrale normală la direcția ale cărei cosinusuri directoare sunt  $\alpha, \beta, \gamma$ , sunt rădăcinile ecuației în  $\rho$

$$\frac{a^2\alpha^2}{a^2-\rho^2} + \frac{b^2\beta^2}{b^2-\rho^2} + \frac{c^2\gamma^2}{c^2-\rho^2} = 0.$$

Vectorii  $\rho$  fiind luati pe o dreaptă dusă prin origină de cosinusuri directoare  $\alpha, \beta, \gamma$ , se vede că locul extremităților acestor vectori, care este o suprafață a undei (O), are ecuația

$$\frac{a^2x^2}{a^2-\rho^2} + \frac{b^2y^2}{b^2-\rho^2} + \frac{c^2z^2}{c^2-\rho^2} = 0,$$

unde  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Făcând calculele, ecuația revine

$$(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)(x^2 + y^2 + z^2) - [a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(c^2 + a^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2] + a^2b^2c^2 = 0.$$

Suprafața este de ordinul al patrulea, tae planul de la infinit după conicele situate respectiv pe conurile

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 0;$$

are, deci, în planul de la infinit, patru puncte duble care sunt punctele comune ale acestor două conice.

3º Se vede, din ecuația suprafeței, că secțiunile principale prin planele de coordonate care sunt de simetrie pentru suprafața undei și pentru elipsoidul (E), se descompun într'o elipsă și un cerc. Aceasta se poate vedea geometric în modul următor. Să considerăm secțiunile diametrale ale elipsoidului trecând prin una din axele principale, OB, de ex. (Fig. 165). Distanțele apsidale sunt, în această secțiune, jumătatea axei OB și o rază a elipsei principale AC, pe care o facem să se învârtească de un unghi drept chiar în planul elipsei. Extremitățile vectorilor normali la planul acestei secțiuni diametrale (când aceasta se

învârtește în jurul lui OB) sunt, deci, în planul elipsei AC, un cerc de centru O și de rază OB și o elipsă ale cărei semi-axe sunt  $OC_1 = OC$  după OA, și  $OA_3 = OA$  dealungul lui OC.

Deci, dacă se duc vectori egali cu fiecare din semiaxele elipsoidului pe cele două axe care îi sunt perpendiculare, notând cu indicii 1, 2, 3 punctele însemnate respectiv pe OA, OB, OC, se obține pentru suprafața undei următoarele trei sectiuni principale, în planul OAB, cercul  $C_1C_2$ , elipsa  $A_2B_1$ ; în planul OBC, cercul  $A_2A_3$ , elipsa  $B_3C_2$ ; în planul OCA, cercul  $B_3B_1$ , elipsa  $C_1A_3$ . În fiecare din aceste grupe, cercul și conica se tăie în patru puncte, care sunt reale numai în planul OAC, dacă se presupune  $a > b > c$ .

Aceste sunt puncte duble pentru suprafață, care împreună cu cele deja obținute în planul de la infinit, avem în total 16 puncte duble pentru suprafață, numărul maxim pe care îl poate avea o suprafață de ordinul al patrulea. Suprafața undei este deci un caz particular al suprafeței lui Kummer, care este suprafață de ordinul al patrulea cea mai generală cu 16 puncte duble. În aceste puncte duble, tangentele la suprafață în loc de a fi în același plan, formează un con de ordinul al doilea.

De oarece polara reciprocă a suprafeței undei este o altă suprafață a undei, care are, din cele ce preced, 16 puncte duble, urmează că suprafața dată posedă ea însăși 16 plane tangente duble, atingând-o fiecare după o conică, corelativă conului tangentelor corespunzător.

