

A L G E B R A

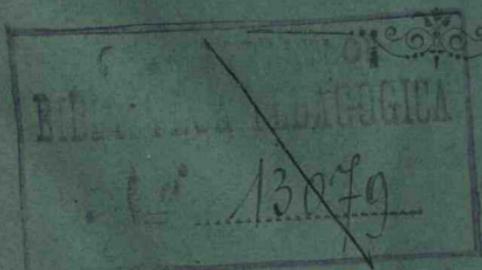
CU SOLUȚIUNI, ÎNDRUMĂRI

SI UN

M E M E N T O

DE

G. CH. ASLAN



FOCSANI
TIPOGRAFIA ALESSANDRU CODREANU
1898



BIBLIOTECĂ CENTRALĂ
UNIVERSITARĂ
BUCUREŞTI

Cota 4995
Inventar 546315

BIBLIOTECĂ PEDAGOGICĂ

Nº 13079

277582

CESTIUNI

DE

A L G E B R A

CU SOLUȚIUNI, ÎNDRUMĂRI

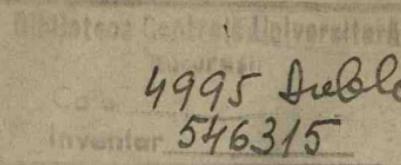
ȘI UN

MEMENTO

DE

G. CH. ASLAN





Rc 82/04

Toate drepturile sunt rezervate autorului și fiecare exemplar va purta semnătura sa.

G. Atan

B.C.U. Bucuresti



C546315

MEMENTO

Numerile aritmetice nu esprimă de cât o idee de conținut, prin urmare sunt abstracte; astfel 4 de. es. poate reprezenta, indiferent, 4 mere, 4 metri etc.; căci în fiecare din aceste cazuri terminul cu care se compară—numit *unitate*, este cuprins de un acelaș număr de ori.

Astfel de numere, cari esprimă conținutul de un număr exact de ori a unităței într'o mărime oare-care, le-am numit *numere întregi*.

Nu toate mărimile cuprind însă unitatea de un număr exact de ori, în acest caz încercăm dacă nu se cuprinde de un număr exact de ori o parte a unităței, pentru acea o împărțim în 2, 3... părți egale și dacă de. es. a 5-a parte a unităței se cuprinde exact de 3 ori în mărimea considerată, zicem că acea mărime este *măsurată* prin *numărul fracționar* trei cincimi.

Numerile întregi și fracționare formează grupa numerilor *comensurabile* sau *rationale* căci cu ajutorul lor se pot exprima toate raporturile de conținut a două mărimi cari au o comună măsură.

Se poate întâmpla ca împărțind unitatea într'un foarte mare număr de părți egale, tot să nu dăm peste o particică care să se cuprindă de un număr exact de ori în mărimea considerată; se zice atunci că acea mărime e *incomensurabilă* cu unitatea, și este *măsurată* printr'un număr *incomensurabil* sau *irational*. Astfel raportul circonferinței la diametru este un număr incomensurabil căci împărțindu-se diametru într'un număr neînchipuit de mare de părți (egale), circonferința nu va putea rezulta nici-o-dată din adunarea unui număr întreg de aceste părți. Acest raport, care se însamnă cu π , este

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26434\dots$$

Dar nevoia de a se introduce aceste din urmă două grupe de numere n'a rezultat numai din considerațiunea de a se putea reprezenta toate raporturile de conținut dintre două mărimi

oare-cari, ci și din operațiunile cu numerile întregi—abstracții ne făcându-se de mărimele ce ar reprezenta: fracțiunile au rezultat din neputința de a împărți exact și numerile iraționale din neputința estragerei de rădăcină.

Cu studiul proprietăților și a calculelor ce se pot săvârși cu aceste dintăi trei grupe de numere se ocupă *Aritmetică*.

Sunt unele cestiuni de Aritmetică cari din cauza enunțului greșit ne dau ca răspuns niște numere precedate de semnul minus; în prezența acestor rezultate, e natural să ne întrebăm ce reprezintă aceste cantități? Esaminând cu atențiu datele cestiuniei, observăm că enunțul este pus *in sens opus* rezultatului care ar trebui să lărgă și încercând să modificăm în acest sens enunțul, vedem că lărgă pentru rezultat același număr însă fără nici un semn—adecă adevăratul răspuns. Deducem dar că *în cazul când lărgă pentru rezultatul unei probleme un număr precedat de semnul minus, acest număr luat fără de nici un semn răspunde cestiuniei opuse acelei propuse*.

Un număr comensurabil sau incomensurabil, precedat de minus se numește *negativ* în deosebi de celelalte precedate sau nu de plus cari se numesc *pozitive*.

Cu introducerea acestor numere, noi proprietăți apar și altele se perd; de aici nevoia unei alte științe care să le studieze: *Algebra*.

Algebra propunându-și să simplifice și să generalizeze rezultatele Aritmeticei, întrebuințează în acest scop numere generale: *litere*; urmează că rezultatele însăși ale unui calcul algebric vor fi generale—adecă niște *formule*.

Așa-dar, în *Algebră* nu putem de cărătă prin semne operațiunile ce leagă diferențele cantități, mulțumindu-ne a reduce terminii simili și a simplifica.

Adunarea algebrică este o operațiune care are de scop de a face *suma algebrică* a două sau mai multe cantități.

Prin *suma algebrică* a două sau mai multe cantități, înțelegem acele cantități scrise una lângă alta cu semnele lor.

Scăderea algebrică este o operațiune care are de scop ca fiind dată o sumă și una din părțile sale să se afle cealaltă parte numită *diferență algebrică* sau *rest*.

Prin *diferență algebrică* a două cantități, înțelegem cantitatea scăzătoare scrisă cu semn schimbat după descăzut.

Prin *reducerea algebrică* a doi sau mai mulți termini simili de același semn, înțelegem suma aritmetică a terminilor precedată de semnul comun.

Prin *reducerea algebrică* a doi sau mai mulți termini simili

de semne diferite, înțelegem diferența aritmetică a sumilor terminilor de acelaș semn precedată de semnul sumei celei mari.

Imulțirea algebrică este o operațiune care are de scop de a face *productul algebric* a două sau mai multe cantități.

Prin *productul algebric* a două cantități, înțelegem *productul aritmetic* al acelor cantități precedat de (+), dacă factorii au acelaș semn; de (-), dacă factorii au semne contrare.

Impărțirea algebrică este o operațiune care are de scop ca fiind dat un *product* de doi factori și unul din ei să se afle celalăt factor numit *cât algebric*.

Prin *câțul algebric* a două cantități, înțelegem *câțul aritmetic* precedat de (+), în caz când cantitățile au acelaș semn; de (-), când cantitățile au semne contrare.

A *ridica* o cantitate la puterea a n -a, însamnă să o înmulți de n ori cu ea însăși. De aici regula: Un monom se ridică la o putere, ridicându-se coeficientul la acea putere și înmulțindu-se esponentul fiecărei litere cu esponentul puterei.

Tot din definiția puterii rezultă că dacă monomul e negativ, atunci, dacă se ridică la o putere de esponent nepăreche, rămâne tot negativ; iar dacă se ridică la o putere de esponent păreche, devine pozitiv.

A *estrage* rădăcina a n -a dintr-o cantitate, însamnă să găsi o altă cantitate care ridicată la puterea a n -a să reproducă pe cea dintăi. De aici regula: Pentru a afla rădăcina unui monom, se estrage rădăcina din coeficient și se împarte esponentul fiecărei litere prin indicele rădăcinei.

Din definiția puterii rezultă că nu putem estrage o rădăcina de indice păreche dintr-o cantitate negativă. Astfel de cantități se numesc *imaginare*.

Din aceeași definiție mai rezultă că orice cantitate are două rădăcini de indice păreche egale însă de semne contrare.

Pentru a estrage rădăcina patrată dintr'un trinom patrat perfect, se estrage rădăcina din extremitatea despărțindu-i prin semnul terminului mijlociu*).

Toate proprietățile și regulile aplicabile fracțiunilor aritmetice se aplică și fracțiunilor algebrice, observându-se regula semnelor.

Astfel, pentru a aduna două sau mai multe fracții care au acelaș numitor, se face suma aritmetică a numărătorilor căreia i se dă de numitor numitorul comun; pentru a scădea două

* Pentru amănunte a se vedea *Cursul teoretic și practic de Algebră* pag. 30

fracțiuni, cari au acelaș numitor, se scad algebricește numărătorii și diferenței se dă numitorul comun. În caz când fracțiunile nu au acelaș numitor, le aducem mai întâi la acelaș numitor și apoi operăm după regulă.

Pentru a înmulți două sau mai multe fracțiuni, se înmulțesc numărătorii între dănsii și numitorii între dănsii.

Pentru a împărți o fracțiune printr-o alta, se înmulțește fracțiunea deîmpărțit cu fracțiunea împărțitoare răsturnată.

Pentru a ridica o fracțiune la o putere, se ridică, în parte, ambii săi termini la acea putere.

Pentru a estrage rădăcina dintr-o fracțiune, se estrage, în parte, din ambii sei termini acea rădăcină.

Pentru a înmulți doi sau mai mulți radicali de acelaș indice, se înmulțesc cantitățile de sub radical.

Pentru a împărți doi radicali de acelaș indice, se împart cantitățile de sub radical.

Pentru a ridica un radical la o putere, se ridică cantitatea de sub radical la acea putere.

Pentru a estrage rădăcina dintr'un radical, se înmulțește indicele radicalului cu indicele rădăcinei.

Două expresiuni algebrice se zic egale, când iau aceeași valoare numerică pentru ori-ce valori s-ar atribui literilor.

Relațiunea dintre două expresiuni egale se numește *egalitate*.

Egalităților algebrice se aplică ca și celor aritmetice acsioma: *putem opera asupra ambilor membri ai unei egalități un acelaș calcul cu aceleași cantități și căpătăm tot o egalitate*.

Se numește *ecvație* o relațiune dintre două expresiuni cari pot deveni egale pentru anumite valori ale necunoscutelor ce cuprind.

A asta acele valori —numite *rădăcini*, însamnă a rezolvi ecuația.

Ecuatiunea fiind o egalitate condițională, acsioma aplicabilă egalităților se aplică și ecuațiilor cu oare-cari restricții: 1º Cantitatea cu care înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei ecuații să fie *finită și diferită de zero*—altfel am căpăta o egalitate propriu zisă de forma $0=0$ sau $\infty=\infty$, și să nu cuprindă necunoscute—in care caz s-ar introduce sau s-ar perde din rădăcini; 2º Dacă *ridicăm* ambii membri ai unei ecuații la o putere, ecuația rezultată admite toate rădăcinele celei date, dar se poate întâmpla să admită și altele străine—e nevoie dar să verificăm dacă toate rădăcinele aflate verifică ecuația dată.

O ecuație se zice *rezolvată*, când necunoscuta ce o cuprinde se află într'un singur membru cu coeficientul și exponentul 1.

Această definiție ne arată că pentru a rezolvi o ecuație, vom căuta să izolăm într'un singur membru necunoscută și apoi o vom face să aibă coeficientul și esponentul 1.

Intr'o sistemă de ecuații simultane, putem înlocui o ecuație prin ecuația ce o formăm adunând sau scăzând membru către membru toate ecuațiunile sau două din ele; de asemenea putem înlocui o necunoscută prin valoarea sa scoasă din una din ecuații.

De aici și două metode de a rezolvi o sistemă: metoda prin reducție și metoda prin substituție.

Două expresiuni algebrice se zic *neegale*, când iau valori numerice diferite pentru orice valori atribuite literilor ce cuprind.

Relațiunea dintre două expresiuni neegale se numește *neegalitate*.

Asupra neegalităților avem acsioma: putem aduna sau scădea o aceeaș cantitate din ambii membri ai neegalităței; putem de asemenea îmuli sau împărți ambii săi membri prin o aceeaș cantitate pozitivă și finită și în fiecare din aceste cazuri căpătăm o neegalitate de acelaș sens.

Dacă cantitatea cu care îmulișim sau împărțim e negativă (fără a fi infinită), căpătăm o neegalitate de *sens schimbător*.

Se numește *inecuație* o relațiune dintre două expresiuni algebrice cari sunt neegale numai pentru anumite valori ale necunoscutelor ce cuprind.

Aksioma aplicabilă neegalităților se aplică și inecuațiilor fără nici o restricție.

In rezolvirea unei inecuații ne călăuzim întocmai ca la ecuații.

O ecuație cu o necunoscută se zice de *gradul al doilea*, când, după ce s'a adus la forma generală, esponentul cel mai mare cu care intră necunoscuta este 2.

Când o ecuație de gradul al doilea e necompletează, adică e de una din formele

$$ax^2 + bx = 0 \quad \text{sau} \quad ax^2 + c = 0$$

o vom rezolvi direct: în cazul sănătății scoțând pe x în factor comun și egalând fie-care factor cu 0, în cazul al doilea trecând terminul cunoscut în membrul al doilea, împărțindu-l prin coeficientul necunoscutei și estrăgând rădăcina patrată din acest rezultat.

Când avem de rezolvit o ecuație de formă complectă, ne servim numai de formule—de aici nevoia de a le memoriza bine, astfel cum se citesc.

Distingem 3 formule de rezolvare:

formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

care e generală;

formula

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

aplicabilă în cazul

când coeficientul lui x e păreche ($b=2b'$)

și formula

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

aplicabilă în cazul

când coeficientul lui x^2 e unitatea, dar puțin întrebunțată.

Separând rădăcinile date de formula a treia și adunândule, deducem că suma rădăcinelor unei ecuații de forma $x^2 + px + q = 0$ este egală cu coeficientul lui x schimbat de semn; îmultyind apoi aceleasi rădăcini, deducem că productul lor este egal cu termenul cunoscut.

Dacă ecuațiunea ar fi de forma $ax^2 + bx + c = 0$, n'avem de căt să împărțim ambii săi membri cu a și apoi să aplicăm proprietățile.

Cu ajutorul acestor proprietăți—numite proprietățile ecuațiilor de gradul al doilea, putem rezolvi următoarele cestiuni:

1º Să se găsească două numere cunoscând suma și produsul lor.

2º Să se formeze o ecuațiune de gr. II. ale carei rădăcini să fie două numere date.

3º Să se discute a priori semnele rădăcinelor unei ecuații de gr. II.

4º Descompunerea trinomului de gr. II.—Un trinom de gr. II. se poate descompune în productul lui a cu doi factori pe cari îi căptăm scăzând succesiv din x fiecare rădăcină.

Se numește ecuație binomă o ecuațiune care nu conține de cât doi termini.

Rezolvirea ori-cărei ecuații binome se reduce la rezolvarea ecuației $y^n \pm 1 = 0$, căci îmultyind rădăcinile acestei ecuații cu $a = \sqrt[n]{A}$, căptăm toate rădăcinile ecuației date.

Se numește ecuațiune trinomă, ecuațiunea în care necunoscută intră cu un exponent indoit unul altuia; forma generală a unei astfel de ecuații va fi dar $ax^{2n} + bx^n + c = 0$.

Pentru a rezolvi astfel de ecuațiuni, punem $x^n = z$ și ecuațiunea se reduce la gr. II. pe care o rezolvim; estrâgând apoi a n^a rădăcină din z' și z'' , căptăm toate rădăcinile ecuației date.

In cazul particular când $n=2$, forma ecuațiunei e $ax^4 + bx^2 + c = 0$ sub care formă ecuațiunea se numește bipatrata. In rezolvarea

acestei ecuații urmăram, de sigur, aceiaș metodă ca pentru ecuațiile trinome.

O sistemă de ecuații se zice că e *de gradul al doilea*, când cel puțin una din ecuațiile ce o formează e de gr. II—celelalte putând fi de gr. I.

Când sistema cuprinde două ecuații dintre cari una e de gr. I., metoda generală constă în a aduce ecuațiile sub formă de sumă și product a necunoscutelor și a rezolvi apoi ecuațiunea de gr. II. la cari suntem conduși.

Se numește *progresie* un sir de numere astfel că fiecare se formează din precedentul după o lege determinată.

Numerile ce formează o progresie se zic *terminii* progresiei.

O progresie aritmetică este un sir de termini astfel că fiecare din ei se formează *adunând* precedentului un acelaș număr numit *rațiunea* progresiei.

Dacă rațiunea e *pozitivă*, terminii merg crescând și progresia se zice *crescătoare*; dacă rațiunea e *negativă*, terminii merg descrescând și progresia se zice *descrescătoare*.