*4º Conul tangentelor într'un punct dublu.* Să presupunem că punctul M (Fig. 164) descrie o secțiune circulară diametrală (C) a elipsoidului (E). Fiecare din punctele sale fiind o apsidă pe curba (C), dau același punct  $M_1$  al suprafeței undei (O). Dar, fiecărui din aceste puncte M corespunde o normală  $M_1N$  particulară care este perpendiculară coborâtă din  $M_1$  pe MN. Locul tangentelor în  $M_1$  este conul suplimentar al celui născut de normala MN. Deci, când punctul M parcurge cercul (C), normala MN rămâne perpendiculară pe generatoarele cilindrului circumscris lui (E) dealungul lui (C). Deci, paralela OI la MN, care tăie  $M_1N$  în I, rămâne în același plan dus prin O perpen-

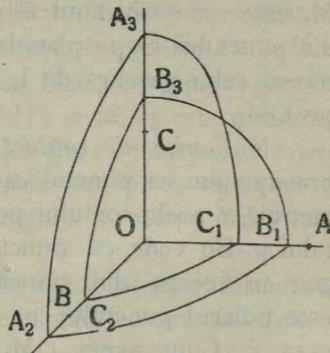


Fig. 165.

dicular pe direcția acestor generatoare și locul punctului I este cercul de intersecție al acestui plan cu sfera descrisă pe  $OM_1$  ca diametru. Locul normalelor  $M_1N$  în  $M_1$  este deci conul cu vârful  $M_1$  având acest cerc ca bază, conul fiind de ordinul al doilea, al cărui con suplimentar, care este locul tangentelor în  $M_1$  este tot de ordinul al doilea. Să observăm că proiecțiile  $P_1$  ale punctului O pe planele tangente în  $M_1$  descriu cercul simetric al celui parcurs de I, în raport cu centrul sferei descrise pe  $OM_1$ .

*5º Conica de contact a unui plan tangent dublu* <sup>(1)</sup>. Să presupunem că punctul care descrie o secțiune circulară diametrală  $\gamma$  a elipsoidului polar reciproc al celui dat, este punctul  $\mu$ . Se vede că punctul  $\mu$ , este fix și deci și planul tangent în fiecare din punctele corespunzătoare  $M_1$ , plan care este polarul punctului  $\mu_1$  în raport cu sfera de centru O și raza  $r$ . Cum avem  $OM_1 \cdot O\pi_1 = r^2$ , locul lui  $M_1$ , inversul cercului în raport cu sfera considerată, este un cerc. Deci, fiecare plan tangent dublu al suprafeței o atinge după un cerc.

*Chestiunea de examen de Geometrie Superioară, la Facultatea de Științe din Paris, Iulie 1924.*

*Se dau trei axe perpendiculare, originea O fiind centrul foii, axa Oy coincide cu linia de pământ și este îndreptată după axa mică a foii. Unitatea de lungime este centimetru. O suprafață strâmbă ( $\Sigma$ ) are ca directoare: 1º dreapta  $x-y=4$ ,  $z=6$ ; 2º dreapta  $x+y=4$ ,  $z=2$ ; 3º cercul orizontal de rază 2 cu centrul în punctul  $x=4$ ,  $y=0$ ,  $z=4$ . Să se reprezinte proiecțiile părții suprafeței ( $\Sigma$ ) presupusă opacă, care este situată dedesubtul planului perpendicular pe vertical  $z=y+4$ . Să se figureze proiecțiile liniei de secțiune a suprafeței. Pentru fiecare din aceste curbe trase, să se indice construcția unui punct curent și aceea a tangentei în acel punct; să se indice punctele și dreptele remarcabile.*

*Construcția generatoarei.* Fie  $(D,D')$ ,  $(\Delta,\Delta')$  directoarele linii drepte și cercul cu centrul  $(o,o')$  (Fig. 166). Să însemnăm cu  $(abc, a'b'c')$  o generatoare a suprafeței;  $a'$  este mijlocul lui  $b'c'$ , deci  $a$  este mijlocul lui  $bc$ . Cum unghiul  $boc$  este drept,  $bc = 2 \cdot oa = 4\text{cm}$ . Construcția generatoarei revine deci a duce

<sup>(1)</sup> Proprietățile punctelor duble și planelor tangente ale suprafeței unde intervin în explicarea fenomenelor de optică cunoscute sub numele de refacție conică și refacție cilindrică.

prin fiecare punct  $a$  al cercului  $o$  o dreaptă cu mijlocul în  $a$ , care se construiește descriind din  $a$  ca centru un cerc cu raza  $oa = 2$ , care tăie dreptele  $oD$  și  $o\Delta$  în  $b$  și  $c$ ; generatoarea are proiecția orizontală  $bc$  și cea verticală  $b'c'$ .