In progresiile aritmetice avem următoarele formule fundamentale:

$$l = a + (n-1)r \quad \text{și} \quad S = \frac{(a+l)n}{2}$$

cari se pot enunța și în cari putem considera două cantități ca necunoscute ceiace dă loc la 10 probleme diferite.

Pentru a insera m medii între terminii a și b ai unei progresii, ne servim de formula care ne dă rațiunea progresiei ce trebuie să o formăm

$$r = \frac{b-a}{m+1}$$

O progresie geometrică este un sir de termini astfel că fiecare din ei se formează *îmulțind* pe precedentul cu un acelaș număr numit *rațiunea* progresiei.

Dacă rațiunea e *mai mare ca unitatea*, terminii merg crescând și progresia se zice *crescătoare*; două rațiunea e *mai mică ca unitatea*, terminii merg descrescând și progresia se zice *descrescătoare*.

La progresiile geometrice avem de asemenea formulele fundamentale

$$l = aq^{n-1} \quad ; \quad P = \sqrt[n]{(al)} \quad \text{și} \quad S = \frac{lq-a}{q-1}$$

de asemenea

$$\lim. S = \frac{a}{1-q} \quad \text{și} \quad q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

Dacă considerăm două progresii, una geometrică *începând cu unitatea* și alta aritmetică *începând cu zero*, fie-care termen al progresiei aritmetice este numit *logaritmul* terminului de acelaș rang din progresia geometrică. Astfel $\log 1=0 \dots \log q^n=nr^*$.

Urmează dar că într-o sistemă dată orice număr mai mare ca 1 are un logaritmul și unul singur.

Dacă am prelungi progresiile la stânga, deducem că orice număr pozitiv *mai mic ca 1* are un logaritmul și unul singur și acest logaritmul e *negativ*.

Progresia geometrică neavând termini negativi, urmează că *numerile negative n'au logaritmi*.

In calculele cu logaritmi întrebuițăm de multe ori proprietățile :

Logaritmul unui product este egal cu suma logaritmilor factorilor săi.

Logaritmul unui cât este egal cu diferența logaritmilor terminilor săi.

Logaritmul puterei unui număr este egal cu logaritmul acelui număr îmulsit cu exponentul puterei.

Logaritmul rădăcinei unui număr este egal cu logaritmul acelui număr împărțit prin indicele rădăcinei.

In calculele noastre întrebuițăm sistema de logaritmi de baza 10 numită sistemă *vulgară sau zecimală*.

Această sistemă ne oferă multe avantaje :

Puterile lui 10 au de logaritmi numeri întregi cari sunt în-săși esponenții puterei.

Caracteristica logaritmului unui număr mai mare ca 1 este compusă din atâtea unități câte cifre are numărul la partea întreagă mai puțin una.

Caracteristica negativă a logaritmului unui număr mai mic ca 1 are un număr de unități corespunzând rangului primei cifre semnificative după virgulă.

Cologaritmul unui număr este logaritmul inversului aceluia număr – este, prin urmare, *egal însă de semn contrar* logaritmului.

Cunoscând logaritmul unui număr putem forma imediat cologaritmul său adunând +1 la caracteristica și schimbându-i semnul, și apoi făcând complimentul unităței la partea zecimală.

O aplicație imediată a logaritmului o întălnim în cestiu-nile de dobândă compusă.

* O altă definiție a logaritmului ar fi: *logaritmul unui număr este exponentul puterii la care trebuie ridicat un alt număr numit bază pentru a căpăta numărul dat*.

Această definiție poate fi tradusă prin ecuația $\log N=b^x$

Se numește *dobândă* folosul ce'l aduce o sumă dată cu împrumut pe un timp determinat.

Când dobânda nu se plătește la sfârșitul fiecarui an, ci se lasă ca să măreasă capitalul împrumutat, aducând la rândul ei dobândă pe anul următor, se zice că se împrumută cu *dobândă compusă*.

Diferitele cestiuni ce ne putem propune asupra dobândei sunt rezolvite cu ajutorul logaritmilor prin formulele

$$C=c(1+r)^n; \quad c=\frac{C}{(1+r)^n}; \quad 1+r=\sqrt[n]{\frac{C}{c}}; \quad n=\frac{\log C-\log c}{\log (1+r)}$$

De dobândă compusă se ține socoteală și în calculul anuităților.

Se numește *anuitate* o sumă hotărâtă ce o persoană o dă în fiecare an pentru a'și forma un capital sau pentru a scapa de o datorie.

Operațiunea de a forma un capital se numește *depuneri* și în acest caz anuitatea se plătește la *începutul* fiecarui an, iar operațiunea de a se mărtui de o datorie se numește *amortisment* în care caz anuitatea se plătește la *sfârșitul* fiecarui an.

In cestiunile de depuneri ne servim de formulele

$$C=\frac{a(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}; \quad a=\frac{Cr}{(1+r)[(1+r)^n-1]} \\ n+1=\frac{\log \left(1+r+\frac{Cr}{a} \right)}{\log (1+r)}$$

iar în cestiunile de amortisment de formulele

$$a=\frac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n-1}; \quad C=\frac{a[(1+r)^n-1]}{r(1+r)^n}; \quad n=\frac{\log a-\log (a-Cr)}{\log (1+r)}$$

Când o cantitate are o valoare unică și determinată într'o anumită formulă se zice că e *constantă*.

Când, din contra, o cantitate poate trece prin diferite stări de mărimi, se zice că e *variabilă*.

O variabilă se zice *independentă*, când i se poate atribui *orice valoare* arbitrară; în trinomul de gr. II. x este o variabilă independentă. Trinomul însă este o variabilă a cărei valoare atârnă însă de la acea a lui x , pentru care se și numește variabilă *dependentă* sau *funcțiune* a lui x .

O funcțiune se zice că trece printr'un *maximum* când după ce a crescut până la o valoare oare-care a variabilei, începe a descrește.

O funcțiune se zice că trece printr'un *minimum*, când, după

ce a descrescut până la o valoare oare-care a variabilei, începe să crește.

In cestiunile de maximum și de minimum ne propunem să cercetăm dacă o funcție dată admite maximum sau minimum și să determinăm valoarea variabilei pentru care funcția este maximă sau minimă.

In acest scop întrebuiuțăm metoda *directă*, metoda *indirectă* sau câteva teoreme care se enunță :

Un product de doi sau mai mulți factori pozitivi variabili, a căror sumă e constantă, este maximum când factorii sunt egali.

Productul a doi sau mai mulți factori pozitivi variabili fiind constant, suma acestor factori este minimum când acești factori sunt egali.

Suma patratelor a două numere a căror sumă e constantă, e minimum când numerile sunt egale.

Un trinom de gr. II prezintă un *maximum* când a e negativ și un *minimum* când a e pozitiv.



CESTIUNI

DE

ALGEBRA

ESERCITII PRELIMINARE

1. Care este scopul Algebrei și cum ajunge la acest scop?
2. Ce numim coeficient și ce exponent?
3. Ce este o formulă? Sunt ele de vre-un folos?
4. De căte feluri poate fi o expresiune algebrică? cum se clasifică expresiunile?
5. Ce înțelegem prin gradul unui polinom? cum îl ordonăm?
6. Care e coeficientul în expresiunile

$$3ab, \quad 7c^2d, \quad \frac{2}{3}ab^2, \quad \sqrt{2}a, \quad -a, \quad -8a^2b$$

dar în expresiunile

$$a^2x, \quad abx, \quad 5b^2y, \quad a\sqrt{3}zy, \quad -a^2bx$$

7. În expresiunea $4a^2 - 5a^4$ ce este 4 din monomul antăi și ce din monomul al 2-le? Calculați valoarea expresiunii pentru $a = \frac{1}{2}$.

8. În general, ce înseamnă m și ce a^m ? Calculați valoarea ambelor expresiuni pentru $m=3$ și $a=28$.

9. Esprimați în scris: 1^o câtul sumei lui a și x prin diferența lor; 2^o triplul lor product prin semi-suma lor; 3^o semi-diferența lor prin semi-productul lor.

10. Esprimați câtul sumei cantităților a, b și c prin triplul product al semi-sumei celor d'intăi cu rădăcina patrată din c.

11. Să se afle valoarea numerică a expresiunilor:

| | | |
|----|-----------------------|---------------------------|
| 1. | $1^0 \quad a^2 - b$ | $3^0 \quad ab^2 - a^2b$ |
| | $2^0 \quad a^2 + b^2$ | $4^0 \quad ab^3 + a^2b^2$ |

pentru $a=3$ și $b=5$.

| | | |
|----|-----------------------------------|--------------------------------|
| 2. | $1^0 \quad a^4b + ab + ab^2$ | $3^0 \quad a^3 - a^2b + b^2$ |
| | $2^0 \quad a^2b^2 - 2ab^2 + a^2b$ | $4^0 \quad a^3 + a^2b^2 - b^3$ |

NOTĂ.— Esercițiile la cari am crezut de cuviință să nu dau rezultatul pot fi verificate ușor atribuind niște valori numerice literilor și săvârșind calculele; se atribue apoi aceleași valori și literilor din rezultat și dacă se găsește același număr, calculul e bine făcut.

pentru $a=7$ și $b=2$

$$3. \frac{7a^2bx^2 - 8a^4 + 16ab^2x}{9a^8 - 2bc^2 - d^2} \quad \text{pentru } a=2, b=4 \text{ și } x=5$$

$$4. \frac{2a^2 + 3d}{9a^8 - 2bc^2 - d^2} \quad \text{pentru } a=8, b=12, c=5 \text{ și } d=3.$$

$$5. \frac{a + \frac{b}{c}}{a - c} \quad \text{pentru } a=29, b=36 \text{ și } c=9.$$

$$6. 1^0 \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad R.: 1 \quad 3^0 \frac{\sqrt{a^2 - b} + \sqrt{a^2 + 5bc}}{a^3} \quad R.: \frac{7}{32}$$

$$2^0 \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad R.: \sqrt{-1} \quad 4^0 \sqrt{\frac{8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3}{a^3 + 3a^2b \pm 3ab^2 + b^3}} \quad R.: \frac{1}{11}$$

pentru $a=4, b=7$ și $c=3$.

12. Să se calculeze volumul unui glob sferic dat de formula $\pi \cdot R^3$ știind că raza sa $R=0^{m.c} 002\ 144\ 665\ 6$

$$(R.: 0^{m.c} 002\ 144\ 665\ 6)$$

13. Să se calculeze suprafața unui triunghi dată de formula $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ cunoscând laturile sale $a=12, b=15$ și $c=23$ și semi-perimetru $p=25$ $(R.: 80^{m.p.} 62)$

14. Verificați rezultatul întrebuiențând formula

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

15. Să se ordoneze polinomii:

$$1^0 5ab^3 - 8a^4b^2 + 12a^2b^4 - 9a^8b$$

$$2^0 8xy^2 + 7x^3y^4 - 19x^5y + 3x^2y^3 + 5x^4y^5$$

$$3^0 2ax^5 - 8a^2bx^3 + 7ab^2x - a^2b^2x^4$$

16. Ce folos rezultă din introducerea cantităților negative?

17. Ce înțelegem prin termeni simili și cum ii reducem?

Să se reducă terminii simili din expresiunile:

$$a^2b + ab^2 + 3a^2b^2 - 5ab^2 - 2a^2b + 4ab^2$$

$$3a^2b + 5a^2b^3 - 2ab^3 + 8a^3b - 2a^2b^3 - 5a^2b + 11ab^3$$

$$3\sqrt{ab} + 5\sqrt{a^2b} - 6\sqrt{ab} + 2\sqrt{a^2b} + 7\sqrt{ab} \quad R.: 4\sqrt{ab} + 7\sqrt{a^2b}$$

$$4\sqrt[3]{a^3b^2} - \sqrt{a+b} - 2\sqrt[3]{a^3b^2} + \sqrt{a^3b^2} + \sqrt{a+b} \quad R.: 2\sqrt[3]{a^3b^2} + \sqrt{a^3b^2}$$

$$\frac{1}{2}xy^2 + \frac{3}{4}x^2y - \frac{5}{3}x^2y^2 - \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{3}xy^2 + \frac{3}{2}x^2y^2$$

$$R.: \frac{5}{6}xy^2 + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}x^2y^2$$

$$\frac{2}{3}x^3y^4 - \frac{3}{5}x^2y^2 - \frac{1}{4}xy^3 - \frac{3}{7}x^2y^2 - \frac{1}{6}x^3y^2 + \frac{3}{8}xy$$

$$R.: \frac{1}{2}x^3y^2 - \frac{36}{35}x^2y^2 - \frac{1}{4}xy^3 + \frac{3}{8}xy$$

18. Ce este o identitate?

19. Verificați identitatea expresiunilor

$$\frac{5}{3}a^2 + \frac{2}{5}a^2 - \frac{5}{7}b^2 + \frac{3}{8}a^2 + \frac{3}{2}b^2 - 6a^2 - \frac{11}{14}b^2 = -\frac{427}{120}a^2$$

20. Esprimăți produsul sumei a două cantități cu diferența lor.

21. Expresiunile $(a+b-c)(a-b+c)$ și $a+b-c \times a-b+c$ sunt identice?

22. Ce reprezintă una și ce alta?

23. Calculați valoarea fiecărei în parte, pentru

$$a=5, b=3, c=2.$$

$$R: 24 \text{ și } -3.$$

Esercizi cu expresiuni rationale întregi.

ADUNAREA.

1. În ce constă adunarea algebrică a două sau mai multe cantități?

2. x fiind un număr întreg, care i următorul său?

3. Cu cât trebuie să se vândă un obiect ce costă a lei pentru a căștiga la dânsul b lei?

4. La nașterea mea mama avea 20 de ani; ce vîrstă are acum știind că eu am t ani?

5. Un jucător se scoală de la joc cu a lei, după ce perduse 7 partizi de câte b lei. Cu cât se pusește la joc?

6. Latura unui patrat este a; care e perimetrul (conturul) său?

7. Care este perimetrul unui paralelogram știind că latura cea mare intrece cu b pe cea mică care este a?

8. Să se facă suma algebrică redusă a polinomilor:

$$1^0 \quad \begin{array}{l} 2a-3b+2c-5d \\ 3a-2b+c+5d \end{array}$$

$$5^0 \quad \begin{array}{l} 3ax^2+2by-5cxy+z^3 \\ -2ax^2-3by-cxy-7z^3 \end{array}$$

$$2^0 \quad \begin{array}{l} 5x^2-8xy+2xy^2-y^2 \\ 2x^2+3xy-5xy^2+4y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -ax^2+5by+8cxy+3z^3 \\ 5ax^2-by-2cxy+2z^3 \end{array}$$

$$3^0 \quad \begin{array}{l} 2a^3b+6ab^2+3a^2b^2 \\ -2a^3b-3ab^2+a^2b^2 \\ a^3b+ab^2-7a^2b^2 \end{array}$$

$$6^0 \quad \begin{array}{l} \frac{3}{4}ab^2+\frac{5}{7}a^2b-\frac{1}{2}a^2b^2 \\ -\frac{2}{3}ab^2-\frac{4}{5}a^2b-\frac{1}{6}a^2b^2 \end{array}$$

$$4^0 \quad \begin{array}{l} -3\sqrt{xy}+2\sqrt{x^3y}-9\sqrt{xy^3} \\ -5\sqrt{xy}-9\sqrt{x^3y}+6\sqrt{xy^3} \\ -\sqrt{xy}+5\sqrt{x^3y}+3\sqrt{xy^3} \\ -9\sqrt{xy}-2\sqrt{x^3y} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +2a^2b^2 \\ \hline \frac{1}{12}ab^2-\frac{3}{35}a^2b+\frac{4}{5}a^2b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7^0 \quad 7x^3y + 3x^2y^2 - 5xy^3 \\
 \quad \quad \quad - x^2y^2 \quad \quad \quad + 4y^4 \\
 - 3x^3y \quad \quad \quad + 2xy^3 \quad \quad \quad - x^4 \\
 \hline
 \quad \quad \quad - 2x^2y^2 \quad \quad \quad - 3y^4 \\
 \hline
 4x^3y - 3xy^3 + y^4 - x^4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8^0 \quad 2x^m - 3x^{m-1} - 7x^{m-2} + 9x^{m-3} \\
 \quad \quad \quad 5x^m + 6x^{m-1} - x^{m-2} - 7x^{m-3} \\
 \hline
 \quad \quad \quad - 3x^m - 4x^{m-1} + 9x^{m-2} - 5x^{m-3}
 \end{array}$$

$$R.: \quad 4x^m - x^{m-1} + x^{m-2} - 3x^{m-3}$$

9. Să se facă suma algebrică redusă a expresiunilor:

$$1^0 \quad a + 2b - 3c; \quad 5a - 2d + b; \quad d - 4b + 5c - 6a$$

$$2^0 \quad 2a^2; \quad 3b^2 - a^2 + 5c; \quad -b^2 + 2c^2 - a^2 + d^2; \quad -d^2 - a^2$$

$$3^0 \quad a^2b; \quad 2ab^2 + a^2b^2; \quad -3a^2b - ab^2 - a^2b^2; \quad a^2b \quad R.: ab^2 - a^2b$$

$$4^0 \quad \frac{1}{2}x^2y^2; \quad -\frac{3}{4}x^3y^3; \quad -\frac{4}{3}xy; \quad \frac{7}{4}x^3y^3; \quad -\frac{6}{5}x^2y^2; \quad -\frac{3}{7}xy$$

$$-\frac{4}{9}x^3y^3; \quad \frac{2}{7}x^2y^2 + xy \quad R.: -\frac{29}{70}x^2y^2 + \frac{5}{9}x^3y^3 - \frac{16}{21}xy$$

10. Un lucrător căștigă a lei pe zi în timp de 3 zile și b lei în timp de 2 zile; căt a căștigat el cu totul?

11. O persoană cheltuește căte x lei pe zi în timp pe 4 zile; căte y lei în timp de 2 zile și z lei în o altă zi. Căți lei avu-se, știind că i'a mai rămas v lei?

12. Într-un bazen curge apă prin trei canele: caneaua A dă 4 hectolitri pe oră; B dă numai 3 h.l.; iar caneaua C căt amândouă la un loc. Cătă apă va fi în bazen lăsând să curgă toate. în timp de o oră? dar în timp de 42 minute?

$$R.: \quad 1^0 \quad 14 \text{ h.l.}; \quad 2^0 \quad 9 \text{ h.l.}, 8$$

SCĂDEREA

1. În ce constă scăderea algebrică a două cantități?

2. Cunoșcând suma a două cantități și una din ele, cum aflăm cea-l-altă?

3. x fiind un număr întreg, care'i precedentul său?

4. Un unghiu dintr'un triunghi valorează t grade; să se afle suma celor-l-alte două unghiuri? (Se știe că suma tuturor unghiurilor dintr'un triunghi valorează 2 unghiuri drepte sau 180°).

5. O zi de vară având t ore, căte ore are noaptea?

6. Arătați că suma a 3 numere întregi consecutive este egală cu 3 ori numărul mijlociu. (Numărul mijlociu se însamnă cu x)

7. Să se facă diferența algebrică redusă a polinomilor:

- $$\begin{array}{ll} 1^0 & a^2 + 2ab + b^2 ; \quad a^2 - 2ab + b^2 \\ 2^0 & a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 ; \quad a^3 + 3a^2b - 3ab^2 - b^3 \\ 3^0 & 6a b + 3a^2b^2 - 5ab^3 ; \quad 2a^3b + 5a^2b^2 \\ 4^0 & 3x^3y^2 - 7x^2y^3 + 9xy - 2x^4 ; \quad -x^3y^2 + 2x^2y^3 - 3xy + 3x^4 \end{array}$$

8. Se dă patru polinomi:

$$\begin{aligned} & 3a^3 - 2a^2b + 5ab^2 - 7b^3 + 8c^2 \\ & 2a^3 - 7a^2b + 9ab^2 - 3b^3 - 2c^2 \\ & 6a^3 + 5a^2b - 7ab^2 - 4b^3 + 3c^2 \\ & - 9a^3 - 3a^2b - 2ab^2 + 9b^3 - 4c^2 \end{aligned}$$

- $$\begin{array}{l} 1^0 \text{ Din suma celor d'intăi să se scadă suma celor din urmă.} \\ 2^0 \text{ Din cel din urmă să se scadă suma celor trei d'intăi.} \\ 3^0 \text{ Din diferența celor d'intăi să se scadă diferența celor din urmă.} \end{array}$$

9. Din $7x^m - 3x^{m-1} + 2x^{m-2} + 5x^{m-3}$
să se scadă $-8x^m + 2x^{m-1} - 3x^{m-2} + 4x^{m-3}$

$$\begin{array}{ll} 10. \quad 1^0 & \frac{1}{3}x^3y + \frac{2}{5}x^2y^2 - \frac{3}{4}xy^3 \qquad 2^0 \quad \frac{1}{5}a^2 - 2a^2b + \frac{3}{7}b^2 \\ & \mp \frac{2}{7}x^3y \mp \frac{3}{8}x^2y^2 \mp \frac{1}{6}xy^3 \qquad \pm 3a^2 \mp \frac{2}{9}a^2b \pm \frac{1}{6}b^2 \\ R.: & \frac{13}{21}x^3y + \frac{31}{40}x^2y^2 - \frac{7}{12}xy^3 \qquad \qquad \qquad - \frac{14}{5}a^2 - \frac{16}{9}a^2b + \frac{11}{42}b^2 \end{array}$$

II. Verificați aceste rezultate adunând restul cu scăzătorul.

INTREBUINTAREA PARANTEZELOR.

- Să se scrie 1^0 a micșurat cu suma numerilor b și c , 2^0 a micșurat cu diferența lor.
 - Să se scadă din a 1^0 diferența numerilor b și c la care se adună d ; 2^0 suma numerilor b și c din care se scade d .
 - Ce deosebire e între expresiunile $a - b + c$ și $a - (b + c)$?
 - Să se scoată cantitățile din paranteze și să se opereze reducerile:
- | | |
|---|---|
| 1^0 $(a + b) - (a - b + c) + c$ | 2^0 $a^3 - (a^2b - ab^2) + (2a^2b - 2ab^2)$ |
| 3^0 $a^2 - [b^2 - (c^2 - d^2) + a^2]$ | 4^0 $(a^2b - ab^2) - [-a^2b - (ab^2 + c)]$ |
| 5^0 $(a + 2\sqrt{b}) - (-a + 2\sqrt{b})$ | 6^0 $(a + \sqrt{c^3}) - (a - \sqrt{c^3} + 2\sqrt{a})$ |
| 1^0 $(a + b + c) - (a - b + c) + (a + b - c) - (a - b - c)$ | |
| 2^0 $a + [(b - c) - (b - a)] - [-(a + b + c)] - b$ | $R.: 3a$ |
| 3^0 $[(a + b - c + d) - (-c + d + b) - a + b] - [-a - (b + c) + d]$ | |
- Ce devine expresiunea $a - (b - c)$ când înlocuim a prin $m - (-n + p)$, c prin $m - p$? (Făcând reducerile aflăm: m).
 - Verificați identitatea

$$23x - [32y - (5z - 8x + 13y) + 12x] + [-8z - (3y + 2x) + (3z - x)] = -22y$$

- Un băiat care avea x lei cumpără cu y lei cărți și cu z lei



216315

o geantă. Căt i'a mai rămas?

8. O persoană are numerar 25000 de lei și e dator 12000 din care plătește o dată 3000 și altă dată 4000. Care este averea lui?

9. Am luat la mine a treia parte din banii ce am avut acasă și cheltuind a lei mi'a mai rămas o sumă b. 1º Căt am luat la mine? 2º Căt mi'a mai rămas acasă? 3º Căt mi'a ramas cu totul? [R.: 1º a+b; 2º 2(a+b); 3º 2a+3b].

10. Trei jucători se pun la joc, cel d'intăi cu a lei, al doilea cu b lei și al treilea cu c lei; ei convin ca cel ce perde să dubleze banii celor-l-alți doi. Fie-care perde, pe rând, căte o partidă; cu căt s'au sculat ei de la joc? [R.: 1º 4a-4b-4c; 2º 6b-2a-2c; 3º 7c-a-b].

11. Suma unghiurilor dintr'un triunghi fiind de 180º să se esprime valoarea unghiului O știind că unghiul A este este cu t grade mai mare ca B care valorează n grade; 2º să se calculeze pentru n=50º și t=12º; 3º ce devine triunghiul când A=B=45º? [R.: 1º 180º-(2n+t); 2º 68º; 3º Triunghiul devine dreptunghic în C].

ÎNMULTIREA.

1. Ce e înmulțirea algebrică? Enunțați proprietățile de la înmulțire.

2. Productul și suma a două cantități e negativă; cum sunt acele cantități și care din ele e mai mare în valoare absolută? dar dacă suma e pozitivă?

3. Un fumător cheltuiește zilnic o sumă a; cătă economie ar avea în n ani dacă n'ar mai fuma?

4. Să se săvârșească înmulțirile următoare:

$$1^0 \quad 3a \times 2b \qquad 5^0 \quad (x-a)(x-b) \qquad 8^0 \quad 0,2a^4x \times 0,33a^3x^2$$

$$2^0 \quad 5a^2 \times 4ab^2 \qquad 6^0 \quad (\frac{1}{2} + a)(\frac{1}{2} - b) \qquad 9^0 \quad 2abc \times 3abd$$

$$8^0 \quad a^m \times a^n \times a^p \qquad 7^0 \quad (2x-1)(x+\frac{1}{3}) \qquad 10^0 \quad 2a^mb^n \times 7b^nc^p$$

$$4^0 \quad 4a^2 \times 3abc \qquad 11^0 \quad 7a^5b^2c \times 3a^2d$$

$$1^0 \quad \frac{2}{3}a^2b \times \frac{3}{2}ab^2$$

$$5^0 \quad \frac{3}{4}ab^m \times \frac{2}{5}a^nb^{p-m}$$

$$2^0 \quad 3a^mb^n \times 5a^mb^{n-2}$$

$$6^0 \quad (8a^3 - 2b^2 - c^3) \times 3a^{m-1}b^n c^{p+1}$$

$$3^0 \quad 4c^{n-1}dx^4 \times 3c^{n-1}d^{m-1}$$

$$7^0 \quad 3\frac{1}{5}a^2b^3c \times 0,457ab^2$$

$$4^0 \quad \frac{2}{9}b^{x+y} \times \frac{5}{8}b^{x-y}$$

$$1^0 \quad 4\frac{5}{7}p^{m-n}q^{r-s} \times \frac{1}{3}p^{m+2n}q^{t+s}$$

$$2^0 \cdot \left(\frac{3}{4}a^2b - \frac{2}{3}ab^2 + \frac{3}{5}a^2b^2 \right) \frac{7}{8}a^2b^3c$$

$$3^0 \quad (a^5 + 2a^4 - 3a^3 + 7a^2)(a - 1)$$

$$4^0 \quad (2a - 5b^2 + 3d + 2c)(3a^2 + 2d + 8f)$$

$$1^0 \quad (3a^{m-1} - 5a^{m-2} + 2a^{m-3}) \times \frac{1}{2}a^{m-1}b^n$$

$$2^0 \quad (2a^2 - 4a^3b^2 + 2a^4b - c^3)(a - b)$$

$$3^0 \quad \left(\frac{x^2}{4} - \frac{2x}{7} + \frac{6x^3}{5} \right) \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{3x}{5} - \frac{2x^3}{7} \right)$$

$$4^0 \quad (0,35a^4 + \frac{2}{7}a^3 - \frac{3}{5}a^2 - 0,17a)(\frac{2}{9}a^2 - 3,57a)$$

$$1^0 \quad (x+a)(x+b)(x+c)$$

$$2^0 \quad (x+a)(x-b)(x+c)$$

$$5^0 \quad (x^2+y)(x^2-y)(x^2-y^2)$$

$$7^0 \quad (x^5 - x^3 + x - 1)(x^4 + x^2 - 1)$$

$$8^0 \quad [(a+b) - (a-b)]ax[(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)]by$$

$$1^0 \quad (x^2 + ax + a^2)(x^2 - ax + a^2)(x - a)(x + a)$$

$$2^0 \quad (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8)(1 - 2x - 3x^3 + 5x^5 - 2x^7)$$

$$3^0 \quad (5xy^4 - 8x^2y^3 + 2x^3y^2 - 7x^4y + x^5)(-3xy^4 - 2x^3y^4 + 7x^4y - 9x^5)$$

$$4^0 \quad \left(\frac{4a^2b^3}{5} + \frac{3b^3}{7} - \frac{2a^3b}{3} + \frac{5a^4}{8} \right) \left(\frac{2a^3}{3} - \frac{5a^2b^2}{9} + \frac{7ab^3}{6} \right)$$

5. Căți termeni poate avea produsul unui polinom de m termeni cu un alt polinom de n termeni?

6. Să se afle, fără a săvârși înmulțirea, primul și ultimul termen al produsului $(3x^3 - 8x^2 + 2xy - 5x)(2x^4 + 7x^3 - 9xy)$.

7. Să se înlocuească expresiunile următoare cu altele echivalente:

$$1^0 \quad m^2 - n^2 \qquad 2^0 \quad m^3 + n^3 \qquad 3^0 \quad m^3 - n^3$$

$$4^0 \quad a^4 - b^4 \qquad 5^0 \quad x^2 - 16 \qquad 6^0 \quad x^2 - \frac{1}{9}$$

$$7^0 \quad a^8 - b^8 \qquad 8^0 \quad (a+b)^2 - c^2 \qquad 9^0 \quad (a+c)^2 - (a-c)^2 \quad R.: 4ac$$

$$10^0 \quad \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \qquad R.: ab$$

8. Să se săvârșească operațiunile arătate:

$$1^0 \quad (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) - (a + b)(a - b)$$

$$2^0 \quad (2x^3 - 3x^2y + 5xy^2)xy - [6a - (2b - 3c)]$$

$$3^0 \quad (a + b)(b + c) - (a - b)(b - c) + (a - c)(b + d)$$

$$4^0 \quad [(a - b)x^2 - (a + b)x + (a - b)](ax + b)$$

$$5^0 \quad (2a - 5b)(3a + 7b) - [(8a - 6b)(2a + 3b) - (3a + 4b)(6a - 7b)]$$

$$6^0 \quad [(a^2 + b^2) + x^2 + (a + b)x][(a^2 - b^2) - (a + b)x - x^2]$$

9. Să se simplifice expresiunea

$$\frac{a(a+b)(a+2b)}{3} - \frac{a(a+b)(2a+b)}{6} \qquad R.: \frac{ab(a+b)}{2}$$

10. Să se verifice identitățile

$$1^0 \quad x^2 + 1 = (x + \sqrt{-1})(x - \sqrt{-1})$$

$$2^0 \quad x^4 + 1 = (x^2 + 1 + x\sqrt{2})(x^2 + 1 - x\sqrt{2})$$

$$3^0 \quad x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + 1 + x\sqrt{3})(x^2 + 1 - x\sqrt{3})$$

$$4^0 \quad x^8 + 1 = (x^4 + 1 + x^2\sqrt{-1})(x^4 + 1 - x^2\sqrt{-1})$$

Se va baza pe proprietatea: „două operațiuni de sens contrar cu cantități egale se nimicesc”; astfel

$$(+x\sqrt{2})(-x\sqrt{2}) = -x^2(\sqrt{2})^2 = -x^2 \cdot 2 = -2x^2$$

NOTĂ.— A verifica o identitate va să zică a săvârși toate operațiunile arătate prin semne în unul din membri și a merge cu calculul până când dăm peste cel-alt membru.

11. Să se exprime algebricește triplul vîrstei unei persoane acum 5 ani, x fiind vîrsta actuală.

12. Suprafața unui triunghi fiind egală cu produsul celor două dimensiuni a și b, să se exprime suprafața dreptunghiului căruia dimensiuni sunt $(a+c)$ și $(b-c)$.

13. Să se afle volumul unui con cunoscând raza bazei sale R și înălțimea h.

RIDICAREA LA PUTERI.