Distanța dintre  $(b, b')$  și  $(c, c')$  se află ducând în  $b$  o perpendiculară  $bu$  pe  $bc$  egală cu diferența cotelor punctelor  $b'$  și  $c'$ , egală cu 4; se vede că distanța în spațiu între  $(b, b')$  și  $(c, c')$  este  $uc = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} = \text{const}$ . Deci, lungimea generatoarei cuprinsă între directoarele  $(D, D')$  și  $(\Delta, \Delta')$  este constantă.

*Con director.* Unghiul dreptei  $(bc, b'c')$  cu planul orizontal se obține ducând în  $b$  perpendiculara  $bu$ , pe  $bc$  egală cu diferența cotelor punctelor  $b'$ ,  $c'$  și unghiul cu planul orizontal este  $ucb = 45^\circ$ .

Deci, paralelele din  $(o, o')$  la aceste drepte formează un con director de rotație cu axa verticală, cu unghiul dela vîrf de  $90^\circ$ .

*Planul tangent* într'un punct se obține considerând paraboloidul de recordare al normalelor, în  $(b, b')$ ,  $(c, c')$  (No. 70 V). Se vede că normalele în  $b$  și  $c$  la curbele directoare sunt perpendicularele în  $b$  și  $c$  pe  $D$  și  $\Delta$  în orizontal, care se tăie în  $i$ . Unind punctul  $i$  cu un punct  $m$  al dreptei  $bc$ ,  $im$  este proiecția orizontală a normalei la suprafață în  $(m, m')$ . Urma planului tangent este perpendiculara din urma orizontală  $t$  a dreptei  $(bc, b'c')$  pe  $im$ .

*Conturul aparent orizontal* este format de locul punctelor de contact ale planelor tangente la suprafață, perpendiculare pe planul orizontal. Întrebuințând procedeul dela No. 70, V, se vede că locul proiecțiilor acestor puncte este curba descrisă de piciorul perpendicularării  $d$  din  $i$  pe  $bc$ .

Aceasta se poate vedea și altfel. În ade-

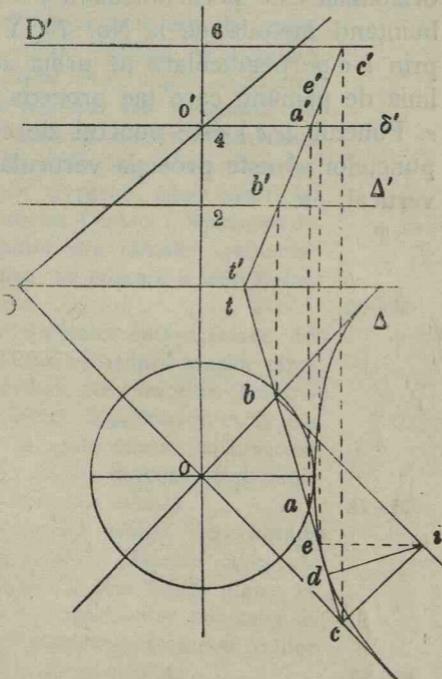


Fig. 166.

văr, proiecția conturului aparent orizontal este înfășurătoarea proiecțiilor orizontale  $bc$  a generatoarei. Dar  $bc$  are o lungime constantă și egală cu  $2.oa=4$ . Deci, avem o dreaptă de mărime constantă  $bc$ , ce se sprijină pe două drepte perpendiculare  $oD$  și  $o\Delta$ , centrul instantaneu de rotație al figurei invariabile  $bc$ , este punctul  $i$  de intersecție al normalelor la curbele  $oD$  și  $o\Delta$  descrise de  $c$  și  $b$ ; punctul de contact al lui  $bc$  cu înfășurătoarea sa este piciorul  $d$  al perpendicularei din  $i$  pe  $bc$ .

Deci, proiecția conturului aparent orizontal este înfășurată în jurul unei drepte perpendiculară la direcția de proiecție, adică o ipocicloidă cu patru puncte de întoarcere.