1. Ce înțelegem prin puterea unei cantități?

2. Cum se ridică un monom la o putere?

3. Un patrat poate fi în sine însuși negativ? prin urmare cum putem reprezenta o cantitate esențialmente pozitivă?

4. Să se ridice la puterea arătată monomii

$$(-a)^m ; \quad 1^0 \text{ când } m \text{ e nepereche} \quad 2^0 \text{ când } m \text{ e pereche}$$

$$-(-a)^5 ; \quad -(-a)^8 ; \quad (a^2)^3 ; \quad -(a^m)^3 ; \quad (-a^m)^2 ; \quad -(-a^2)^4$$

$$-(-a^3)^3 ; \quad (5xy)^3 ; \quad (-8x^2y)^2 ; \quad (a^{m-2})^3 ; \quad -(-a^{m-n})^{m+n}$$

5. Cu ce este egal patratul unei sume? dar patratul unei diferențe?

6. Să se ridice la patrat binomii

$$5x+3y ; \quad 5x-3y ; \quad 2x^2+1 ; \quad 1-3y^3 ; \quad m^5-n^3$$

7. Să se calculeze diferența patratelor lui $a+1$ și a ; 2^0 a și $a-1$; 3^0 a^2+1 și a^2-1 .

8. Cu ce este egal cubul unei sume? dar cubul unei diferențe?

9. Să se ridice la cub binomii de mai sus.

10. Să se calculeze expresiunile

$$(a-b)^2 + (b+c)^2 - (c-a)^2 ; \quad m(m-1)^2(m+1)^2 - m(m-1)^2$$

$(1+2a-3b)^2 - (1-2a+3b)^2$ [punând-o sub formă de sumă și diferență găsim: $8a-12b$].

$$(a+b)^3 - (a-b)^3 - 6a^2b$$

$$R = 2b^3$$

$$(a+2b)^2 - 2(a+b)^2 + a^2 ; \quad (a+3b)^3 - 3(a+2b)^2 + 3(a+b)^3 - a^3$$

11. Să se demonstre că $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ și $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

12. Să se calculeze puterea a 4-a a unui binom. [observând că $(a \pm b)^4$ se poate pune sub forma $[(a \pm b)^2]^2$ și calculând găsim

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

13. Să se verifice identitățile:

$$1^0 \quad (a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$$

$$2^0 \quad (a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b(3a^2 + b^2)$$

$$3^0 \quad \frac{(a+b-c)^2}{2} + \frac{(a-b+c)^2}{2} = a^2 + (b-c)^2$$

$$4^0 \quad (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = \\ = 4(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) - (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$5^0 \quad (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = \\ = 2[(a^2 - b^2)^2 + (a^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2]$$

14. Să se săvârșească calculele arătate în expresiunea

$$(a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (a+c-b)^3 - (b+c-a)^3$$

și să se verifice rezultatul făcând $a=5$, $b=2$, $c=7$.

15. Să se adune binomilor următori căte un termen astfel pentru a căpăta niște trinomi patrați perfecti:

$$25x^2 + 10x ; \quad 9x^2 - 6x ; \quad 4x^2 + 12xy ; \quad 64y^2 - 16xy \\ 81x^2 + 9y^2 ; \quad 49x^2 - 144y^2 ; \quad 36a^2b^2c^2 - d^2 ; \quad 9x^4 + 81y^4$$

IMPARTIREA.

1. Cunoscând un product de doi factori și unul din ei, cum aflăm pe cel-alt factor?

2. Cum se împart doi monomi?

3. Să se formeze cîntul monomilor:

$$25a^2b : 5ab ; \quad 81m^2np^3 : 3mp^2 ; \quad 165x^2y^2z : 15x^2$$

$$31a^2x : 14a^2 ; \quad 12m^2n : m^2n ; \quad 28a^2b^3c : 7ab^3$$

$$107a^2b : 9ab^2 ; \quad \frac{2}{11}x^2y : \frac{7}{9}x ; \quad \frac{17}{23}p^2q : \frac{14}{51}pq^2t$$

$$7a^{-x}b^{y+1}c : 6a^{x+2}b^{1-y}d^7 ; \quad 11a^2(1-b^2)^3 : -8a^3(b^2-1)^2$$

4. Să se formeze productul monomilor:

$$7p^{-3}q^5r \times 8p^2q^{-3}t ; \quad \frac{8}{3}a^{-7}b^{-2} \times \frac{3}{8}a^{-3}b^3c^{-1}$$

5. Să se formeze cîntul monomilor

$$\frac{3}{4}a^{m-2}b^{n+3}c^{p+1} : 2\frac{2}{3}a^{2m-5}b^{n-1}c^{p+3} ; \quad -\frac{3}{7}x^3y^{m+n} : \frac{2}{5}x^ny^{m-n}z^5$$

6. Să se săvârșească împărțirea și să se simplifice cîntul

ESTRAGEREA DE RĂDĂCINI.

1. Cum se estrage rădăcina dintr'un monom? în ce cazuri nu'i posibilă estragerea?

2. Să se treacă sub radical factorul ce l precede simplificându-se rezultatul:

$$\begin{array}{l} \sqrt[3]{2} ; \quad \sqrt[3]{5} ; \quad \sqrt[3]{10} ; \quad a\sqrt[3]{2} ; \quad (-b)\sqrt[3]{4} ; \quad -b\sqrt[4]{6} \\ (a+b)\sqrt{\frac{1}{a^2-b^2}} ; \quad \left(\frac{m-n}{m+n}\right)\sqrt{\frac{m^2+mn}{m^2-2mn+n^2}} \end{array}$$

3. Cum se estrage rădăcina patrată dintr'un polinom?

4. Să se estragă rădăcina patrată din polinomii:

$$\begin{array}{l} a^2+a+\frac{1}{4} ; \quad 9x^2-30x+25 ; \quad 25x^2-30xy+9y^2 \\ a^2+ab+\frac{b^2}{4} ; \quad \frac{25}{9}a^2+2a+\frac{9}{25} ; \quad (x^2+1)(x^2-1)+2(1+x^2) \end{array}$$

5. Să se arăte că în cazul când triunghiul e echilateral, adică când $a=b=c$, formula

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

se reduce la

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

iar în cazul când triunghiul e dreptunghic, adică când avem d. e.

$$a^2=b^2+c^2, \text{ la } S = \frac{bc}{2}.$$

Esercitări cu expresiuni rationale fracționare.

1. Să se reducă la cea mai simplă expresiune fracțiunile:

$$\begin{array}{llll} 1. \frac{12a^2b^3c}{4ab^2} & 2. \frac{-8x^3y^2}{2xy^2} & 3. \frac{84m^2n^3p}{-36mnp} & 4. \frac{-ax+a^2x^2}{-ay-a^2y^2} ; \\ 5. \frac{a^2-b^2}{2(a+b)} & 6. \frac{a^4-b^4}{4(a+b)^2} & 7. \frac{a^2+2ab+b^2}{3(a+b)} & 8. \frac{a^2-2ab+b^2}{7(a-b)} \\ 9. \frac{x^2+2ax+a^2}{5ax+5a^2} & 10. \frac{m^2+2mn+n^2}{m^2-n^2} & 11. \frac{3ax^3+3a^3x-6a^2x^2}{ax^3-a^3x} & \\ 2. \frac{a^2-2a+1}{a-1} & 13. \frac{a-b}{a^2-b^2} & 14. \frac{3x+1}{9x^2-1} & 15. \frac{x^2-1}{ax+a} \quad 16. \frac{a^2x^2-a^4}{x+a} \\ 17. \frac{x^3+y^3}{3(x+y)^2} & 18. \frac{a^3-2a^2}{a^2-4a+4} & & \text{R.: } \frac{a^2}{a-2} \\ 19. \frac{x^3-x}{(1+ax)^2-(x+a)^2} & \text{R.: } \frac{x}{a^2-1} & 20. \frac{(x^5+1)-(x^3+1)}{x^2-1} & \text{R.: } x^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 21. \frac{a^3+b^3}{(a-b)^2+ab} & 22. \frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac} & 23. \frac{2a^2-ab-3b^2}{2a^2-5ab+3b^2} \\
 24. \frac{a^2-ab+bc-ac}{a^2-ac} & R.: \frac{a-b}{a} & 25. \frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2} R.: \frac{1}{1-x^2} \\
 26. \frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)} & R.: \frac{ax+by}{ax-by} & 27. \frac{a^2-4b^2}{2a+4b} \\
 28. \frac{(x+y)^4-x^4-y^4}{(x+y)^3-x^3-y^3} & 29. \frac{4(a+b)}{c+5d} \left(\frac{c+d}{4} - \frac{c-d}{6} \right) & R.: \frac{a+b}{3} \\
 a - \frac{ac(1-b)}{c+a^2b} & & \\
 30. \frac{\frac{x}{x-a}-\frac{a}{x+a}}{\frac{x}{x+a}+\frac{a}{x-a}} & R.: ab & R.: 1
 \end{array}$$

2. Să se transforme întregii în fracții și apoi să se simplifice:

$$\begin{array}{llll}
 1. a + \frac{1}{a} & 2. 1 + \frac{x}{1-x} & 3. m + \frac{m-n}{n} & 4. 2 + \frac{2}{x^2-1} \\
 5. \frac{a+b+c}{a+c}-1 & 6. a^2-ax+x^2+\frac{x^3}{a+x} & R.: \frac{a^3+2x^3}{a+x} & \\
 7. a-b-\frac{a-b-c}{2} & 8. a+x+\frac{a^2+x^2}{a-x} & 9. 3a-\left(\frac{2a-b}{2}\right) & \\
 10. 1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} & R.: \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc} & & \\
 11. a^2-2a+1+\frac{a^4-1}{a^2+2a+1} & 12. a + \frac{1}{b-\frac{1}{a}} & R.: \frac{a^2b}{ab-1} & \\
 13. a - \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} & R.: \frac{a^2}{a+b} & &
 \end{array}$$

3. Să se reducă la același numitor fracțiunile;

$$\begin{array}{lll}
 1^o. \frac{2a}{3b}, \frac{3c}{4b}, \frac{4a}{5c} & 2^o. \frac{7a}{8x^2}, \frac{5b}{12y^2}, \frac{3ab}{16xy}, \frac{2a^2b^2}{3x^2y^2} \\
 3^o. \frac{a^2}{a+b}, \frac{ab}{a-b}, \frac{2a-3b}{a^2-b^2} & R.: \frac{a^3-a^2b}{a^2-b^2}, \frac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2}, \frac{2a-3b}{a^2-b^2} \\
 4^o. \frac{m+n}{m-n}, \frac{m-n}{m+n}, \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}, \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}
 \end{array}$$

4. Dacă am aduna o aceeași cantitate m la ambii termeni ai unei fracțiuni, se schimbă valoarea sa? dar dacă am scădea o

aceeași cantitate?

5. Să se săvârșească operațiunile arătate și să se simplifice

$$\begin{array}{lll}
 1. \frac{4}{a} + \frac{5}{a} + \frac{6a}{a} + \frac{a^2}{a} & 2. \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} & 3. \frac{a+b}{a} - \frac{a-b}{a}
 \end{array}$$

$$4. \frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-a}$$

R: $a+b$

$$6. \frac{a+b}{2a} + \frac{a-b}{3a}$$

7. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d}$ 8. $a + \frac{1}{1+a} + \frac{1+a^2}{1-a}$

$$9. \frac{ab}{a-b} + \frac{bc}{b-c} + \frac{ca}{c-a}$$

10. $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} + \frac{2x^2}{x^2-1}$

$$11. \frac{1+2x}{1-2x} + \frac{1-2x}{1+2x}$$

12. $\frac{b}{a+b} - \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{a^3}{(a+b)^3}$

$$13. \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

14. $\frac{a}{x(a-x)} + \frac{x}{a(a-x)} + \frac{ax}{(a-x)^2}$

$$15. \frac{a}{a+z} + \frac{z}{a-z}$$

16. $\frac{1}{x+2} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3}$

$$17. \frac{ax}{x^2-a^2} + \frac{x-a}{a+x} + \frac{3ax-a^2-x^2}{x^2-a^2}$$

18. $\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1} + \frac{2x^2}{x^2-1}$

$$19. \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} - \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

20. $\frac{3x^2-x+12}{x^2-9} - \frac{x+2}{x+3} - \frac{x+3}{x-3}$

$$21. \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

R.: $a+b+c$

$$22. \frac{ab-4b^2-13a^2}{3(a^2-b^2)} + \frac{2a-b}{a+b} + \frac{8a}{3(a-b)}$$

R.: $\frac{1}{3}$

$$23. \frac{x+c}{x^2-(a+b)x+ab} + \frac{x+b}{x^2-(a+c)x+ac} + \frac{x+a}{x^2-(b+c)x+bc}$$

$$24. \frac{x^4-2x^2-3}{15x^6-17x^2+25x^4-18} - \frac{x^2-4x+1}{12x^4-x^2-6}$$

$$25. \frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)} +$$

$$+ \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

R.: $a+b+c+d$

Inmulțirea și ridicarea la puteri.

$$1. 2ab \cdot \frac{3cd}{2ab}$$

$$2. 3a^2 \cdot \frac{2b}{a^2}$$

$$3. \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$$

$$4. \frac{2}{b} \cdot ab$$

$$5. (a^2-b^2) \cdot \frac{5a}{7(a+b)}$$

$$6. (x+y)^3 \cdot \frac{3x}{x+y}$$

$$7. \frac{3a}{2b} \cdot \left(-\frac{5b}{9a^2}\right)$$

$$8. \frac{(x-1)^2}{y^2} \cdot \frac{(x+1)y^2}{(x-1)^3}$$

$$9. \frac{(a-b)^2}{a+b} \cdot \frac{b}{a(a-b)}$$

$$10. \frac{x(a+x)}{x^2-2ax+a^2} \cdot \frac{x(a-x)}{x^2+2ax+a^2}$$

$$11. (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$12. (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad 13. \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \quad 14. \left(-\frac{3a}{4b} \right)^3$$

$$15. \frac{2(a^2b)^2}{3(a^2b^2)^3} \quad 16. \frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} \quad 17. \frac{a+b}{3} \cdot \frac{2}{a+b}$$

$$18. \frac{(a-b)^2}{a+b} \cdot \frac{b}{a(a-b)} \quad 19. \frac{x(a-x)}{a^2+2ax+x^2} \cdot \frac{a(a+x)}{a^2-2ax+x^2}$$

$$20. \frac{2b}{a-b} \cdot \frac{a^2-b^2}{5a} \quad 21. \frac{a^3+(a+1)ax+x^2}{(a^2+x)(a^2-x)} \cdot \frac{(a^2-x)x}{a+x} \quad R.: x$$

$$22. \left(1 - \frac{a-b}{a+b} \right) \left(2 + \frac{2b}{a-b} \right) \quad 23. \frac{x(a-x)}{a^2+x(2a+x)} \cdot \frac{a(a+x)}{a(a-2x)+x^2}$$

$$R.: \frac{ax}{a^2-x^2}$$

$$24. \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)^2 \quad 25. \frac{6ad}{3c-d} \left(\frac{c+d}{4} - \frac{d}{3} \right)$$

$$26. \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2} \right) \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \quad 27. \left(\frac{2a}{3b} - \frac{3c}{4d} \right) \left(\frac{5d}{4c} - \frac{2b}{a} \right)$$

$$28. \frac{a^4-x^4}{a^2-x(2a-x)} \cdot \frac{a-x}{a^2+ax} \quad R.: \frac{a^2+x^2}{a}$$

Impărțirea și estragerea de rădăcini.

$$1. a : \frac{a}{b} \quad 2. \frac{a}{b} : a \quad 3. \frac{9a}{b} : 3 \quad 4. \frac{3a}{2b} : \frac{5b}{6a}$$

$$5. \frac{3a^3b}{5ab^2} : \frac{5a^4b}{4ab^2} \quad 6. a : \frac{1}{b} \quad 7. \frac{1}{b} : a \quad 8. 1 : \frac{x}{y}$$

$$9. mnp : \frac{mp}{nq} \quad 10. \frac{a}{b} : \frac{c}{b} \quad 11. \frac{a+b}{a-b} : \frac{b+a}{b-a}$$

$$12. \frac{ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} : \frac{b^2}{a^2-b^2} \quad 13. \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} : \frac{2a^2+2b^2}{a+b}$$

$$14. \frac{m}{n} : x \quad 15. -\frac{a}{bc} : -\frac{c}{d} \quad 16. (x+y) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$17. \left(a - \frac{a-b}{1+ab} \right) : \left(1 + \frac{a(a-b)}{1+ab} \right) \quad 18. \left(1 + \frac{1}{x} \right) : \left(1 - \frac{1}{x} \right) \quad R.: \frac{x+1}{x-1}$$

$$19. (x+y+z) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad 20. \left(a^2+1+\frac{1}{a^2} \right) : \left(a-1+\frac{1}{a} \right)$$

$$21. \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} : \frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{a^4-2a^2b^2+b^4} \quad 22. \left(1 + \frac{1}{x} \right) : \left(x - \frac{1}{x} \right) \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2$$

$$23. \left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} \right) : \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right)$$

$$24. \left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} \right) : \left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \right)$$

Cum se estrage rădăcina dintr'o fracție?

Să se estragă rădăcina patrată din fracțiunile următoare simplificându-se rezultatul*)

$$\frac{4a^2}{9b^2}; \quad \frac{2x^4}{16}; \quad \frac{b^2-4ac}{4a^2}; \quad \frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}; \quad \frac{(a+b)^4}{a^4-b^4}$$

Eserciții cu expresiuni iraționale.

1. Ce numim radicali simili?

2. Să se reducă la același indice radicalii:

$$1^0 \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[2]{a}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[6]{c}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[4]{y}, \sqrt[4]{\sqrt{x^7}}, \sqrt[8]{y^3}, \sqrt[9]{z^5}$$

$$5^0 \sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}, \sqrt[5]{\frac{x^2}{y}}, \sqrt[3]{\frac{x^3}{y^4}}, 6^0 \sqrt{\frac{1}{a-x}}, \sqrt{\frac{2}{a-x}}, \sqrt{\frac{3}{a-x}}$$

3. Să se calculeze expresiunile următoare:

$$1. 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \quad 2. \sqrt[3]{49} + 2\sqrt[3]{49} + 5\sqrt[3]{49} \quad 3. 3\sqrt{2} + 5\sqrt{16} + 3\sqrt{64}$$

$$4. 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \quad 5. 4\sqrt[3]{60} - 2\sqrt[3]{60} \quad 6. \sqrt{9} - \sqrt{4} \quad 7. \sqrt{5} - \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$8. \sqrt{\frac{a-b}{c^2}} + \sqrt{\frac{a-1}{b^2} - \frac{1}{b}} \quad 9. \frac{a}{a-\sqrt{a}} - \frac{a}{a+\sqrt{a}} \quad \text{R.: } \frac{2\sqrt{a}}{a-1}$$

$$10. \sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \quad 11. 3\sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt{y^2} \quad 12. 2\sqrt[3]{a+b} \cdot 3\sqrt[3]{a-b}$$

$$13. \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} \quad 14. (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) \quad 15. (-a + b\sqrt{c})(a - b\sqrt{c})$$

$$16. (-a - \sqrt{b^2c^4})(-a + \sqrt{b^2c^4}) \quad 17. 5\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 3\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$18. (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \quad 19. (\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})$$

$$20. (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{c} - \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a})$$

$$21. (\sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{3}) \quad 22. (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})$$

$$23. \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) \quad 24. (\sqrt{a^3})^2 \quad 25. (\sqrt[3]{b^2})^3$$

$$26. (\sqrt{m^2})^3 \quad 27. (\sqrt[4]{z})^2 \quad 28. (\sqrt[6]{(a^2 + b^2)^4})^3 \quad \text{R.: } (a^2 + b^2)^2$$

*) În Algebră toate rezultatele calculelor trebuie să fie cât se poate de simplificate, în cât să nu mai conțină nici o operație care să poată fi săvârșită.

$$29. (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \quad 30. (\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 \quad 31. (\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$$

$$32. (m-n+p\sqrt{-1})^2 \quad 33. \sqrt{32} : \sqrt{8} \quad 34. \sqrt{32} : \sqrt{2}$$

$$35. \sqrt[3]{32} : \sqrt[3]{4} \quad 36. \sqrt[3]{15} : \sqrt[3]{5} \quad 37. \sqrt[3]{60} : \sqrt[3]{15}$$

$$38. \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{3}{4}} \quad 39. \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{5}{6}} \quad 40. \sqrt{\frac{2}{9}} : \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$41. \sqrt{\frac{1}{6}} : \sqrt{\frac{3}{2}} \quad 42. (2-\sqrt{2}) : (2+\sqrt{2}) \quad 43. (a-\sqrt{ab}) : (\sqrt{ab}-b)$$

$$44. (\sqrt{a+b}+c)(\sqrt{a+b}-c) \quad 45. \sqrt{a^2+2ab+b^2} + \sqrt{a^2-2ab+b^2}$$

$$46. \sqrt{24} + 2\sqrt{6} - \sqrt{2} + 3\sqrt{18} \quad 47. \frac{1}{a+\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{1}{a-\sqrt{a^2-x^2}} \text{ R.: } \frac{2a}{x^2}$$

$$48. \frac{1}{a-b\sqrt{c}} - \frac{1}{a+b\sqrt{c}} \quad 49. \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}$$

$$50. \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} - \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} \quad 51. \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right)^2$$

$$52. \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right)^2 \quad 53. \sqrt{\frac{x+a}{x-a}} : \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$$

4. Să se transforme fracțiunile următoare în altele echivalente însă cu numitori raționali.

$$1. \frac{3}{\sqrt{3}} \quad 2. \frac{21}{3\sqrt{7}} \quad 3. \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad 4. \frac{a-\sqrt{b}}{\sqrt{c}} \quad 5. \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \quad 6. \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$7. \frac{1-3\sqrt{5}}{1+2\sqrt{3}} \quad 8. \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} \quad 9. \frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}} \quad 10. \frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}$$

$$11. \frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad 12. \frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}} \quad 13. \frac{m}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}} \quad 14. \frac{m}{\sqrt[4]{a}-\sqrt{b}}$$

$$15. \frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2}}{a^2+2-2\sqrt{1-a^4}} \quad 16. \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}$$

Ecuații de gradul întâi.

Ce deosebire e între o identitate și o ecuație?

Principiul fundamental relativ la identități se aplică și ecuațiilor?

Ce restricții sunt de făcut în cazul când înmulțim sau împărțim ambeii membri ai unei ecuații cu o aceeași cantitate?

Cu toate că am insistat mult asupra acestui punct în curs, totuși dau aci un

esemplu care ne arată că mănuind calculul fără nici o precauție, putem fi conduși la absurdități.

Fie a și b două numere oare-care a căror diferență e c ($c \neq 0$). Reprezentând aceasta înscris, avem

$$a - b = c$$

Inmulțind ambii membri ai acestei egalități cu $(a - b)$, care nu e nul, avem

$$a^2 - zab + b^2 = ca - cb$$

și scotând în factor comun pe a în membrul sănătă și pe b în membrul al doilea, ceia-ce nu schimbă întru nimic valoarea egalităței căci a și b sunt diferenții de zero, vom avea

$$a(a - b - c) = b(a - b - c)$$

Dacă am face acum gresala de a împărți prin $(a - b - c)$ care e nul, căci

$$a - b - c \text{ și prin urmare } a - b - c = 0, \text{ am deduce}$$

$$a = b$$

ceia-ce e imposibil căci $a - b \neq 0$.

ECUAȚIUNI CU O NECUNOSCUTĂ.

Să se rezolvească ecuațiunile numerice :

1. $45 - x = 38$
2. $4x - 5 = 7$
3. $5x + 3 = 18$
4. $27 - 3y = 6$
5. $19x - 14 = 12x$
6. $8x + 3 = 4x + 15 - 2x$
7. $38 - 2y = 9y - 39$
8. $12x + 4 = 16x - 4$
9. $12x - 8 = 3x + 28$
10. $21x - 42 + 5x - 15 = 11 - 68 + 42$
11. $127 - 7x - 4x = 115 - 8x + 9x$
12. $8x + 18 + 14x - 9 - 5x - 23 - 3x = 0$
13. $3(x - 2) = 5$
14. $7(y + 4) = 18$
15. $5(15 - x) = 15$
16. $\frac{x}{2} + \frac{5}{3} = \frac{3x - 2}{6}$
17. $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 5x - 282 - \frac{x}{2}$
18. $\frac{2x}{3} - 82 - \frac{8x}{6} = -74 - \frac{6x}{5}$
19. $\frac{4x - 2}{3(1+x)} = \frac{10}{9}$
20. $\frac{y}{2} + \frac{y}{3} - \frac{y}{4} = 7$
21. $\frac{-z}{5} - \frac{z}{2} + \frac{3z}{7} = 9$
22. $\frac{z}{2} - \frac{z}{3} - \frac{z}{4} = 11 - z$
23. $\frac{7x}{18} - \frac{5x}{12} + \frac{5x}{6} - 6 = \frac{4x}{15} - \frac{11}{18}$
24. $\frac{x-3}{4x+2} = \frac{6}{38}$
25. $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} = x - 1$
26. $\frac{x-2}{3x-5} = \frac{10}{31}$
27. $10 - \frac{2x}{3} + \frac{5x}{4} = 4x - \frac{1}{4}$
28. $\frac{7(x-3)}{4(4x+2)} = \frac{7}{44}$
29. $\frac{4x-3}{5} = \frac{5x-2}{3} - 6$
30. $\frac{25}{x+3} = \frac{10}{3x-4}$
31. $\frac{x+1}{4} + \frac{x-1}{6} = 8$
32. $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} = 16 - \frac{x-6}{4}$

$$33. \frac{2x}{7} - 1 = \frac{3x}{8} + \frac{1}{21} - \frac{31}{28} \quad 34. \frac{1}{2} - 2x = 3x - \frac{3}{4} + \frac{5x}{6}$$

$$35. \frac{x-2}{3} - \frac{12-x}{2} = \frac{5x-36}{4} - 1 \quad R.: x=8$$

$$36. \frac{3x+4}{14} + \frac{7}{15} = \frac{38-x}{10} - \frac{4x}{15} \quad R.: x=8$$

$$37. 2 + \frac{x+3}{6} = 4 - \frac{9-2x}{3} \quad 38. \frac{5x-3}{2x-3} = \frac{5x-1}{2x+3}$$

$$39. \frac{3}{z-4} + \frac{5}{2(z-4)} + \frac{18}{4(z-4)} = \frac{1}{2}$$

$$40. [6-(1-x)]x - 2 = (x+1)^2 \quad R.: x=1$$

$$41. \frac{5x-2}{3} + 2 = \frac{x-8}{4} + \frac{x+14}{2} \quad R.: x=4$$

$$42. \frac{2x+7}{6} - \frac{2(7x-1)}{3} - 13 = 20x + \frac{4x-1}{12} + \frac{5}{4} \quad R.: x = -\frac{1}{2}$$

$$43. \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-8} \quad 44. \frac{x+1}{x-2} + \frac{x+2}{x-1} = 2$$

$$45. \frac{y+2}{y-1} + \frac{y+1}{y-2} = 2 \quad R.: y = \frac{3}{2} \quad 46. \frac{z-1}{z-2} - \frac{z-2}{z-3} = \frac{z-5}{z-6} - \frac{z-6}{z-7}$$

Să se rezolveașcă ecuațiile literare:

$$1. a-x=b \quad 2. mx+n=p \quad 3. x-(a-x)=b \quad 4. ax-c=bx+d$$

$$5. ab-cx=bx-ac \quad 6. (a-x)(b+x)=a^2-x^2 \quad 7. mx-n=x$$

$$8. \frac{x}{a} - \frac{x}{b} = c \quad 9. \frac{x}{m} - \frac{a}{n} = \frac{b}{m} - \frac{x}{n} \quad R.: x = \frac{ma+nb}{m+n}$$

$$10. (a+x)(b+x) - a(b+c) = x^2 + \frac{a^2c}{b} \quad R.: x = \frac{ac}{b}$$

$$11. \frac{a-x}{b} = \frac{b-x}{a} \quad R.: x = a+b \quad 12. \frac{a}{x} + b = \frac{b}{x} + a \quad R.: x = 1$$

$$13. \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} = \frac{1}{x^2-a^2} \quad R.: x = \frac{1}{2} \quad 14. \frac{a(a+b-x)}{b-c} = \frac{bx+c(a-b)}{b+c}$$

R.: x = a + c

$$15. \frac{ax}{x-a} + \frac{bx}{x-b} = a+b \quad 16. \frac{x}{b} = \frac{h-x}{h} \quad 17. \frac{x+a}{b} - \frac{x-b}{a} = \frac{2b}{a}$$

$$18. \frac{mx}{n} - \frac{nx}{m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \quad 19. \frac{x-a}{a} + \frac{x-a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

$$20. \frac{x-a}{b} - \frac{x-b}{a} = \frac{b}{a}$$

$$21. \frac{a(a-x)}{b} - \frac{b(b+x)}{a} = x \quad R.: x=a-b$$

$$22. \frac{a}{y-a} - \frac{b}{y-b} = \frac{a-b}{(y-a)(y-b)} \quad R.: y=1$$

$$23. (x+a)(x+b) - (x-a)(x-b) = (a+b)^2 \quad R.: x = \frac{a+b}{2}$$

$$24. \frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{z}\right) + \frac{n}{m} \left(1 - \frac{n}{z}\right) = 1 \quad R.: m+n$$

$$25. \frac{a+x}{b+x} = \frac{c+x}{d+x}$$

$$26. \frac{1+ax}{1-ax} = \frac{3+a^2x^2}{1-a^2x^2} \quad R.: x = \frac{1}{a}$$

$$27. \frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{c} + \frac{x-c}{a} = \frac{x-(a+b+c)}{abc}$$

$$R.: x = \frac{a(ac+b^2-1) + b(c^2-1) - c}{a(b+c) + bc - 1}$$

Probleme dând loc la ecuațuni cu o necunoscută.

1. Să se găsească numărul al cărui product cu 24 este 384.
2. Să se afle numărul al cărui cât prin 18 este 9.
3. Să se împartă 124 în două numere care să difere de 48.
4. La care număr adunându-i 39 căpătăm întreitul lui?
5. Din indoitul unui număr scăzând 4 mai rămâne 24. Care'i acel număr?
6. Indoitul unui număr este egal cu întreitul său micșurat cu 11. Să se afle acel număr.
7. Dacă la de 5 ori un număr ii adun 6, am 66 pentru sumă. Care'i acel număr?
8. Să se împartă un număr a în 2 părți ale căror raport să fie ca m la n.
9. Să se împartă un număr a în două părți astfel ca una din ele să fie de n ori mai mare ca cealaltă.
10. Să se împartă 140 în două părți astfel ca una să fie egală cu 10 să fie cincime din cealaltă. (R.: 125 și 15).
11. Cât trebuie să se scadă din numerile 545 și 173 pentru ca numărul cel dintâi să fie de 5 ori mai mare decât cel de al doilea? (R.: 80).
12. Un profesor întrebăt de numărul elevilor săi, răspunse: la apel mi-au răspuns patru cincimi din numărul lor, 10 fiind absenți. Câți elevi are? (R.: 50).

13. Vârstă unui părinte este a și a fiului său b; la ce epocă vârsta tatălui este de m ori cât a fiului său?
14. Suma a două numere este a și câtul lor b; să se găsească aceste numere. (x fiind unul din aceste numere, cel-alt va fi $(a-x)$ căci $x+(a-x)=a$ etc.)
15. Intr'o societate de 126 de persoane erau de 2 ori mai mulți barbați de cât femei, și de 2 ori mai multe femei de cât copii. Câte persoane erau de fie-care gen? (R.: 18 c, 36 f și 72 b).
16. O garnizoană se compune din 4800 de oameni în cari sunt de 4 ori mai mulți dorobanți de cât călărași, și de 3 ori mai mulți călărași, de cât tunari. Câți oameni sunt din fie-care armă? (R.: 300 a, 900 c și 3600 d).
17. Cum se poate plăti 65 de lei cu 16 piese? (R.: 11 de 5 lei și 5 de 2 lei).
18. Să se împartă 364 de lei la două persoane, astfel ca unul să aibă atâtea piese de 5 lei cât are celalt de 2 lei (R.: 260 și 104).
19. Un antreprinor a fost angajat să construească un palat, într'un timp determinat; pentru care va primi 1000 de lei pe zi, dar i se va opri un sfert din această sumă pentru fie-care zi de întârziere. El termină lucrarea în 112 zile și primi 194000 de lei. În cât timp trebuia să termine lucrarea?
20. Un părinte murind lăsa prin testament ca suma ce o avea de 8600 de lei să fie împărțită astfel între cei 4 fi ai sei: cel mai mare să ia de 2 ori cât cel de al 3-le mai puțin 100 de lei; ca al doilea să ia de 3 ori cât al 3-le mai puțin 200 de lei; și ca al 3-le să ia de 4 ori cât al 4-le mai puțin 300 de lei. Care'i parteau fiecărui? (R.: al 4-le : 300 lei, al 3-le : 900 lei, al 2-le: 2500 lei, 1-iul : 4900 lei).
21. Doi curieri A și B care merg în aceeași direcție sunt, într'un moment dat, la o distanță d; B merge de c ori mai între ca A, se întreabă după cât drum se vor întâlni?
22. Un ogar urmărește un iepure care are 60 de sărituri înaintea lui; ogarul face 6 sărituri în timp ce iepurele face 9, dar 3 sărituri de a-le ogarului fac cât 7 de a-le epurelui. Se întreabă câte sărituri va mai face ogarul până ce va prinde iepurile? (R.: 72).
23. Un colonel voește să aranjeze regimentul său în patrat în care scop încearcă în două feluri: întâia oară ii rămâne 39 de oameni; punând apoi un om mai mult pe fie-care latură, ii lipsește 50 de oameni pentru a forma patratul. Din căți oameni se compune regimentul?