*Linia de strictiune.* Suprafața fiind cu con director de rotație vertical, linia de strictiune este conturul aparent orizontal.

*Conturul aparent vertical* este locul punctelor de contact a planelor tangente perpendiculare pe vertical. Deci, acest plan tangent este planul proiectant vertical al generatoarei; urma orizontală este perpendiculară pe linia de pământ. Deci, întrebuiuțând metoda de la No. 70, V, urmează că trebuie a duce prin  $i$  o perpendiculară pe urma acestui plan, sau o paralelă la linia de pământ, care tăie proiecția orizontală a generatoarei în  $e$ . Punctul  $(e, e')$  este punctul de contur aparent vertical; locul punctelor  $e'$  este proiecția verticală a curbei de contur aparent vertical, etc.

## TABLA DE MATERII.

	<u>Pagini</u>
<i>Introducere . . . . .</i>	<i>1—2</i>
<i>Infinitii mici . . . . .</i>	<i>2—6</i>
<b>Curbele plane.</b>	
<i>Curbura curbelor plane.</i> Lungimea unui arc de curbă. Raportul dintre un arc infinit mic și coarda sa. Curbura într'un punct. Cerc de curbă. Altă definiție a centrului de curbură. Cerc osculator. Studiul unei curbe în vecinătatea unui din punctele sale. Alte expresii ale razei de curbură. Alte proprietăți ale cercului de curbă . . . . .	6—23
<i>Curbe înfășurătoare.</i> Desfășurata unei curbe plane. Aplicație . . . . .	23—28
<i>Proprietăți fundamentale.</i> Variația unui arc de curbă limitat de două tangente la altă curbă. Variația de lungime a unui segment de dreaptă. Variația unui unghi. Aplicații. Normale la curbele descrise de punctele sau înfășurate de dreptele unei figuri de formă invariabilă. Centru instantaneu de rotație. Metoda lui Chasles. Normale la curbele descrise de punctele sau la înfășurătoarele dreptelor unei figuri de formă variabilă. Metoda lui Mannheim. Centrul instantaneu de mișcare a unei figuri plane variabile care rămâne asemenea cu ea însăși. Centrul instantaneu de mișcare a unei figuri plane variabile cu păstrare de arie . . . . .	28—41
<i>Aplicații.</i> Determinări de normale. Înfășurătoare de drepte. Teoremele lui Graves și Chasles asupra arcelor elipsei. Determinarea centrelor de curbă ale conicelor. Tractricea. Caustice. Podare. Cicloida. Spirala logaritmică. Aria coroanei determinată de un punct al unei coarde de lungime constantă într'o curbă dată. Determinarea maximelor și minimelor a unor elemente legate de o figură mobilă . . . . .	41—62
<i>Noțiuni de geometrie cinematică plană.</i> Generalități. Deplasare finită. Deplasare infinitesimală. Mișcare continuă. Aplicație. Mișcarea cea mai generală a unei figuri plane în planul său. Centrele de curbă ale traectoriilor punctelor figurei mobile. Centrele de curbă ale înfășurătoarelor liniilor figurei mobile. Aplicație. Curba Capă. Epicicloide . . . . .	62—74
<b>Curbele strâmbă.</b>	
<i>Noțiuni introductive.</i> Infiniti mici. Lungimea unui arc. Aicul mic și coarda sa sunt infiniti mici echivalenți. Două	

arce infinit mici, corespunzătoare pe două curbe strămbe, care se corespund punct cu punct, sunt infiniti mici de același ordin. Variația de lungime a unui segment rectiliniu . . . .

74 - 80

*Curbe sferice.* Generalități. Variația unui arc de cerc mare. Desfășurată sferică. Curbură sferică. Cerc de curbură.

80 - 87

*Curbe strămbe.* Curbură. Torsiune. Curbură. Raza de curbură. Normală principală. Centru de curbură. Cerc de curbură. Plan osculator. Dreaptă polară. Suprafață polară. Cerc osculator. Binormală. Torsiune. Relațiiunile dintre cele două indicatoare. Sferă osculatoare. Formulele lui Frenet-Serret. Desfășurătoarele unei curbe strămbe. Studiul unei curbe în vecinătatea unui punct. Aplicații. Elicea. Ordinul de contact a două curbe strămbe. Ordinul de contact al unei curbe și a unei suprafețe. . . . .