ECUAȚIUNI CU DOUĂ NECUNOSCUTE.

$$\begin{array}{llll} 1. \ x+y=a & 2. \ 2x+y=7 & 3. \ 4x+5y=22 & 4. \ x+5y=32 \\ x-y=b & 3x-y=3 & 4x-y=10 & x+y=16 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 5. \ 5x-3y=2 & 6. \ 5x+9y=188 & 7. \ 8x+3y=3 \\ 9x-5y=6 & 13x-2y=57 & 12x+9y=3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 8. \ 9x+25y=158 & 9. \ 5x-4y=-21 & 10. \ 12x-7y=-27 \\ 6x-35y=2 & 6x-5y=22 & 14x-25y+2=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 11. \ 4+7x=3y & 12. \ 31x-48y+379=0 & 13. \ ax+by=m \\ 8y=3x+89 & 72x+19y-1077=0 & cx-dy=n \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 14. \ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=5 & 14. \ \frac{x}{8}+8y=129 & 15. \ 10x-\frac{y}{2}=88 \\ 2x+3y=35 & \frac{y}{8}+8x=66 & 10y+\frac{x}{3}=43 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 16. \ \frac{x+y}{3}=\frac{x-y}{2} & 17. \ \frac{x+y}{8}+\frac{x-y}{6}=5 & 18. \ \frac{x}{4}+\frac{3y}{2}=15 \\ \frac{x}{2}=y+3 & \frac{x+y}{4}-\frac{x-y}{3}=10 & \frac{5x}{3}-\frac{y}{4}=18 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 19. \ \frac{3x}{8}-7=5y-\frac{1}{2} & 20. \ \frac{x+2y}{5}-\frac{y-2x}{3}=1 & 21. \ \frac{x}{3}+\frac{y}{5}=8 \\ 10-\frac{4x}{15}=\frac{2}{3}+6y & \frac{y+2x}{4}+\frac{x+y}{3}=2 & \frac{x}{9}-\frac{y}{10}=1 \end{array}$$

$$22. \ ax+by=a^2+b^2 \quad , \ 23. \ (x+5)(y+7)=112-(x+1)(9-y) \\ bx+ay=2ab \qquad \qquad \qquad 2x+10=3y+1$$

$$24. \ \frac{5x}{3}-\frac{y}{2}-4=\frac{3y}{4}+\frac{1}{12}+8 \quad 25. \ \begin{cases} \frac{5x-2}{4-3y}=\frac{1}{2} \\ \frac{3x+5}{y-1}=\frac{2}{3} \end{cases} \quad R.: \begin{cases} x=-\frac{35}{47} \\ y=\frac{242}{47} \end{cases}$$

$$26. \ \frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a-b} \quad 27. \ \left(x+\frac{2}{3}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)=xy-\frac{1}{4} \\ \frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a+b} \qquad \qquad \qquad \left(x-\frac{1}{6}\right)\left(y+\frac{1}{4}\right)=xy+\frac{1}{24} \quad R.: \begin{cases} x=\frac{5}{6} \\ y=\frac{3}{4} \end{cases}$$

Probleme dând loc la ecuații cu 2 necunoscute.

1. Suma a două numere este a ; iar diferența lor, b . Care sunt acele numere?

2. Suma a două numere este 21 ca și intreitul diferenței lor? Care sunt acele numere? (R.: 14 și 7).

3. Doi saci cuprind împreună 4000 de nuci. Să se afle conținutul fie-cărui știind că dacă luăm 50 de nuci din sacul său și le punem în cel de al doilea, ambii saci conțin un același număr de nuci. (R.: 2050 și 1950).

4. Doi prietenii și zic unul altuia: Dămi 1 leu ca să am tot atât ca tine.—Dămi tu 1 leu răspunse celalt, că să am de 2 ori cât tine. Căți lei aveau dânsii? (R.: 5 și 7).

5. Să se găsească două numere astfel ca cel d'intăi să mărit cu 5 să fie cât întreitul celui de al doilea, și aceasta să mărit cu 7 să fie cât jumătatea celui d'intăi. (R.: 52 și 19).

6. Două numere sunt astfel că de 3 ori cel d'intăi plus de 5 ori cel de al 2-le fac 71, însă de 5 ori cel d'intăi plus de 3 ori cel de al 2-le fac 81. Care sunt acele numere? (R.: 12 și 7).

7. Dându-se câte un măr la fiecare copil, mai rămâne un măr; dacă li s-ar fi dat câte două, ar fi rămas un copil fără de măr. Câte mere și câți copii erau? (R.: 4 m. și 3 c.).

8. Un copil întrebând pe tatăl său ce vârstă are, îi răspunse: Acum 5 ani eram de 4 ori mai mare ca tine, iar acum nu sunt de cât de 3 ori. Ce vârstă au dânsii? (R.: 45 și 15).

9. Un cârd de ciori trec pe deasupra unor pari; dacă se pune câte o cioară pe un par, mai rămân 5 ciori; dacă se pune câte două, mai rămân 5 pari. Câte ciori și câți pari sunt? (R.: 20 c. și 15 p.).

10. Să se afle două numere care să fie între ele ca 3 la 4 și a căror sumă să fie 126. (R.: 54 și 72).

11. Un măgar care se plânghea de greutatea sarcinei ce purta, zise cămilei: nu mi lipsește de cât o chintală (100 kgr.) din sarcina ta pentru că a mea să fie de două ori cât a ta; cămila îi răspunse însă: eu dacă aș lăsa o chintală din sarcina a, a mea ar fi de 3 ori cât a ta. Câte chintale purta fiecare? (R.: măgarul 2¹/₂ și cămila 2¹/₂).

12. Un podgorean are 2 cai și 2 sele din care una al costă 50 de lei și alta numai 6 lei. Dacă punea șeaua cea bună peste calul d'intăi și cea-laltă peste calul de al doilea, acesta valoarea lui 24 de lei mai puțin ca cel d'intăi; dar dacă punea șeaua cea sfînțină peste calul d'intăi și cea bună peste calul de al doilea, valoarea acestuia devine cât $\frac{15}{4}$ a aceluia d'intăi. Carei valoarea cărui cal? (R.: 210 1 și 90 1).

13. Doi jucători convin că acela ce va perde ântăia partidă dubleză banii celui-l-alt; ca acel ce va perde a doua partidă

să tripleze banii adversarului său și ca cel ce va perde a treia partidă să cadrupleze banii adversarului său; fie-care perde câte o partidă și se scoală cu 24 de lei. Cu cât s-au pus la joc? (R.: ântăiul cu 31 și al doilea cu 17).

14. Un părinte promite fiului său 30 de bani pentru fie-care temă bună, însă pentru fie-care temă rea să-i dea înapoi câte 10 bani. După această învoire, tatăl urmează să-i dea 80 de bani pentru 12 teme lucrative. Se întreabă câte din acestea au fost bune și câte rele? (R.: 5 și 7).

15. Cifra sutimilor unui număr este întreîta cifrei unităților iar cifra zecimilor îi este îndoită. Să se afle acest număr, știind că dacă scadem 396, căpătăm inversul său. (Această problemă se tratează cu o singură necunoscută. (R.: 642).

16. Adunând 2 la ambii termini ai unei fracțiuni, căpătăm $\frac{6}{5}$; iar scăzând 2 din ambii săi membri căpătăm 2. Care'i acea fracțiune? (Frațiiunea căutată se însamnă cu $\frac{x}{y}$ apoi se urmează enunțul și se găsește $\frac{4}{3}$).

17. A zice lui B: Eu am de 2 ori vârsta pe care o aveai când aveam vârsta pe care o ai, și când vei avea vârsta pe care o am, suma vârstelor noastre va 126 de ani. Se cere vârstele lor. (Diferența vârstelor lor fiind $(x-y)$, acum $(x-y)$ ani B avea $(2y-x)$ ani, peste $(x-y)$ ani A va avea $(2x-y)$ ani; urmând enunțul găsim: $x=56$ și $y=42$

ECVATIUNI CU TREI NECUNOSCUTE.

1. $x+y=7$ 2. $2x+3y=31$ 3. $7x-3y=6$ 4. $2x-3y-z=1$
 $y+z=9$ $3x-2y=1$ $2y+5z=30$ $3x+2y-2z=13$
 $z+x=8$ $4z=36$ $8z-11x=-1$ $5x-4y-2z=11$
5. $5x+2y-2z=3$ 6. $7x-5y-4z+44=0$
 $3x-4y+5z=10$ $3x-8y+2z+11=0$
 $7x-3y+6z=19$ $9x+2y-6z+23=0$
7. $x+y=a$ 8. $x+y+z=a$ 9. $x-ax+y=0$
 $y+z=b$ $by=cx$ $y-bx+z=0$
 $z+x=c$ $dz=ey$ $y+z=c$
10. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 36$ 11. $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 62$ 12. $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{2z}{7} = 58$
 $\frac{x}{15} + \frac{y}{20} + \frac{z}{9} = 10$ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 47$ $\frac{5x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 76$
 $\frac{x}{2} + \frac{y}{10} + \frac{z}{4} = 43$ $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = 38$ $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} + \frac{7z}{40} = \frac{147}{5}$

$$\begin{array}{llll}
 13. 2x-y+z=\frac{5}{12} & 14. x+\frac{z}{4}=\frac{41}{2} & 15. \frac{x+2y}{5x+6z}=\frac{7}{9} & 16. \frac{xy}{x+y}=1 \\
 3x+2y=1 & y+\frac{x}{2}=41 & \frac{3y+4z}{x+2y}=\frac{8}{7} & \frac{xz}{x+z}=2 \\
 4y-3z=0 & \frac{z}{3}+y=34 & x+y+z=126 & \frac{yz}{y+z}=3
 \end{array}$$

Probleme dând loc la ecvații cu 3 necunoscute.

- Să se determine 3 numere știind că sumele lor luate două cîte două sunt respectiv 21, 22 și 23. (R.: 10, 11 și 12).
- Cineva a cumpărat de la 3 țarani cîte o căruță cu grăne. Cea d'intăi, care conținea o baniță de grâu, 3 de secară și 2 de porumb l'a costat 23 de lei; a doua, care conținea 4 baniți de grâu, 5 de secară și 2 de porumb, l'a costat 46 de lei; a treia, care conținea tot 5 baniți de grâu, 5 de secară dar 10 de porumb la costat 75 de lei. Cu cît a cumparat baniță din fiecare? (R.: grâul 5 l., secura 4 l. și porumbul 3 l.).
- Intr'un bazen curge apă prin trei canele: cele două dintăi au împreună 165 de litruri în 3 ore; ântăia și a treia, 210 litruri în $3\frac{1}{2}$ ore, iar a doua și a treia, 260 de litruri în 4 ore. Capacitatea bazenului fiind de 9 metri cubi, în cît timp va fi plinat lăsându-se să curgă toate canelele? (Urmărind enunțul găsim $x=25$, $y=30$ și $z=35$; prin urmare cele trei canele curgând împreună dau într-o oră $26+30+35=90$ de litruri; pentru 90 de litruri trebuie să le va trebui 100 de ore).
- Să se găsească un număr de trei cifre astfel ca suma lor fie 8, cifra sutimilor se fie de două ori cît a unităților, și săzând 99 din acest număr să căpătăm inversul său (R.: 251).
- Trei femei au de vânzare 240 de ouă. Dacă cea d'intăi ar avea $\frac{1}{5}$ din oule sale celei de a doua și dacă și femeia a treia ar da tot acesteia $\frac{1}{9}$ din oule sale, fie-care ar avea un același număr de ouă. Cît are fie-care? (Prima ecuație e $x+y+z=240$; formând și pe cele-lalte după enunț și rezolvindu-le găsim: 100, 50 și 90).
- Trei zidari A, B, C vor să construească un beciu (o pivă); A și B lucrând împreună l-ar putea isprăvi în 12 zile; lui

B și C le-ar trebui 15 zile; iar lui C și A 20 de zile. În cât timp îl vor putea isprăvi lucrând fie-care singur? (R.: A în 30 de zile, B în 20, C în 60).

ESERCITII ASUPRA INEGALITATILOR.

1. Să se rezolvească inecuațiile

$$\frac{2x}{3} - 7 > \frac{5x}{6} - 9 \quad \text{R.: Toate valorile mai mari ca 12.}$$

$$x - \frac{3x}{4} + 17 < \frac{8x}{3} - x \quad \text{R.: Toate valorile mai mici ca 12.}$$

2. Să se rezolvească sistema

$$19x - 3 > 5x + \frac{1}{3} \quad \text{și} \quad 2(x - 7) < \frac{3x}{2} - 13 \quad \text{R.: 1.}$$

Să se verifice relațiunile

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \text{și} \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$$

ori-cari ar fi valorile lui a și b .

3. Care este numărul a cărui treime măsurată cu 3 este mai mare ca cincimea sa măsurată cu 5? (R.: Toate numerile mai mari ca 15).

4. Să se verifice că media aritmetică a două numere e mai mare ca media lor geometrică, adică că

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

5. Să se demonstre că dacă avem

$$\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{a''}{b''} \quad \text{avem de asemenea}$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a+a'+a''}{b+b'+b''} < \frac{a''}{b''}$$

și să se enunțeze această proprietate.

Ecuăriuni de gradul al doilea.

ECUAȚIUNI CU O NECUNOSCUTĂ.

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|------------------------------|
| 1. $x^2 - 5 = 11$ | 2. $4 - x^2 = 0$ | 3. $x^2 + 16 = 2x^2$ |
| 4. $x^2 - \frac{1}{9} = 0$ | 5. $\frac{1}{4} - x^2 = \frac{3}{16}$ | 6. $3y^2 = 75$ |
| 8. $3 - x^2 = 19 - 5x^2$ | | 9. $8y^2 - 34 = 101 - 7y^2$ |
| 10. $3(2z-3)^2 = 279 - z^2$ | 11. $x^2 - 4x = 0$ | 12. $5x^2 = 3x$ |
| 13. $7x^2 + 5x = 0$ | 14. $(z-5)^2 = 0$ | 15. $x + \frac{1}{6x-1} = 1$ |

16. $\frac{2}{x+3} - \frac{2}{x-3} = -\frac{3}{4}$ 17. $\frac{3x-1}{x-3} = \frac{17-x}{x-5}$
 18. $x^2 - 5x + 6 = 0$ 19. $x^2 - 6x + 5 = 0$ 20. $x^2 - 2x + 1 = 0$
 21. $x^2 - 17x + 60 = 0$ 22. $x^2 - x - 6 = 0$ 23. $x^2 + x - 6 = 0$
 24. $7x^2 - 23x + 6 = 0$ 25. $27x^2 + 730x + 27 = 0$
 26. $4x^2 - 8x - 12 = 0$ 27. $5x^2 - 17x + 6 = 0$
 28. $x^2 - 14x + 49 = 0$ 29. $x^2 - 40x + 400 = 0$
 30. $12x^2 - 17x + 6 = 0$ 31. $x^2 = 3x - 2$ 32. $16x = 1 + 63x^2$
 33. $x^2 + 6x = -5$ 34. $120x^2 - 61x + 6 = 0$ 35. $5x^2 + 18x - 8 = 0$
 36. $x^2 - 879x + 85137 = 0$ 37. $22x^2 - 9 + x = 16x^2 + 86 + 12x$
 38. $(3x-3)^2 = 20x+1$ 39. $2x(4x-5) = 350$ 40. $x^{-1} + 6x^{-2} = 1$
 41. $x^{-2} + 5x^{-1} = 130$ 42. $5x^{-2} - 4x^{-1} - 1 = 0$
 43. $3x^{-2} + x^{-1} - 154 = 0$ 44. $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{130}{63}$
 45. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-3}$ 46. $x+2 - \frac{6}{x+2} = 1$
 47. $\frac{x+1}{x} + 1 = \frac{x}{x-1}$ 48. $x^{-2} + 6x^{-1} = \frac{43}{49}$ 49. $\frac{x+5}{x-5} - \frac{x-5}{x+5} = \frac{55}{24}$
 50. $\frac{3}{x-3} + \frac{5}{x-5} = \frac{22}{21}$ 51. $\frac{x-3}{x^2-4} + 1 = \frac{1}{x-2}$
 52. $\frac{x-5}{x+3} + \frac{x-8}{x-3} = \frac{80}{x^2-9} + \frac{1}{2}$

Să se rezolvească ecuațiunile literare :

1. $x^2 = 1 + 2a + a^2$ 2. $az^2 = a^2$ 3. $my^2 - n = p$
 4. $x^2(a+1)^2 = a^4 - 1$ 5. $ax^2 + bx^2 = a^4 - b^4$ 6. $ay^2 = b^2 - cy^2$
 7. $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ 8. $x^2 - (a^2 + b^2)x - 2ab(a+b)^2 = 0$
 9. $(a-b)x^2 - 2(a^2 - b^2) + a^2 - b^2 = 0$ 10. $x^2 + 2ax + b^2 = 0$
 11. $x + \frac{1}{x} = a$ 12. $\frac{a}{x} = \frac{x-1}{x-a}$ 13. $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{x}{b} + \frac{b}{x}$ R.: $x = \pm \sqrt{ab}$
 14. $\frac{x+a}{x+b} + \frac{x-a}{x-b} = 0$ 15. $\frac{a}{x-a} + \frac{x-b}{b} = 1$
 16. $\frac{a}{z-a} - \frac{b}{z-b} = ab$ 17. $\frac{x-a}{a} = \frac{2a}{x-a}$
 18. $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 19. $\frac{a+x}{b+x} + \frac{a-x}{b-x} = \frac{a}{b}$
 20. $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{x}$ 21. $\frac{x}{x+a} + \frac{x+a}{x} = 2a$
 22. $\frac{1}{x} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{x-a-b}$ 23. $\frac{z}{a} \left(1 + \frac{z}{b}\right) + 1 + \frac{z}{b} = 0$

$$24. \frac{x+a}{x-b} - \frac{x+b}{x-a} = 1$$

$$25. \frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{x}{b} + \frac{b}{x}$$

Probleme dând loc la ecuații cu o necunoscută.

1. Productul unui număr cu îndoitul său e 72; care e acel număr? (R.: 6).
2. Care'i numărul al cărui patrat îl întrece cu 30? (R.: 6 și -5).
3. Care este numărul al cărui patrat mărit cu 12 face cât de 7 ori acel număr? (R.: 4 și 3).
4. Care este numărul al cărui sfert înmulțit cu jumătatea sa face 18? (R.: 12).
5. Să se găsească un număr astfel ca adunându-i și scăzându-i 3, productul numerelor căpătate să fie 16. (R.: 5).
6. Să să găsească un număr astfel că dacă se adună 14 la de 3 ori patratul său, căpătăm de 23 de ori acel număr. (R.: 7 și $\frac{2}{3}$).
7. Să se găsească două numere ale căror sumă să fie 18 și ale căror product să fie 72. [Unul din numere fiind x , cel-alt va fi $(18-x)$ etc. se găsește astfel 12 și 6].
8. Diferența a două numere e 6 și productul lor e 112; care sunt acele numere? [x fiind unul din numere, cel-alt va fi $(x-6)$ etc. R.: 14 și 8].
9. Productul a două numere e 32 și câtul lor 2; care sunt acele numere? [x fiind unul din numere cel-alt va fi $\frac{32}{x}$, căci $x \times \frac{32}{x} = 32$, etc se găsește 8 și 4].
10. Suma unui număr cu rădăcina sa patrată este 20. Care'i acel număr? (R.: 16).
11. Să se găsească 2 numere consecutive ale căror product este 182. (R.: 14 și 13).
12. Se cere un număr pozitiv a cărei jumătate înmulțită cu 5, înmulțită cu jumătatea sa minus 5 să dea 30 de product. (R.: 12).
13. Să se împartă 14 în două părți ale căror patrate să fie ca 16 la 9. (R.: 8 și 6).
14. Să se găsească un număr astfel ca escesul a de 7 ori acel număr asupra îndoitului său patrat să fie 3. (R.: 3).
15. Prin ce număr trebuie să se împartă 48 pentru ca împărtitorul mărit cu câtul să dea 16? (R.: 12 și 4).
16. O bucată de postav costă 275 de lei; dacă această bucată ar cuprinde $2\frac{1}{2}$ metri mai mult, metrul ar costa cu un leu mai

puțin. Cât costă metrul? (x fiind prețul unui metru, bucata cuprinde $\frac{275}{x}$ metri etc.— R.: 11 lei).

17. Să se calculeze latura unui patrat știind că numărul care exprimă înălțimea suprafeței sale, este egal cu de 8 ori acela ce este primă latura sa. (R.: 4; 0 nu răspunde cestiunei).

18. Să se calculeze laturile unui triunghi dreptunghic știind că au de măsură trei numere consecutive. (Se va baza pe o proprietate a triunghiurilor dreptunghice—R.: 3, 4 și 5).

ECUAȚIUNI DE GR. I. CU 4—5 NECUNOSCUTE.

1. $x+2y=18$
2. $3t-2y=11$
3. $4x-3y+2z=20$
4. $3y+4z=38$
5. $2x+3y=23$
6. $7y+5z-3t=94$
7. $5z+u=32$
8. $4x-2z=4$
9. $2z-8y+2t=-48$
10. $2u+7x=42$
11. $2t+3z=32$
12. $5t+3x-4y=19$
13. $5x+3y-2z+t=30$
14. $4z-3t=5$
15. $x+y+z+u=10$
16. $3x+2y+5z-2t=38$
17. $3x-2y=6$
18. $2x+y+z+u=11$
19. $6x-5y+3z+3t=38$
20. $20t-3x=8$
21. $x+2y+z+u=12$
22. $2x+6y-z+4t=60$
23. $5y-3z=9$
24. $x+y+2z+u=13$
25. $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{2z}{7} = 58$
26. $\frac{x}{2} + \frac{3z}{8} + \frac{u}{5} = 79$
27. $7x-2z+3u=17$
28. $3y-u=1$
29. $5y-3x-2u=8$
30. $4z-2u=2$
31. $5x+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=76$
32. $3z+8u-33=0$
33. $5x-y=3$
34. $t-2z+4y=11$
35. $8x-t=4$
36. $\frac{y}{5} + \frac{z}{2} + \frac{u}{25} = 92$
37. $2t-3u+4y=9$
38. $2t-z=5$

SISTEME PARTICULARE—ARTIFICII DE CALCUL.

1. $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$
2. $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$
3. $\frac{x}{a} = \frac{ac}{a+b}$
4. $\frac{x}{a} = \frac{bc}{a+b}$
5. $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$
6. $\frac{x}{a} = \frac{ac}{a-b}$
7. $R.: \frac{y}{a} = \frac{bc}{a-b}$
8. $R.: \frac{y}{a} = \frac{bc}{a-b}$
9. $x+y=c$
10. $x-y=c$
11. $x+y=7$
12. $x-y=4$
13. $x+z=12$
14. $z-x=3$
15. $y+z=13$
16. $y+z=17$
17. $x+y=14$
18. $y+z=16$
19. $z+t=17$
20. $t+x=15$
21. $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$
22. $x+y+z=36$
23. $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = a$
24. $\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} = b$

meze inversa sa, adecă ecuația a-le cărei rădăcini să fie $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{5}$.

Esercitii asupra discutiei rădăcinelor.

1. Să se discute natura rădăcinelor ecuațiunilor :

$$\begin{array}{lll} 1^0 \quad x^2 + 6x - 12 = 0 & 3^0 \quad 7x^2 - 8x + 15 = 0 & 5^0 \quad x^2 + 3x + 9 = 0 \\ 2^0 \quad 3x^2 + 9x + 21 = 0 & 4^0 \quad 2x^2 - 5x - 11 = 0 & 6^0 \quad x^2 - x - 1 = 0 \end{array}$$

2. Ce relație trebuie să existe pentru ca rădăcinile unei ecuații de gradul al 2-le să fie: 1^0 egale și de același semn, 2^0 egale și de semne contrare.

3. Să se formeze o ecuație de gradul al doilea 1^0 a cărei prim termin să fie x^2 , al doilea $-8x$ și una din rădăcini 12 ; 2^0 a cărei prim termin să fie $3x^2$, al doilea termin $-36x$ și una din rădăcini 7 ; 3^0 a cărei prim termin să fie $4x^2$, al doilea termin $3x$ și una din rădăcini -16 .

4. În ecuația $x^2 - 6x + q = 0$ să se determine q astfel ca una din rădăcini să fie

$$\begin{array}{llllll} 1^0 \quad 4 & 2^0 \quad -4 & 3^0 \quad 0 & 4^0 \quad -1 & 5 \quad 11 \\ 5^0 \quad x' = x'' & 7^0 \quad x' = -x'' (?) & 8^0 \quad x' = \frac{1}{x''} & 9^0 \quad x' = -\frac{1}{x''} \end{array}$$

Esercitii asupra descompunerei trinomului.

1. Să se descompună în factori trinomii :

$$\begin{array}{llll} x^2 - 5x + 6 & ; & x^2 + x - 6 & ; \quad x^2 + 13x + 40 & ; \quad x^2 - 3x - 45 \\ x^2 - 15x + 18 & ; & 5x^2 - 15x - 50 & ; \quad 4x^2 - 8x - 12 & ; \quad 3x^2 + 15x + 18 \\ 4x^2 - 48x + 9 & ; & 9x^2 - 24x + 17 & ; \quad x^2 - 3x + 4 & ; \quad 5x^2 + 2x + 3 \end{array}$$

2. Să se simplifice fracțiunile

$$\begin{array}{llll} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 21x - 28} & ; & \frac{x^2 - 20x - 44}{2x^2 + 10x + 12} & ; \quad \frac{x^2 - 21x + 20}{x^2 - 40x + 400} \\ \frac{x^2 + 15x + 18}{x^2 + 20x + 24} & ; & \frac{2a^2 - 3a + 1}{2a^2 - 31a + 15} & ; \quad \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 + 5x - 2} \end{array}$$

Forme particulare de ecuații.

Să se rezolvească ecuațiunile

$$0,01x^2 + 5x - 3 = 0 \quad (\text{R.: } x' = 0,59928, x'' = -500,59928)$$

$$2x^2 + 21x - 0,05 = 0 \quad (\text{R.: } x' = -0,502306, x'' = 0,002306)$$

Ecvațuni Bipatrate.

Să se rezolvească ecvațiunile:

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 0$$

$$x^4 - 29x^2 + 100 = 0$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$$

$$9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

$$9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$$

$$x^4 + 6x^2 + 9 = 0$$

$$x^4 - 112x^2 + 927 = 0$$

$$\frac{x^2}{x^2+9} + \frac{x^2}{x^2-6} = 7$$

$$x^4 - 2x^2 - 1 = 0$$

$$123x^4 - 245x^2 = 70750$$

$$\frac{x^2}{x^2+9} + \frac{x^2}{x^2-6} = 2$$

Să se transforme într'o sumă de doi radicali:

$$\sqrt{4 \pm \sqrt{7}} ; \sqrt{7 - \sqrt{13}} ; \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} ; \sqrt{31 - 2\sqrt{198}} ; \sqrt{a^2 + b - 2a\sqrt{b}}$$

Ecvațuni reciproce de gradul al IV.

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

$$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$ax^4 + bx^3 - cx^2 + bx + a = 0$$

$$x^4 + 2x^3 + 2x + 1 = 0$$

$$x^4 - 3x^3 + 3x - 1 = 0$$

$$3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$$

$$(ax+b)x^3 - (a+bx) = 0$$

Ecvațuni binome și trinome.

$$1. x^2 + 16 = 0$$

$$2. x^4 = 32$$

$$3. x^5 = 243$$

$$4. x^6 = 64$$

$$5. x^6 + 4x^3 - 96 = 0$$

$$6. 3x^6 + 42x^3 = 3321$$

$$7. 2x^8 - 51x^4 + 304 = 0$$

Ecvațuni iraționale.

1. $\sqrt{x+4} = 8$
2. $\sqrt{2x+5} = \sqrt{5x-4}$
3. $\sqrt{51+x} = 3 + \sqrt{x}$
4. $ab\sqrt{a-x} = (a-x)\sqrt{x}$
5. $\sqrt{2x-5} = x-4$
6. $\sqrt{2x-3} = x-3$
7. $x + \sqrt{29-x^2} = 7$
8. $x - \sqrt{29-x^2} = 3$
9. $\sqrt{3x+4} - 2\sqrt{x} = 0$
10. $\sqrt{x-1} = 3x-5$
11. $\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} = \sqrt{a+b}$
12. $\sqrt{3x-5} - \sqrt{2x-5} = 1$
13. $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{a}$
14. $\sqrt{7x+18} - \sqrt{x+8} = \sqrt{x+2}$
15. $\sqrt{3(x-1)(x-2)} = x-2$
16. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5$
17. $\sqrt{1-\sqrt{a^4-a^2}} = a-1$
18. $\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}} = 1$
19. $x + \frac{10}{\sqrt{4+x^2}} = \sqrt{4+x^2}$
20. $x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}$
21. $x - 2 + \sqrt{2x^2 - 3x + 3} = 0$
22. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{5-8x} = \sqrt{4x+7}$
23. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{5x+1} = \sqrt{12x+13}$

Sisteme de ecuații de gradul al doilea.

$$1. 3x^2 + 5y^2 - 2xy - 4x + y - 40 = 0 \quad \text{și} \quad 3x - 2y = 0$$

$$\begin{array}{lll}
 2. \begin{array}{l} x+y=8 \\ xy=15 \end{array} & 3. \begin{array}{l} x-y=5 \\ xy=36 \end{array} & 4. \begin{array}{l} x+y=11 \\ x^2+y^2=65 \end{array} \\
 5. \begin{array}{l} x-y=8 \\ x^2+y^2=232 \end{array} & 6. \begin{array}{l} x^2+y^2=74 \\ xy=35 \end{array} & 7. \begin{array}{l} v^2+z^2=117 \\ v^2-z^2=45 \end{array} \\
 8. \begin{array}{l} v^2-z^2=33 \\ v^2+z^2=65 \end{array} & 9. \begin{array}{l} x^2+y^2=a^2 \\ x^2-y^2=b^2 \end{array} & 10. \begin{array}{l} \sqrt{x}+\sqrt{y}=a \\ x+y=b^2 \end{array} \\
 11. \begin{array}{l} x^2+y^2+x+y=32 \\ x^2+y^2-x-y=18 \end{array} & 12. \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a \quad \text{și} \quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=b^2 &
 \end{array}$$

DIFERITE PROBLEME.

1. Să se găsească un număr care adunat la rădăcina sa patrată să dea 56. (R.: 49).
2. Să se găsească un număr care adunat la rădăcina sa cubică să dea 520 (R.: 512).
3. Sumă patratelor a două numere este 377; diferența acelorași patrate este 135. Cari sunt acele numere? (R.: 16 și 11).
4. Care'i numărul al cărui patrat mărit cu 14 să fie cât de 9 ori acel număr? (R.: 7 și 2).
5. Productul terminilor unei fracțiuni e 143; să se afle acești termini știind că scăzând 2 din numitor aflăm pe numărător. (R.: $\frac{11}{13}$).
6. Să se găsească două numere întregi consecutive astfel ca diferența patratelor lor să fie 13. (R.: 12 și 11).
7. Să se găsească două numere consecutive neperechi astfel ca suma patratelor lor să fie 130. (R.: 9 și 7).
8. Care'i numărul a cărui treime înmulțită cu sfertul său este egal cu îndoială aceluia număr? (R.: 24 și 0).
9. Să se găsească un număr a cărui jumătate, treime, sfert și șesime înmulțite între ele să facă cât patratul aceluia număr. (R.: 12, 0 și -12).
10. Să se găsească 5 numere întregi consecutive astfel ca suma patratelor celor două mari să fie egală cu suma patratelor celor-l-alte trei. [Cele 5 numere consecutive sunt $(x-2)$, $(x-1)$, x , $x+1$ și $(x+2)$ etc.—R.: 10, 11, 12, 13 și 14].
11. Un număr este productul a 3 numere întregi consecutive; dacă îl împărțim prin fie-care din factorii săi, suma cîților astfel căpătați este 146. Care'i acel număr? [Acel număr este $(x-1)x(x+1)$ și urmărd enunțul găsim $x = \pm 7$ și prin urmare numărul căutat e 336 sau (-336)].
12. Să se calculeze laturile unui triunghi a cărui supraf-

față e de 6 m. p. știind că aceste laturi sunt măsurate prin trei numere întregi consecutive.

(Se va întrebuiuță formula $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} - R$: 3, 4 și 5).