87 - 111

*Noțiuni sumare asupra suprafețelor riglate.* Suprafețe desfășurabile. Aplicație la studiul curbelor strămbe. Determinarea suprafețelor riglate. Ordinul suprafețelor riglate. Proprietățile planului tangent la o suprafață riglată. Punctul reprezentativ al distribuției planelor tangente. Suprafețe de răcordare. Paraboloidul normalelor. Aplicații. Plan tangent la o suprafață riglată cu două curbe directoare și plan director. Suprafață strâmbă cu două curbe directoare și con director. Suprafață strâmbă cu trei curbe directoare. Bias passé. Suprafețe desfășurabile. Înfașurătoarea unui plan mobil. Diferite moduri de generare ale suprafețelor desfășurabile. Proprietățile liniilor trase pe o suprafață desfășurabilă. Desfășurarea suprafeței desfășurabile. Liniile geodezice ale suprafeței desfășurabile. . . . .

111 - 135

*Aplicații.* Suprafață strâmbă a binormalelor. Suprafață desfășurabilă a tangentelor. Suprafață rectifiantă. Suprafață strâmbă a normalelor principale. Curbele lui Bertrand. Suprafață înfașurătoare a planelor normale. Suprafață polară. Desfășurata unei curbe. Desfășurarea suprafeței polare. Suprafețe de egală pantă. Elicoidul desfășurabil . . . . .

135 - 144

#### Noțiuni asupra suprafețelor.

*Proprietățile curbelor trase pe o suprafață.* Așezarea unei suprafețe față de planul tangent. Forma suprafeței. Indicatoare. Curbura unei curbe trasă pe o suprafață. Teorema lui Meusnier. Curbura secțiunilor normale. Tangente conjugate. Liniile asymptotice. Linii de curbură. Exemplu de determinare geometrică a liniilor de curbură. Torsiune geodezică. Teorema lui Dupin asupra sistemelor triple ortogonale. Suprafețe minime. Liniile geodezice . . . . .

144 - 170

*Aplicații.* Cuadrică osculatoare. Conoidul drept cu nucleu sferic. Conoidul lui Plüker. Cilindroidul. Mânunchi de normale. Teorema lui Sturm. Raze refractate sau reflectate. Teorema lui Malus și Dupin . . . . .

170 - 183

**Noțiuni sumare asupra complexelor și  
congruențelor de drepte.**

Coordinate omogene ale liniei drepte. Diferite sisteme infinite de drepte în spațiu. Clasificarea complexelor și congruențelor. Proprietăți speciale ale complexelor lineare. Congrențe lineare. Fasciole de complexe lineare. Rețele și sisteme de complexe lineare . . . . . 183—193

**Noțiuni sumare de geometrie cinematică în spațiu.**

<i>Generalități</i> . . . . .	194—195
<i>Mișcarea unei figuri care are un punct fix.</i> Deplasare finită. Deplasare infinitesimală . . . . .	195—196
<i>Mișcarea unei figuri în spațiu.</i> Deplasare finită . . . . .	196—199
<i>Mișcarea continuă cu un grad de libertate.</i> Deplasare infinitesimală. Mișcarea cea mai generală cu un grad de libertate. Complexul normalelor. Complexul tangentelor și caracteristicilor. Aplicație. . . . .	199—206
<i>Mișcarea continuă cu două grade de libertate.</i> Relația dintre normalele la suprafețele traectoriei. Axe instantanee conjugate de rotație. Suprafețele focale ale unei congruente. Cazul singular al mișcării cu două grade de libertate . . . . .	207—211

**Aplicații.**

<i>Elicoizii riglați.</i> Definiții. Elicoidul riglat cu con director. Elicoidul surup triunghiular. Elicoizii riglați cu plan director. Elicoidul surup pătrat . . . . .	211—222
<i>Suprafața undei.</i> . . . . .	222—228
<i>Chestiunea de examen de Geometrie superioară, la Facultatea de științe din Paris, Iulie 1924 . . . . .</i>	228—230