13. Cu ocazia sărbătorilor o sumă de 400 de lei a fost destinată pentru un număr de săraci. Să se afle numărul săracilor știind că 4 neprezentându-se, partea fiecărui a fost mai mare cu 5 lei. (Partea presupusă a fiecărui e $\frac{400}{x}$ și urmând enunțul se găsește R.: 20—rădăcina negativă nu răspunde cestiunei).

14. Trei numere sunt astfel că dacă le înmulțim două câte două, dau de produse 180, 270 și 216. Cari sunt acele numere? (R.: 12, 15 și 18).

15. Productul a două numere este egal cu de 3 ori suma lor și suma patratelor lor este 160. Cari sunt acele numere? (Se valua mai întâi ca necunoscută suma lor; această odată aflată, unită cu productul ne dă: R.: 12 și 4).

16. De ce lungime trebuie măsurate laturile unui dreptunghi pentru ca suprafața să să fie redusă la jumătate? Aplicație pentru $b=4$, $h=3$. (R.: $\frac{1}{2}(a+b-\sqrt{a^2+b^2})$ — rădăcina cea mare nu răspunde cestiunei: laturi negative nu există; 20: 1).

Progresii — Logaritmi — Aplicații.

PROGRESII ARITMETICE.

- Să se calculeze al 31-lea termen al progresiei $\div 3, 6, 9, \dots$
- Să se calculeze al 27-lea termen al progresiei $\div 11, 5, 9, 6, 5, \dots$
- Să se calculeze al 18-lea termen al progresiei $\div \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \dots$
- Să se insereze 12 medii aritmetice între 5 și 83.
- Să se insereze 20 medii aritmetice între 3 și 66.

| Fieind date să se găsească | Aplicație | Raspuns |
|----------------------------|-------------------------|---------------------|
| a, l, n r și S | $a=0, l=93, n=32$ | $r=3$ și $S=1488$ |
| a, r, n l și S | $a=7, r=5, n=41$ | $l=207$ și $S=4387$ |
| l, r, n a și S | $l=160, r=3, n=54$ | $a=1$ și $S=4347$ |
| a, l, r n și S | $a=47, l=5, r=-2$ | $n=22$ și $S=572$ |
| a, l, S r și n | $a=0, l=54, S=999$ | $r=1,5$ și $n=37$ |
| a, n, S r și l | $a=10, n=25, S=850$ | $r=2$ și $l=58$ |
| l, n, S r și a | $l=199, n=100, S=10000$ | $r=2$ și $a=1$ |
| a, r, S l și n | $a=6, r=2, S=594$ | $l=46$ și $n=22$ |
| l, r, S a și n | $l=23, r=4, S=78$ | $a=3$ și $n=6$ |

- Suma a trei numere în progresie aritmetică este 24 și pro-

ductul lor 440. Care sunt aceste numere? [Unul fiind x , cei-l-alti vor fi $(x-r)$ si $(x+r)-R.$: 5, 8 si 11].

8. Câte bătăi sună un ceas în 12 ore? 1^o presupunând că sună numai orele; 2^o presupunând că sună si sferturile. (R.: 1^o 78; 2^o în timp de o oră sună 10 sferturi, prin urmare: 198).

9. Să se calculeze numărul punctelor cuprinse în cele 90 de bile ale jocului de loto. (R.: 4095).

10. Se știe că cocorii călătoresc dispuși în formă de triunghi; adecă că 1 cocor ocupă primul rang, 2 cocori al 2-lea rang, 3 cocori al 3-le rang...; cum putem determina numărul lor când cunoaștem numărul sirurilor? Aplicație pentru 12 siruri. (R.: 78).

11. Să se găsească unghierile unui triunghi dreptunghic știind că numerile ce le măsoară sunt în progresie aritmetică. (Suma unghierilor unui triunghi este de 180°—R.: 30°, 60° și 90°).

12. Să se găsească suma celor d'intăi n numeri perechi. [R.: $(n+1)n$].

13. Să se găsească suma celor d'intăi n termeni ai progresiei $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n} \dots$ (R.: $\frac{n-1}{2}$).

14. Cine-va tocmește un servitor cu 240 de lei pe an promisiându-i că, dacă se va purta bine, să-i sporească în fie-care an câte 24 de lei. Servitorul mulțumindul în timp de 19 ani, se întreabă care a fost leafa lui în al 19-lea an și cătă leafă a primit el în tot acest timp. (R.: 1^o 672; 2^o 8664).

15. Să se afle suma a n numere consecutive care încep cu n . (R.: $\frac{n(3n-1)}{2}$).

16. Să se afle laturile unui triunghi dreptunghic știind că numerile ce le măsoară sunt în progresie aritmetică de ratia 4. (Se va servi de relația $a^2=b^2+c^2$ R.: 12, 16 și 20).

17. Un colonel care comandă 1156 de oameni, vrea să-i rănduiască în formă de triunghi, adecă ca în primul sir să fie numai un soldat; în al 2-le, 3; în al 3-le, 5; și. a. m. d. Câte siruri va forma? (R.: 34).

18. Suma a 5 numere în progresie aritmetică este 50, și produsul lor 4536. Cari sunt aceste numere? (R.: 2, 6, 10, 14 și 18).

19. Câte bile sunt în 13 siruri așezate în formă de triunghi echilateral, dacă primul sir conține o bilă; al 2-le, două; și. a. m. d. (R.: 91).

20. Un corp care cade străbate în prima secundă a căderei sale 4^m 9; în a doua, de 3 ori această distanță; și. a. m. d. Se cere

spațiul străbătut de acest corp în a 12-a secundă și spațiul străbătut în tot timpul de 12 secunde. (R.: 1^{a} $112^{\text{m}},7$; 2^{a} $705^{\text{m}},6$).

21. Suma a câtor numere din sirul natural este 325? (R.: 25).

22. Să se găsească suma a n numere consecutive neperechi care încep cu $[n(n-1)+1]$. (R.: n^3).

23. Un lucrător se tocmește să sape o fântână pentru care i se plătește 1 leu 50 de metru în plus 50 de bani pentru fiecare din metri următori din cauza greutăței din ce în ce mai mare a lucrului. Se întreabă cât i se cuvine pentru 18 metri? (R.: 103, 5 lei).

24. La o petrecere ridicându-se un twoast, fie-care conmesean ciocnește o dată paharul cu fie-care din ceilalți. Se cere numărul ciocniturilor știind că la acea masă asistau 14 persoane. (Cel d'intăi va ciocni de 13 ori, al 2-le de 12 ori....—R.: 91).

25. Un servitor întrebă ce leafă are răspunse: Eu am acum 820 de lei pe an; anul d'intăi n-am avut de căt 120 de lei, dar în fie-care an mi'a sporit căte 35 de lei.

Mirat cum de a ajuns la o leafă atât de mare, îl întrebă: „dar de câți ani servești d-ta?“—Să se afle aceasta. (R.: 21).

PROGRESII GEOMETRICE.

1. Să se calculeze al 11-lea termin al progresiei $\div 9 : 45 : 225$.

2. Al 7-lea termin al unei progresii de rația 3 este 1458. Carei primul termin?

3. Să se însereze 3 medii geometrice între 5 și 80.

4. Să se însereze 12 medii geometrice între 21 și 33480783. (A vedea în tablele lui Dupuis pag. 146 putea ile lui 3).

5. Să se găsească suma celor d'intăi 10 termeni ai progresiei $\div 3 : 12 : 48 : \dots$

6. Să se găsească suma celor d'intăi 7 termeni ai progresiei $\div 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \dots$ precum și limita la care tind numărul lor crește indefinit.

7. Să se găsească suma celor d'intăi 6 termeni ai progresiei $\div 1 : 0,1 : 0,01 : 0,001 : \dots$

8. Să se împartă 182 în trei părți care să fie în progresie geometrică de rația 3. (R.: 14, 42 și 126).

9. Să se găsească limita sumei terminilor unei progresii infinită descrescătoare știind că primul termin e 10 și rațiunea $\frac{2}{3}$. (R.: 30).

CESTIUNI DE DOBÂNDĂ.

1. Ce va deveni după 12 ani un capital de 1600 de lei dat cu dobândă compusă cu 4% pe an? (R.: 2561 lei 60).
2. Ce va deveni după 8 ani un capital de 3625 de lei dat cu dobândă compusă cu 4% pe an? (R.: 4961 lei 06).
3. Ce va deveni după 6 ani un capital de 18500 de lei dat cu dobândă compusă cu 5% pe an? (R.: 24791 lei, 77).
4. Ce va deveni după 27 ani și 3 luni un capital de 1000 de lei dat cu dobândă compusă cu $5,5\%$? (R.: 4303 lei, 82).
5. Ce devine după 7 ani și 72 de zile capitalul 8745 de lei dat cu dobândă compusă cu 4% pe an? (R.: 11599 lei, 50).
6. Ce devine după 3 ani, 8 luni și 6 zile capitalul 13052 lei dat cu dobândă compusă cu $4,5\%$ pe an? (R.: 15352 lei, 50).
7. Cât trebuie să împrumute cine-va cu 3% ; pentru ca după 10 ani să aibă a luat 30000 de lei? (R.: 22322 lei, 82).
8. Cât trebuie să împrumute cine-va cu 5% , pentru ca după 7 ani și 4 luni să aibă de luat 1000 de lei? (R.: 8050 lei, 41).
9. Cu ce procent trebuie să împrumute cine-va 1000 de lei pentru ca după 53 de ani să aibă de luat 9000 de lei? (R.: 4, 5%).
10. Cu ce procent trebuie să împrumute cine-va 7654 de lei pentru ca după 12 ani și 4 luni să și formeze un capital de 12416 lei? (R.: 4%).
11. După cât timp un capital de 40000 de lei împrumutat cu $4, 5\%$ pe an devine 67835? (R.: 12 ani).
12. Cât timp trebuie lăsat cu dobândă compusă un capital de 7300 de lei pentru ași forma 10448 lei 10, procentul fiind de $5, 5\%$? (R.: 6, 6976 ani sau 6 ani, 8 luni și 11 zile).
13. În cât timp o sumă dată cu dobândă compusă cu 5% devine îndoită? dar cu 4% ? (R.: 1⁰ 14 ani, 2 luni și 14 zile; 2⁰ 17 ani, 8 luni și 3 zile).

CESTIUNI DE DEPUNERI ȘI AMORTISMENT.

1. Carei capitalul format prin 15 depunerî anuale de căte 5500 lei, procentul fiind de $4,5\%$? R.: 118179 lei.
2. Un părinte voind să asigure starea copilului său, depune anual căte 1250 de lei timp de 20 de ani. Care este valoarea capitalului format la sfărșitul acestui an, procentul fiind de 4% ? (R.: 37222 lei, 94).

3. Un fumător cheltuește de la vîrsta de 18 ani câte 73 de lei anual; se întreabă ce capital și-ar fi putut forma la vîrsta de 62 de ani dacă ar fi depus acești bani, procentul fiind de 5%? (R.: 11585 lei).

4. Un industriaș care vrea să-și formeze după 7 ani un capital de 10000 de lei, se întreabă căt trebue să depue anual, procentul fiind de 5%? (R.: 1000 lei).

5. Căt trebue să se depue anual pentru ca după 14 ani să se formeze un capital de 25414 lei 55, procentul fiind de 5%? (R.: 1235 lei).

6. Un lucrător care depune în fie-care an câte 600 de lei se întreabă după câți ani și va forma un capital de 9376 lei 20, procentul fiind de 4%? (R.: 12 ani).

7. Timp de câți ani trebuie să depue un lucrător 360 lei 20 cu 3,5% pentru a-și forma un capital de 30000 de lei? (R.: 9 ani).

8. In cât timp anuitatea de 850 de lei formează un capital de 15000 de lei? (R.: 13.....— Fiind că în acest caz nu se poate prevedea rezultatul, în caz când n e fractionar se schimbă cestiunea căutându-se anuitatea care formează capitalul cerut în timpul n . Aplicându-se această observare cazului de față, se găsește că cu 13 anuități de 867 lei 42 se formează capitalul voit).

9. Carei anuitatea care amortizează un împrumut de 50000 de lei cu 5% în timp de 20 de ani? (R.: 4012 lei).

10. Carei anuitatea care amortizează un împrumut de 50000 de lei cu 4% în timp de 25 de ani? (R.: 3200 l. 50).

11. Cine-va vinde o vie în 10 anuități de câte 8000 de lei, are valoarea viei, socotindu-se procentul de 5%? (R.: 61773,90).

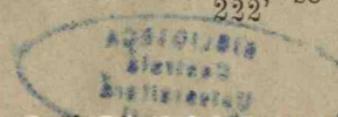
12. Ce datorie este amortizată prin 95 de anuități de câte 5000 de lei, procentul fiind de 3,7%? (R.: 1177665 lei).

13. Cine-va împrumută 10000 de lei cu 5% pe cari voește să achite prin anuități de 1000 de lei; în cât timp se va mări datorie? (R.: 14 ani).

14. In cât timp o datorie de 10000 de lei este amortizată prin anuități de 618 lei 75, procentul fiind de 6%? (R.: 60 ani).

15. Cine-va are de plată la o aceiași persoană două sume: sumă de 625 de lei plătibile peste 2 ani și alta de 2354 de lei plătibile peste 5 ani; se întreabă carei suma unică ce va trebui să o plătească pentru a achita ambele datorii peste 2 ani, procentul fiind de 4,5%? (R.: 2791,40).

16. Când a eșit din corabie, familia lui Noe se compunea din însăși; presupunând creșterea anuală de $\frac{1}{222}$, se întreabă care



ar trebui să fie populațiunea actuală a pământului știind că s'au strecurat aproape 4200 de ani de la această întâmplare (R.: 1 miliard 262 milioane—aproape populațiunea de astăzi a pământului).

Cestiuni de maximum și de minimum.

1. Să se găsească valorile maxime și minime ale funcțiunilor următoare, determinându-se și valorile corespondente ale lui x :

$$7-x^2 ; x^2-7 ; 5+x^2 ; (2+x)(2-x) ; x(7-x) ; x(x-8) \\ x^2-5x+4 ; 50+15x-5x^2 ; x^2+(6-x)^2 ; (x+8)^2-2x^2$$

2. Să se împartă cantitățile următoare în două părți astfel ca produsul lor să fie maxim:

$$14 ; 15 ; \frac{1}{2} ; a ; \sqrt{2} ; \sqrt{-1} ; (a-b)\sqrt{2}$$

3. Să se împartă 14 în două părți astfel ca suma patratelor lor să fie maximă.

4. Să se descompună cantitățile următoare în doi factori a căror sumă să fie minimă:

$$49 ; 324 ; 64 ; -36 ; a ; \frac{1}{9} ; \frac{16}{25} ; \sqrt{8}$$

5. Să se împartă 8 și 100 în două părți astfel ca suma patratelor lor să fie minimă.

6. Să se împartă cantitățile următoare în 3 părți astfel ca suma lor să fie maximă:

$$27 ; 72 ; \frac{1}{9} ; 14 ; a ; \sqrt{2} ; \sqrt{-27}$$

7. Să se împartă 27 în două părți astfel ca suma a de 4 ori patratul părței dintăi cu de 5 ori patratul părței de a doua, să fie cea mai mică posibilă. (Bac. Paris.—R.: 15 și 2).

8. Să se găsească maximul și minimul funcțiunilor următoare, precum și valorile corespondente ale lui x :

$$\frac{x^2+1}{x} ; \frac{x^2-1}{x} ; x+\frac{1}{x} ; \frac{x^2}{x-1} ; \frac{x^2}{x+1}$$

F I N E

Toate drepturile rezervate.

ERATA

| <u>Pag.</u> | <u>rînd.</u> | <u>în loc de</u> | <u>să secitească</u> |
|-------------|--------------|--|--|
| 17 | 3 | 6a b | 6a ³ b |
| 20 | 4 | $(x^4 + 1 + x^2\sqrt{-})(x^4 + 1 - \sqrt{2})$ | $(x^4 + 1 + x^2\sqrt{2})(x^4 + 1 - x^2\sqrt{2})$ |
| 20 | | să se lase la o parte problema 13. | |
| 23 | 21 | $(b + c +)(b + c - a)(cb - c +)(a - b + c)$ | |
| 29 | | $(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)$ | |
| 36 | 20 | s'a omis răspunsul esercițiului 49 va | R.: $2x^2$ va fi |



VERIFICAT
2017

De acelaș autor:

Curs teoretic și practic de Algebră pentru
cursul secundar

3,00

Cestiuni de Psihologie ce trebuie să le rețină
fie-ce elev la esamenele generale și la bacalaureat.

0,60

ESEMPLARUL 1 LEU